भाग 2

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

लेखक

अरविंद कुमार — ए.एस. निगवेकर
बी.के. शर्मा — डी.पी. तिवारी
पी.सी. जैन — राजाराम नित्यानंद
वी.पी. श्रीवास्तव — विजय ए. सिंह
सुरेश चंद्र

संपादक

अरविंद कुमार — बी.के. शर्मा
पी.सी. जैन — सुरेश चंद्र

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
फरवरी 2003 माघ 1924

पुनर्मुद्रण
नवंबर 2003 कार्तिक 1925

PD 8T NSY

ISBN 81-7450-085-5 (भाग 1)
81-7450-086-3 (भाग 2)

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस	108, 100 फीट रोड	नवजीवन ट्रस्ट भवन	सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस	सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
श्री अरविंद मार्ग	हेली एक्सटेंशन, होस्डकेरे	डाकघर नवजीवन	निकट: धनकल बस स्टॉप	मालीगांव
नई दिल्ली 110 016	बनाशंकरी III इस्टेज	अहमदाबाद 380 014	पनिहटी	गुवाहाटी 781021
	बैंगलूर 560 085		कोलकाता 700 114	

प्रकाशन सहयोग

संपादन : नरेश यादव
उत्पादन : कल्याण बैनर्जी

सज्जा
विजय व्यास

रु 65.00

प्रस्तावना

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् पिछले चार दशकों से विज्ञान और गणित की शिक्षा में गुणात्मक सुधार के लिए कार्य कर रही है । इसके लिए परिषद् ने पाठ्यक्रम तथा पाठ्यचर्या विकसित करने का उत्तरदायित्व लिया है । इस समय तक परिषद् विभिन्न अभिगमों के साथ कई बार पाठ्यसामग्री तथा संबंधित अन्य शैक्षणिक सामग्री विकसित करने का कार्य पूरा कर चुकी है। इन सामग्रियों को विभिन्न राज्य/केंद्र शासित प्रदेश अपनाते/रूपांतरित कर लेते हैं । हर बार परिषद् की मुख्य सोच यही रही है कि राष्ट्रीय शिक्षा नीति का समुचित अनुपालन करते हुए कार्य किया जाए तथा विद्यालय स्तर पर पाठ्यचर्या नवीकरण प्रक्रिया के दौरान विभिन्न सामाजिक तथा शैक्षणिक मुद्दों पर विचार किया जाए। परिषद् द्वारा प्रकाशित *विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2000* इन्हीं प्रयासों के अनुरूप है । इसमें विज्ञान और गणित शिक्षा तथा उच्चतर माध्यमिक स्तर पर चयनित विषय के रूप में भौतिकी विषय के शिक्षण की गुणवत्ता में सुधार लाने के लिए पुनरावृत्ति की गई है । इस राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा ने पाठ्य-सामग्री तथा अन्य संबंधित शैक्षणिक सामग्री के सत्रवार विकास की अनुशंसा भी की है। कक्षा 11 के लिए भौतिकी की इस पाठ्यपुस्तक में सत्र एक और दो को सम्मिलित किया गया है ।

इस पुस्तक की प्रथम पाण्डुलिपि एक लेखन मंडल द्वारा परिषद् तथा भारत के विभिन्न सुविख्यात शैक्षणिक तथा अनुसंधानिक संगठनों के विशेषज्ञों (जिनके नाम का उल्लेख अन्यत्र है) को सम्मिलित करके विकसित की गई। इस पाठ्यपुस्तक के विकास के समय लेखन मंडल ने भौतिकी के प्रचलित पाठ्यक्रम तथा पाठ्यपुस्तक के विषय में प्राप्त पुनर्निवेशन पर विचार किया। प्रस्तुत पुस्तक को विद्यार्थियों के लिए और अधिक प्रासंगिक तथा अर्थपूर्ण बनाने के लिए लेखन मंडल ने पिछले दशक में शैक्षणिक तथा विषयवस्तु में हुए समकालीन परिवर्तनों पर विचार किया। पाण्डुलिपि के प्रारूप की समीक्षा विषय के अनुभवी शिक्षकों तथा विषय विशेषज्ञों के एक समूह (जिनके नाम का उल्लेख अन्यत्र है) द्वारा एक समीक्षा कार्यगोष्ठी में की गई। इस समीक्षा कार्यगोष्ठी में प्राप्त हुए सुझावों पर लेखकों ने विचार करके पाण्डुलिपि के प्रारूप में उचित परिमार्जन किया। प्रकाशन से पूर्व विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा पाण्डुलिपि का अंतिम संपादन किया गया।

मैं लेखन मंडल के अध्यक्ष एवं सदस्यों को उनके राष्ट्रीय स्तर पर शैक्षिक योगदान के लिए धन्यवाद देता हूं। मैं समीक्षा कार्यगोष्ठी के प्रतिभागी शिक्षकों तथा विषय विशेषज्ञों का उनके द्वारा की गई समीक्षा और सुझावों के लिए भी आभारी हूं जिसने प्रस्तुत पुस्तक के परिमार्जन में सहायता की है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् इस पुस्तक में सुधार के लिए प्रयोक्ताओं द्वारा दिए गए सुझावों का स्वागत करेगी।

जगमोहन सिंह राजपूत
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
जून 2002

आमुख

एक दशक से भी अधिक समय पूर्व, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने प्रो. टी.वी. रामकृष्णन, एफ.आर.एस., की अध्यक्षता में लेखकों के एक दल की सहायता से कक्षा 11 तथा 12 के लिए लिखी गई पाठ्यपुस्तकें प्रकाशित की थीं। इन पुस्तकों को विद्यार्थियों तथा शिक्षकों ने समान रूप से भलीभांति अपनाया। वास्तव में ये पुस्तकें मील का पत्थर तथा विचारधारा निर्धारित करने वाली सिद्ध हुईं। तथापि, पाठ्यपुस्तकों और विशेषकर विज्ञान की पुस्तकों का विकास परिवर्तनशील बोध, आवश्यकता, पुनर्निवेशन तथा विद्यार्थियों, शिक्षाविदों तथा समाज के अनुभवों की दृष्टि से एक गत्यात्मक प्रक्रिया है। इसी बीच राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने *विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2000* प्रकाशित की तथा विद्यालयी स्तर पर पाठ्यचर्या नवीकरण प्रक्रिया के दौरान पाठ्यक्रम में तदनुसार संशोधन किया गया। *उच्चतर माध्यमिक स्तर के लिए पाठ्यक्रम* (एन.सी.ई.आर.टी., 2001) विकसित किया गया है। कक्षा 11 के भौतिकी के पाठ्यक्रम में सत्र एक तथा दो प्रत्येक में पांच-पांच इकाइयां हैं। प्रस्तुत पुस्तक लेखकों के वर्तमान दल के सतत् प्रयास का परिणाम है और साथ ही यह आशा है कि यह विद्यार्थियों तथा शिक्षकों को भौतिकी विषय के अध्ययन के लिए प्रेरित एवं प्रोत्साहित करने में सहायक होगी।

विज्ञान और प्रौद्योगिकी की लगभग सभी शाखाओं के ज्ञान का आधारभूत भौतिकी है। हम इस तथ्य से अभिज्ञ हैं कि भौतिकी के कुछ सरल आधारिक सिद्धांत प्रायः प्रत्यात्मक रूप में जटिल होते हैं। इस पुस्तक में हमनें 'प्रत्यात्मक सामंजस्य' लाने का प्रयास किया है। शैक्षणिक तथा विषय की परिशुद्धता को बनाए रखकर सरल एवं सुबोध भाषा का प्रयोग करना हमारे प्रयास का केंद्र बिंदु है। भौतिकी विषय की प्रकृति ही ऐसी है जिसके लिए कुछ न्यूनतम गणित का उपयोग करना आवश्यक हो जाता है। जहां तक संभव हो सका है हमने गणितीय सूत्रों को तार्किक ढंग से विकसित करने का प्रयास किया है।

इस पुस्तक में कुछ नई विशिष्टताएं जोड़ी गई हैं। हमें पूर्ण आशा एवं विश्वास है कि ये विद्यार्थियों के लिए पुस्तक की उपयोगिता में वृद्धि करेंगी। अध्याय की विषय-वस्तु पर तेजी से सरसरी दृष्टि डालने के लिए प्रत्येक अध्याय के अंत में 'सारांश' दिया गया है। इसके पश्चात् 'विचारणीय विषय' दिए गए हैं जो विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उत्पन्न होने वाली संभावित भ्रांतियों, अध्याय में दिए कुछ प्रकथनों/सिद्धांतों में छिपी उलझनों तथा अध्याय से उपलब्ध ज्ञान के उपयोग के लिए आवश्यक 'चेतावनियों' की ओर इंगित करते हैं। इन 'बिंदुओं' पर सोचना तथा अपने मस्तिष्क का अनुप्रयोग करना विद्यार्थियों को रोचक लगेगा। इसके अतिरिक्त संकल्पनाओं के स्पष्टीकरण तथा/अथवा दैनिक जीवन की परिस्थितियों में इन संकल्पनाओं के अनुप्रयोगों की व्याख्या के लिए बड़ी संख्या में पाठ्य सामग्री में 'हल सहित अभ्यासों' का समावेश किया गया है। यदा-कदा भौतिकी विषय के क्रमिक विकास के प्रति जिज्ञासा को शांत करने के लिए ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्यों को भी सम्मिलित किया गया है। बहुत से अध्यायों में या तो इसी उद्देश्य के लिए अथवा उन विषयवस्तुओं जिनमें विद्यार्थियों को अतिरिक्त ध्यान देने की आवश्यकता होती है, उनकी कुछ विशेष विशिष्टताओं की ओर आकर्षित करने के उद्देश्य से विषयवस्तु को 'बॉक्स' में दिया गया है।

सुस्पष्ट चित्र प्रदान करने की ओर विशेष ध्यान दिया गया है। चित्रों की स्पष्टता में वृद्धि के लिए उन्हें 'दो रंगों' में रेखांकित किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अंत में पर्याप्त संख्या में अभ्यास दिए गए हैं। इनमें से कुछ जीवन की वास्तविक परिस्थितियों से संबंधित हैं। कुछ अभ्यासों को हल करने के लिए संकेत

एवं उत्तर दिए गए हैं। विद्यार्थियों से अनुरोध है कि वे इन्हें हल करें और ऐसा करते समय वे इन अभ्यासों को अत्यधिक शिक्षाप्रद पाएंगे। संपूर्ण पुस्तक में SI मात्रकों का उपयोग किया गया है। निर्धारित पाठ्यक्रम/पाठ्यचर्या के भाग के रूप में और साथ ही भौतिकी के लक्ष्य में सहायक के रूप में अध्याय 2 में "मात्रक और मापन" का विस्तृत विवरण दिया गया है।

इस पुस्तक को पूर्ण कर पाना बहुत से व्यक्तियों की सहज स्वाभाविक एवं सतत् सहायता के कारण ही संभव हो सका है। विज्ञान शिक्षा में सुधार के लिए राष्ट्रीय प्रयासों के एक भाग के रूप में इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण का कार्य सौंपने के लिए हम राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के निदेशक के प्रति अपना आभार प्रकट करते हैं। परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के अध्यक्ष तथा संकाय के अन्य सदस्य इस उद्यम में सदैव ही हर संभव ढंग से हमारी सहायता के लिए तत्पर रहे, हम उनके भी अत्यंत अभारी हैं।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक को उन शिक्षकों तथा विशेषज्ञों का श्रेष्ठ विद्वत्तापूर्ण निवेश प्राप्त हुआ है जिन्होंने प्रथम पाण्डुलिपि पर चर्चा तथा परिमार्जन के लिए आयोजित समीक्षा कार्यगोष्ठी में पुस्तक में सुधार के लिए वास्तविक सुझाव दिए। हम प्रो. टी.वी. रामकृष्णन तथा उनके लेखन मंडल को उनके द्वारा 1988 में लिखी गई पाठ्यसामग्री के लिए धन्यवाद देते हैं जिसने हमें इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में संदर्भ प्रदान किया। यदा-कदा इस पुस्तक के कुछ भागों को, विशेषकर जिन्हें विद्यार्थियों/शिक्षकों ने सराहा है, विद्यार्थियों की भावी पीढ़ी के हित को ध्यान में रखकर, प्रस्तुत पुस्तक में अपनाया/रूपांतरित किया है।

हम अपने सम्मानित प्रयोक्ताओं, विशेषकर विद्यार्थियों तथा शिक्षकों से प्राप्त समीक्षा एवं सुझावों का आदर करते हैं। हम अपने युवा पाठकों की भौतिकी के रोमांचकारी कार्यक्षेत्र की ओर अग्रसर होने की कामना करते हैं।

सुरेश चंद्र
भौतिकी विभाग
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय
वाराणसी, उत्तर प्रदेश
(सभी लेखकों/संपादकों की ओर से)

लेखन मंडल

सुरेश चंद्र (**अध्यक्ष**)
प्रोफेसर
भौतिकी विभाग
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय
वाराणसी, उत्तर प्रदेश

राजाराम नित्यानंद
निदेशक
रेडियो-खगोलभौतिकी राष्ट्रीय केंद्र
पुणे, महाराष्ट्र

पी.सी. जैन
प्रोफेसर
भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

विजय ए. सिंह
प्रोफेसर
भौतिकी विभाग
इंडियन इंस्टीट्यूट ऑफ टैक्नोलॉजी
कानपुर, उत्तर प्रदेश

अरविंद कुमार
निदेशक
होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र
मुंबई, महाराष्ट्र

ए.एस. निगवेकर
अध्यक्ष
विश्वविद्यालय अनुदान आयोग
नई दिल्ली

डी.पी. तिवारी
प्रोफेसर
भौतिकी विभाग
इंडियन इंस्टीट्यूट ऑफ टैक्नोलॉजी
दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग

वी.पी. श्रीवास्तव
रीडर
बी.के. शर्मा (**समन्वयक**)
प्रोफेसर

गांधी जी का जंतर

तुम्हें एक जंतर देता हूँ। जब भी तुम्हें संदेह हो या तुम्हारा अहम् तुम पर हावी होने लगे, तो यह कसौटी आज़माओ :

जो सबसे गरीब और कमज़ोर आदमी तुमने देखा हो, उसकी शक्ल याद करो और अपने दिल से पूछो कि जो कदम उठाने का तुम विचार कर रहे हो, वह उस आदमी के लिए कितना उपयोगी होगा। क्या उससे उसे कुछ लाभ पहुँचेगा? क्या उससे वह अपने ही जीवन और भाग्य पर कुछ काबू रख सकेगा? यानी क्या उससे उन करोड़ों लोगों को स्वराज्य मिल सकेगा, जिनके पेट भूखे हैं और आत्मा अतृप्त है?

तब तुम देखोगे कि तुम्हारा संदेह मिट रहा है और अहम् समाप्त होता जा रहा है।

हिंदी रूपांतर की समीक्षा कार्यगोष्ठी के सदस्य

एन. जी. डोंगरे
रीडर (अवकाशप्राप्त)
बी-62, ब्रिज एन्क्लेव
सुंदरपुर, वाराणसी, उत्तर प्रदेश

आर. के. तिवारी
लेक्चरर
एच.एम.डी.ए.वी. सीनियर सेकंडरी स्कूल
दरियागंज, नई दिल्ली

एम. एन. बापत
रीडर
क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, मैसूर, कर्नाटक

संत प्रकाश
रीडर
क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भोपाल, मध्य प्रदेश

एस. के. पराडकर
रीडर
क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, अजमेर, राजस्थान

डी.सी. पाण्डेय
सहायक निदेशक
विज्ञान शिक्षा (अवकाशप्राप्त)
शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली

एस.पी. सिंह
सहायक शिक्षा निदेशक
शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली
पत्राचार विद्यालय, तिमारपुर, दिल्ली

ओ.पी. खण्डेलवाल
रीडर (अवकाशप्राप्त)
द्रोणाचार्य राजकीय महाविद्यालय
गुड़गांव, हरियाणा

वेद रत्न
प्रोफेसर (अवकाशप्राप्त)
एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

जे.सी. शर्मा
जिला प्रशिक्षण एवं स्थापन अधिकारी
शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली

पी.सी. जैन
प्रोफेसर
भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

कन्हैया लाल
प्राचार्य (अवकाश प्राप्त)
शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली

आर.एस. दास
उपप्रधानाचार्य
बलवंत राय मेहता विद्याभवन
सीनियर सेकंडरी स्कूल, लाजपत नगर, नई दिल्ली

हर्ष आर्य
स्नातकोत्तर शिक्षिका (भौतिकी)
रामजस स्कूल
आनंद पर्वत, नई दिल्ली

पी.के. मुखर्जी
रीडर
देशबंधु कॉलेज, कालकाजी, नई दिल्ली

पी.आर. तिवारी
स्नातकोत्तर शिक्षक (भौतिकी)
चिन्मय विद्यालय, वसंत विहार
नई दिल्ली

बी.बी. त्रिपाठी
निदेशक, इंस्टीट्यूट ऑफ टैक्नोलॉजी
गुरु घासीदास विश्वविद्यालय
बिलासपुर, छत्तीसगढ़

डी.पी. तिवारी
प्रोफेसर, भौतिकी विभाग
इंडियन इंस्टीट्यूट ऑफ टैक्नोलॉजी
दिल्ली

एस.एस. कुशवाहा
प्रोफेसर
भौतिकी विभाग
बनारस हिंदू विश्वविद्यालय
वाराणसी, उत्तर प्रदेश

एम.के. गांधी
स्नातकोत्तर शिक्षक (भौतिकी)
दिल्ली पब्लिक स्कूल
गाजियाबाद, उत्तर प्रदेश

जे.पी. अग्रवाल
प्राचार्य (अवकाशप्राप्त)
शिक्षा निदेशालय
राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग

वी.पी. श्रीवास्तव, *रीडर*
गगन गुप्त, *रीडर*
बी.के. शर्मा, *प्रोफेसर* (**समन्वयक**)

हिंदी रूपांतर

एस.एस. कुशवाहा एम.के. गांधी
जे.पी. अग्रवाल

हिंदी रूपांतर के संपादक

आर.एम.पी. जायसवाल
प्रोफेसर (अवकाशप्राप्त)
भौतिकी विभाग
कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय
कुरुक्षेत्र, हरियाणा

जे.पी. अग्रवाल
प्राचार्य (अवकाशप्राप्त)

बी.के. शर्मा
प्रोफेसर

भाग 1 के लिए विषय सूची

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह -

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे,

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे,

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे,

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे,

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों,

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे,

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे,

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे,

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे, और

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊंचाइयों को छू सके।

विषयसूची

अध्याय 11

गैसों का अणुगति सिद्धांत

अध्याय 12

ऊष्मागतिकी

अध्याय 13

ऊष्मा स्थानांतरण

अध्याय 14

दोलन

अध्याय 15

तरंगें

मुख्य आवरण अभिकल्पना

आनंद डी. घईसास
होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र
(टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च, मुंबई)
(नोबेल फाउंडेशन की शासकीय
वेबसाइट से रूपांतरित)

"लेसर किरणपुंजों और चुंबकीय क्षेत्रों के उचित विन्यासों के नियोजन द्वारा परमाणुओं को प्रगृहीत और ठंडा किया जा सकता है। इन प्रविधियों ने 1995 में किसी अतिशीतित क्षारिक परमाणुओं की तनु गैस द्रव्य की एक नई अवस्था - बोस आइंस्टीन द्राव (Bose Einstein Condensate - BEC) के सर्जन का मार्गदर्शन किया। किसी BEC में परमाणु समुदाय का अधिकांश भाग निम्नतम ऊर्जा अवस्था में होता है : मुख्य आवरण की तली में दाईं ओर दिए गए आंतरिक चित्र में परमाणुओं के वेग वितरण में उच्च शिखरों का अवलोकन कीजिए। इसके ऊपर 'परमाणु-लेसर'–संसक्त द्रव्य के स्पंद का निदर्शन है।"

अध्याय 8

गुरुत्व

8.1 भूमिका : भूकेंद्री मॉडल

किसी अंधेरी रात में स्वच्छ आकाश की ओर दृष्टि डालिए । ऐसा प्रतीत होता है कि ग्रह और तारे एक विशाल अर्धगोलीय पृष्ठ (जिसे खगोल कहते हैं) के भीतर चिपका दिए गए हों । खगोल पूर्व से पश्चिम की ओर दिन में एक बार घूर्णन करता प्रतीत होता है । रत्नजड़ित प्रतीत होने वाले आकाश के इस विस्मय ने सभी प्राचीन सभ्यताओं को आकर्षित किया । ज्यों-ज्यों हमारे पूर्वजों ने रात-रात भर आकाश का प्रेक्षण किया, उन्होंने आकाश में तारों के पैटर्न को नोट करना आरंभ कर दिया । तारे "स्थिर" थे, ऐसा प्रतीत होता था कि मनुष्य के जीवन काल में वे एक दूसरे के सापेक्ष अपनी स्थिति नहीं बदलते थे । यद्यपि ग्रह ऐसा करते थे, ऐसा कुछ सप्ताह तक ग्रहों की गतिविधि के अध्ययन से स्पष्ट हो गया था । तारों के उस समूह को, जो पशुओं या घरेलू वस्तुओं जैसी जानी-पहचानी आकृति बनाते प्रतीत होते हैं, तारामंडल कहते हैं । प्रेक्षणों द्वारा यह भी ज्ञात हुआ कि कुछ तारामंडल वर्ष भर में कुछ विशेष ऋतुओं में ही दृष्टिगोचर होते हैं । इस प्रकार पैटर्नों तथा आवर्तिताओं की खोज हुई । आधुनिक विज्ञान की जड़ें रात्रि के आकाश के अध्ययन में निहित हैं ।

तारामंडलों का मानचित्रण आज से लगभग 4000 वर्ष पूर्व अनेक प्राचीन सभ्यताओं द्वारा किया गया था । ईसा के लगभग 100 वर्ष बाद टॉलमी ने एक पुस्तक लिखी थी । *एल्मागेस्ट* (Almagest) नामक इस पुस्तक में उन्होंने ग्रहीय गति के ज्यामितीय सिद्धांत को प्रतिपादित किया था । जिसके अनुसार सूर्य सहित सभी तारे पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं । ग्रह छोटे वृत्तों में पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं, जिन्हें एपीसाइकिल (epicycle-अधिचक्र) कहते हैं । इन अधिचक्रों के केंद्र पृथ्वी की परिक्रमा अपेक्षाकृत बड़े वृत्तों में करते हैं, जिन्हें डेफेरेंट (deferent-विनिय) कहते हैं । भारतीय खगोलज्ञों ने भी इसी के समान भूकेंद्री (पृथ्वी केंद्र में) सिद्धांत को आगे बढ़ाया । इसकी चर्चा आर्यभट्ट ने (5वीं शताब्दी में) अपनी पुस्तक *आर्यभाटीय* में की है । इस पुस्तक में एपीसाइकिल को *अधिचक्र* तथा डेफेरेंट को *विनिय* कहा गया है । इस पुस्तक को यह श्रेय जाता है कि त्रिज्याओं तथा वेगों के समुचित चुनाव के साथ एपीसाइकिल मॉडल द्वारा ग्रहीय तथा तारकीय पैटर्नों की यथार्थ भविष्यवाणी की जा सकती थी ।

आर्यभाटीय में सूर्यकेंद्री मॉडल का वर्णन भी किया गया है, जिसमें पृथ्वी उत्तर-दक्षिण अक्ष के परित: एक दिन में एक घूर्णन करती है तथा सूर्य के चारों ओर एक वृत्तीय कक्षा में एक वर्ष में एक परिक्रमा करती है । एक हजार वर्ष के पश्चात् सन् 1543 में पोलैंड के एक संन्यासी निकोलस कोपरनिकस

(1473-1543) ने यह बताया कि सभी ग्रह सूर्य, जो स्थिर माना गया है, के परित: पूर्ण वृत्तों में गति करते हैं । इटली के वैज्ञानिक गैलीलियो (1564-1642) ने इस मॉडल का अनुमोदन किया । चूंकि यह मॉडल उस समय की प्रचलित मान्यताओं के विपरीत था, अत: गैलीलियो को अपने मॉडल को जनता के समक्ष वापस लेने के लिए विवश किया गया । यद्यपि व्यक्तिगत रूप में गैलीलियो यही मानते रहे कि पृथ्वी गति करती है । इटली में कहावत है 'ए पुर सि मूव' (E pur si muove) जिसका आशय है कि यह अभी भी गतिमान है ("And still it moves") । ऐसा कहा जाता है कि ये शब्द गैलीलियो ने रुक-रुक कर न्यायाधीशों एवं जनता के सामने फुसफुसाए थे । इस प्रकार विज्ञान के साहित्य में वे अमर हो गए ।

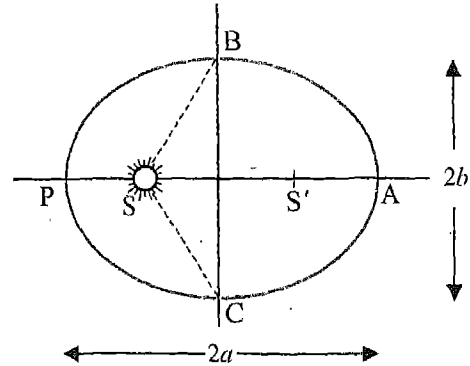
16वीं शताब्दी में सूर्यकेंद्री सिद्धांत (heliocentric theory) को अनेक विचारशील लोगों ने संदेह की दृष्टि से देखा । उनके द्वारा उठाई गई आपत्तियों में से कुछ अधिक वैज्ञानिक आपत्तियां इस प्रकार हैं :

(i) यदि पृथ्वी घूर्णन करती ही है तो पिण्ड उसके पृष्ठ से बाहर क्यों नहीं फेंक दिए जाते । परंतु ऐसा क्यों नहीं होता, इसकी चर्चा खण्ड 8.5 में की गई है ।

(ii) रेलगाड़ी में यात्रा करते समय आपने देखा होगा कि पास के पिण्ड बड़ी तेजी से ओझल हो जाते हैं जबकि दूर के पिण्ड "स्थिर" लगते हैं । दूरस्थ स्थिर पृष्ठभूमि के पिण्डों के सापेक्ष समीपस्थ पिण्डों में प्रतीत होने वाली इस सापेक्ष गति को **लंबन** (parallax) कहते हैं, चूंकि पृथ्वी सूर्य के परित: घूमती है, इसलिए हम दूरस्थ तारों के सापेक्ष समीपस्थ तारों में लंबन देख सकते हैं । तथापि इस प्रकार की सापेक्ष गति अथवा लंबन तारों के बीच नहीं देखा गया । बहुत समय के पश्चात्, 1838 में बेसेल ने इस लंबन को एक शक्तिशाली दूरदर्शक से मापा । पश्चदृष्टि से अब हम जानते हैं कि अनुमानित लंबन होता तो है परंतु तारों की हमसे अत्यधिक दूरियां होने के कारण इसका मान बहुत कम होता है ।

8.2 सूर्यकेंद्री मॉडल : केप्लर के नियम

डेनमार्क और स्वीडन के मध्य एक टापू है जिसका नाम वेन (Hven) है । यहीं पर एक कुलीन पुरुष टायको ब्रेह (Tycho Brahe, 1546-1601) ने लगभग 1576 में एक खगोलीय वेधशाला बनाई । 20 वर्षों से भी अधिक अवधि तक उन्होंने रात-रात भर सालों साल आकाश का निरन्तर प्रेक्षण किया । ये दीर्घकालीन एवं सतत् प्रेक्षण यथार्थता की उस सीमा के बहुत पास थे जिसे हम अपनी नंगी आंखों से सीधे देख सकते हैं । इसके बाद इन प्रेक्षणों का उपयोग नाविकों ने शताब्दियों तक किया । ब्रेह को अब तक का सर्वश्रेष्ठ व्यावहारिक खगोलज्ञ माना जाता है । तथापि ब्रेह ने भूकेंद्री विचार को ही मान्यता दी । कुछ समय पश्चात् ही दूरदर्शक के आविष्कार ने ब्रेह के प्रेक्षणों को अप्रयुक्त बना दिया । 1609 में गैलीलियो ने एक दूरदर्शक बनाया तथा बृहस्पति का प्रेक्षण किया । इनकी खोज ने विज्ञान की धारा को सदैव के लिए मोड़ दिया । यह एक उदाहरण है जिससे पता चलता है कि प्रौद्योगिकी ने किस प्रकार से विज्ञान को आगे बढ़ाने में सहायता पहुंचाई है । यह प्रतीकात्मक, परस्पर लाभप्रद, यदा-कदा असहज विज्ञान और प्रौद्योगिकी के बीच का संबंध आज तक निरंतर चल रहा है ।

विज्ञान के लिए यह एक सौभाग्य की बात है कि ब्रेह के सहायक जोहान्नेस केप्लर (Johannes Kepler 1571-1630) की सोच सूर्यकेंद्री मॉडल के पक्ष में थी । उन्होंने मंगल ग्रह की गति से संबंधित ब्रेह द्वारा अति सावधानीपूर्वक एकत्रित आंकड़ों का अध्ययन किया तथा कई आश्चर्यजनक निष्कर्ष निकाले । वह मंगल की कक्षा के लिए अंकित किए गए बिंदुओं से होकर जाने वाले वृत्त को खींचने में असफल रहे । केप्लर ने इन प्रेक्षणों पर विश्वास करना उचित समझा और कोपरनिकस द्वारा सुझाई गई वृत्तीय कक्षाओं को नकार दिया । वह गणितज्ञों द्वारा अध्ययन किए जा चुके बंद वक्र (दीर्घवृत्त) से परिचित थे (चित्र 8.1 देखिए) ।

चित्र 8.1 एक दीर्घवृत्त जिसका दीर्घ अक्ष 2a(PA) तथा लघु अक्ष 2b(BC) है । कोई ग्रह सूर्य के परित: किसी दीर्घवृत्तीय कक्षा में गति करता है । दो बिंदु S व S' दीर्घवृत्त की दो नाभियां हैं । सूर्य किसी एक नाभि (मान लीजिए S) पर अवस्थित है । कक्षा के बिंदु P व A को क्रमश: उपसौर व अपसौर कहते हैं जो इन बिंदुओं की सूर्य से क्रमश: न्यूनतम व अधिकतम दूरियों को निरूपित करते हैं । एक विशेष प्रकरण $a = b$ किसी वृत्त को निरूपित करता है ।

यह केप्लर के प्रथम नियम का आधार बना ।

(1) सूर्य के सापेक्ष किसी ग्रह की कक्षा एक समतल में होती है जिसमें सूर्य स्थित होता है । यह कक्षा दीर्घवृत्त है और सूर्य इसकी दो नाभियों में से किसी एक पर स्थित होता है । इसे **कक्षाओं का नियम** कहते हैं ।

वृत्त किसी दीर्घवृत्त का एक विशेष प्रकरण होता है ।

केप्लर ने यह पाया कि मंगल ग्रह अपनी कक्षा में एक ही चाल से गति नहीं करता । सूर्य के निकट पहुंचने पर यह तेजी से चलने लगता है और दूरस्थ जाने पर इसकी गति सबसे कम हो जाती है । इससे केप्लर के दूसरे नियम की उत्पत्ति हुई।

(2) सूर्य से ग्रह को मिलाने वाला त्रिज्या सदिश समान समय अंतरालों में समान क्षेत्रफल तय करता है । इसे क्षेत्रफलों का नियम कहते हैं ।

पहले दो नियम 1609 में प्रस्तुत किए गए थे, यह वही वर्ष था जिसमें गैलीलियो ने दूरदर्शक की सहायता से रात्रि में आकाश का अध्ययन किया था । केप्लर का तीसरा नियम जो निम्नलिखित है, वर्षों के श्रमसाधित प्रयासों द्वारा सन् 1619 में प्रतिपादित हो सका ।

(3) किसी ग्रह के परिक्रमण आवर्तकाल T का वर्ग इसकी कक्षा के अर्धदीर्घ अक्ष a के घन के अनुक्रमानुपाती होता है,

$$T^2 \propto a^3$$

बुध, शुक्र तथा पृथ्वी जैसे ग्रहों जिनकी कक्षाएं लगभग वृत्तीय हैं, की कक्षाओं के अर्धदीर्घ अक्ष, अर्धलघु अक्ष तथा त्रिज्या R समान होते हैं । तब,

$$T^2 \propto R^3 \qquad (8.1)$$

तृतीय नियम को हार्मोनिक नियम अथवा आवर्तकालों का नियम कहते हैं । किन्हीं जटिल प्रेक्षणों से पैटर्नों को खोजने का अभ्यास तथा फिर स्पष्ट रूप से उनको प्रतिपादित करना ही विज्ञान का मर्म है । तीनों नियमों को कूटबद्ध करने में केप्लर को बीस वर्ष लग गए । परंतु यदि हम संपूर्ण घटनाक्रम को संकुचित दृष्टिकोण रखते हुए देखें तो यह पाते हैं कि जिन आंकड़ों को इन्होंने आधार माना उनके विश्लेषण से ब्रेह के परिणाम पाने में इन्हें बीस वर्ष लग गए । मोटे तौर पर बुनियादी आंकड़ों का विस्तार समग्र प्राचीन काल तक है । केप्लर को विज्ञान के इतिहास में एक निर्भीक चिंतक के रूप में जाना जाता है ।

जोहान्नेम केप्लर (1571-1630) जर्मन मूल के एक वैज्ञानिक थे । इन्होंने टायको ब्रेह तथा सहयोगियों के श्रमसाधित प्रेक्षणों पर आधारित ग्रहीय गति संबंधी तीन नियमों को प्रतिपादित किया । केप्लर स्वयं ब्रेह के एक सहयोगी थे । इन्हें ग्रह गति के तीन नियमों के प्रतिपादन में बीस वर्ष लग गए । इन्हें ज्यामितीय प्रकाशिकी का जनक भी माना जाता है क्योंकि यह पहले वैज्ञानिक थे जिन्होंने यह खोजा कि किसी दूरदर्शक में प्रवेश करने के पश्चात् प्रकाश का क्या होता है ।

▶ *उदाहरण 8.1* कल्पना कीजिए कि टायको ब्रेह तथा उनके सहयोगियों ने 20 वर्षों तक स्वच्छ रात्रि में मंगल के 100 प्रेक्षण लिए । उस कुल डाटा बेस (बुनियादी आंकड़ों) का आंकलन कीजिए जिससे केप्लर ने अपने नियम प्रतिपादित किए । इसकी मानव जीनोम (genome) योजना के डाटा बेस से तुलना कीजिए ।

हल कल्पना कीजिए कि स्वच्छ रात्रि मात्र आधे समय के लिए ही उपलब्ध रही । इसलिए मंगल से संबंधित डाटा बेस D_m का मान इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$D_m = 100 \times \frac{365}{2} \times 20$$

$$= 3.65 \times 10^5$$

मानव जीनोम योजना 1989 में नोबल पुरस्कार विजेता जेम्स वाटसन ने आरंभ की थी । उसमें 3×10^9 (तीन अरब आधार जोड़ों के) डाटाबेस का उपयोग हुआ था । यह D_m की तुलना में चार के परिमाण कोटि अधिक है (अर्थात् $= 10^4 D_m$ है) । दस वर्ष की इस योजना की अवधि में अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर सैकड़ों वैज्ञानिकों के श्रमसाधित सहयोग एवं सुपरसंगणकों द्वारा प्रदत्त सुविधा से लगभग 30,000 मानव जीन पहचाने गए हैं । इसकी तुलना में केप्लर ने मात्र बीस वर्ष में लगभग अकेले ही टायको ब्रेह के आंकड़ों को मात्र तीन सारगर्भित नियमों में कूटबद्ध कर दिया । यह हम आप पर छोड़ते हैं कि आप इन तथ्यों पर चिन्तन करें । ◀

8.3 न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण नियम

एक दंत कथा के अनुसार, एक गिरता हुआ सेव गुरुत्वाकर्षण के नियम की खोज का प्रेरणा स्रोत बना । केप्लर को जड़त्व के गुण का ज्ञान नहीं था । इसके विपरीत न्यूटन जड़त्व के गुण से परिचित थे । इसके अतिरिक्त वे केप्लर के कार्य से भी परिचित थे । उन्होंने यह अनुभव किया कि उनके सिर पर गिरने वाला सेव तथा व्योमस्थ चंद्रमा दोनों ऐसे पिण्ड हैं जिन पर बल कार्य करते हैं । पहले में गिरते समय सेव की चाल बढ़ती पाई गई और दूसरे में चंद्रमा को पृथ्वी के परितः वृत्तीय कक्षा में (सरल रेखा में नहीं) परिक्रमण करते देखा गया । यद्यपि ये दोनों परिघटनाएं एक दूसरे से अत्यन्त भिन्न प्रतीत होती हैं (एक पार्थिव तथा दूसरी खगोलीय) तथापि न्यूटन ने अपनी वृहत अंतर्दृष्टि द्वारा यह पहचान लिया था कि इन दोनों परिघटनाओं के लिए एक जैसा बल (**गुरुत्वीय बल**) उत्तरदायी है । उन्होंने अनुमान लगाया कि यह बल जो कि पृथ्वी द्वारा किसी वस्तु पर उत्पादित होता है, वस्तु की पृथ्वी के केंद्र से दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है । न्यूटन के तर्कों की उन पदों में जिनसे हम परिचित हैं, पुनर्रचना करते हैं । सेव के त्वरण a_a को हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$a_a = g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

चंद्रमा पृथ्वी के केंद्र के परितः R त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में एकसमान चाल v से परिभ्रमण करता है । इसलिए उसका अभिकेंद्री त्वरण

$$a_m = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad (8.2)$$

यहां T चंद्रमा के परिभ्रमण का आवर्तकाल है ($v = 2\pi R/T$) । इस प्रकार

$$\frac{a_a}{a_m} = \frac{gT^2}{4\pi^2 R} \qquad (8.3)$$

सेव पृथ्वी के केंद्र से R_E दूरी पर है, यहां R_E पृथ्वी की त्रिज्या है । पूर्व कथनानुसार व्युत्क्रम वर्ग नियम पर निर्भरता मानते हुए

$$\frac{a_a}{a_m} = \frac{R_E^2}{R^2} \qquad (8.4)$$

उस समय यह पता था $R/R_E \approx 60$ । इस प्रकार, समीकरणों (8.3) तथा (8.4) का उपयोग करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है,

$$\frac{a_a}{a_m} = \frac{1}{(60)^2}$$

$$= \frac{gT^2}{4\pi^2 R}$$

न्यूटन के समय में पृथ्वी से चंद्रमा की दूरी R का ज्ञात मान 3.84×10^8m था । इस प्रकार,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R}{60^2 g}$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times 3.14 \times 3.84 \times 10^8}{60 \times 60 \times 9.81} \text{ s}^2$$

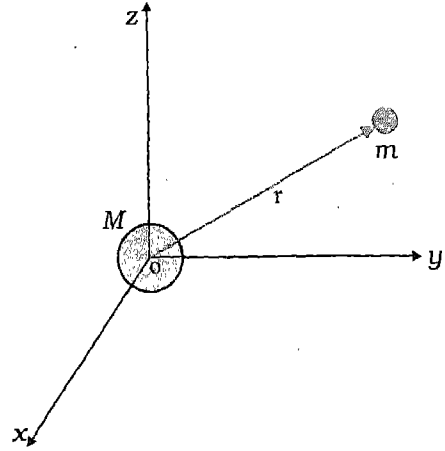
$\therefore T = 27.3$ दिन

यह चंद्रमा के परिक्रमण के आवर्तकाल का मान है* । एक पूर्णमासी से दूसरी पूर्णमासी के बीच का समय अंतराल जैसा कि पृथ्वी से देखने पर पता चलता है, अपेक्षाकृत अधिक यानी 29.5 दिन है । उपर्युक्त अभ्यास निश्चित रूप से व्युत्क्रम वर्ग नियम की पुष्टि करता है । इसे न्यूटन का **चंद्र परीक्षण** (**मून टेस्ट**) कहते हैं । इससे न्यूटन को यह विश्वास हो गया था, कि व्युत्क्रम वर्ग नियम एकल प्रयास में ही खगोलीय व पार्थिव वस्तुओं की गति की व्याख्या कर सकता है । अपनी पुस्तक **दि मैथेमैटिकल प्रिंसिपल्स ऑफ नेचुरल फिलॉसफी** (संक्षेप में प्रिंसीपिया) जिसे पूरे विश्व ने ग्रंथरत्न के रूप में सम्मानित किया है, में न्यूटन ने गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम का प्रतिपादन किया है :

"*इस विश्व में प्रत्येक कण हर दूसरे कण को एक बल से आकर्षित करता है जो उनके द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है*"

इसे हम गणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं (चित्र 8.2 देखिए) ।

$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad (8.5)$$

यहां F, r दूरी पर स्थित दो द्रव्यमानों M व m के मध्य लगने वाले आकर्षण बल के परिमाण को व्यक्त करता है । G एक

चित्र 8.2 कोई द्रव्यमान M हमारे निर्देशांक निकाय के मूल बिंदु पर स्थित है । यह दूसरे द्रव्यमान m से $\mathbf{r}$ दूरी पर है ।

सार्वत्रिक नियतांक है जिसे गुरुत्वीय नियतांक कहते हैं तथा S.I. मात्रकों में इसका मान $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} है । इसकी विमा [$M^{-1}L^3T^{-2}$] है । सदिश संकेत पद्धति में द्रव्यमान m पर M के कारण लगने वाला आकर्षक बल

$$\mathbf{F}_{mM} = \frac{-GMm\,\mathbf{r}}{r^3} \qquad (8.6)$$

यहां $\mathbf{r}$ द्रव्यमान m का स्थान सदिश है जबकि द्रव्यमान M मूल बिंदु पर केंद्रित है । द्रव्यमान m के कारण M पर कार्य करने वाला बल निम्नलिखित होगा :

$$\mathbf{F}_{mM} = \frac{GMm\,\mathbf{r}}{r^3} \qquad (8.7)$$

गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम न्यूटन के तृतीय नियम के समनुरूप है, अर्थात्

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

$\mathbf{F}_{12}$ पिण्ड 2 के कारण पिण्ड 1 पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल है तथा $\mathbf{F}_{21}$ पिण्ड 2 पर पिण्ड 1 के कारण लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल है ।

गुरुत्वाकर्षण बल के विषय में निम्नलिखित बिंदुओं पर ध्यान देना आवश्यक है :

(i) गुरुत्वाकर्षण बल पिण्डों के मध्य उपस्थित माध्यम पर निर्भर नहीं करता है । इसका अभिप्राय यह है कि दो द्रव्यमानों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल सदैव वही रहता है चाहे पिण्ड वायु में, निर्वात में, जल में स्थित हों अथवा उनके बीच ईंटों की दीवार ही क्यों न हो ।

(ii) यद्यपि दो पिण्डों के मध्य पारस्परिक गुरुत्वाकर्षण के कारण त्वरण, चूंकि विपरीत दिशाओं में होते हैं, इसलिए यह आवश्यक नहीं कि उनके परिमाण बराबर हों । पृथ्वी 10,000 kg द्रव्यमान के मुक्त रूप से गिरते किसी शिलाखण्ड

* यह अक्षीय घूर्णन का आवर्तकाल भी है ।

को 9.81 m s^{-2} के त्वरण, तथा 9.81×10^4 N बल से आकर्षित करती है । गिरता हुआ शिलाखण्ड भी पृथ्वी को 9.81×10^4 N बल से ही अपनी ओर आकर्षित करता है । चूंकि पृथ्वी का द्रव्यमान अत्यधिक ($M_E = 5.98 \times 10^{24}$ kg) है, इसलिए इसमें उत्पन्न त्वरण 1.64×10^{-20} m s^{-2} होगा, जो शिलाखण्ड के त्वरण की तुलना में नगण्य है ।

(iii) गुरुत्वाकर्षण का नियम (समीकरण 8.5) मात्र बिंदु द्रव्यमानों के लिए सही है । यदि पिण्डों का आकार बड़ा हो तो क्या होगा ? यदि दो पिण्डों के बीच की दूरी अधिक हो, अर्थात् उनके मध्य की दूरी पिण्डों के आकार की तुलना में अधिक है, तो सन्निकटन के रूप में समीकरण (8.5) में r को द्रव्यमानों के केंद्रों के बीच की दूरी के रूप में लिया जा सकता है ।

(iv) गोलीय सममित वस्तु के लिए बाहर स्थित किसी पिण्ड पर बल ऐसे कार्य करता है मानो उस पिण्ड का संपूर्ण द्रव्यमान उसके केंद्र पर संकेंद्रित हो । न्यूटन ने इस महत्त्वपूर्ण कथन को अपनी पुस्तक 'प्रिंसीपिया' (बॉक्स 8.2 व परिशिष्ट देखिए) में सिद्ध किया है । इस तथ्य का उपभोग समीकरण 8.4 में किया जा चुका है जहां हमने व्युत्क्रम वर्ग नियम की पृष्ठभूमि में निहित प्रेरणा का उल्लेख किया है ।

(v) दो बिंदु पिण्डों के मध्य लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल केंद्रीय बल का एक उदाहरण है । इस बल में कोणीय निर्भरता निहित नहीं होती, बल्कि बल का परिमाण $|\mathbf{r}|$ पर निर्भर करता है । इसे हम इस प्रकार भी कह सकते हैं कि गुरुत्वाकर्षण बल में गोलीय सममित का गुण होता है ।

(vi) गुरुत्वाकर्षण बल संरक्षी बल होता है । हम इस कथन का परीक्षण तथा विवरण खण्ड 8.6 में प्रस्तुत करेंगे ।

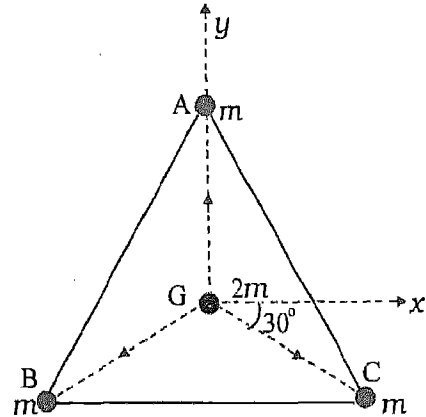
(vii) यदि कई द्रव्यमानों $M_1, M_2, \ldots\ldots M_n$ आदि के कारण किसी कण m पर लगने वाले परिणामी गुरुत्वीय बल को ज्ञात करना चाहते हैं, तो अध्यारोपण के सिद्धांत का उपयोग करते हैं । कल्पना कीजिए कि गुरुत्वाकर्षण के नियम पर आधारित $M_1, M_2, \ldots\ldots M_n$ में से प्रत्येक के कारण लगने वाले पृथक बल क्रमशः $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots\ldots \mathbf{F}_n$ हैं । अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, प्रत्येक बल स्वतंत्र रूप से कार्य करता है तथा अन्य पिण्डों से अप्रभावित रहता है । अतः परिणामी $\mathbf{F}_R$ का मान बल सदिशों के योग के नियम से ज्ञात कर लेते हैं । इस कथन को निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं,

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots\ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

यहां प्रतीक Σ योग को व्यक्त करता है । यह कथन कि प्रत्येक बल स्वतंत्रतापूर्वक कार्य करता है तथा अन्य पिण्डों से प्रभावित नहीं होता, **अध्यारोपण का सिद्धांत** कहलाता है ।

(viii) अंत में हमें गुरुत्वाकर्षण के नियम के एकीकरण की प्रकृति के महत्त्व पर ध्यान देना चाहिए । यह छोटे पार्थिव पिण्डों, सौरमण्डल के ग्रहों, मंदाकिनियों, अर्थात् कणों से लेकर पल्सर* तक के आकार के सभी पिण्डों पर लागू होता है !

> *उदाहरण 8.2* किसी समबाहु त्रिभुज ABC के प्रत्येक शीर्ष पर m kg के तीन समान द्रव्यमान रखे हैं
>
> (a) त्रिभुज के केंद्रक G पर रखे $2m$ द्रव्यमान पर, कितना बल लग रहा है ?
>
> (b) यदि शीर्ष A के द्रव्यमान को दो गुना कर दिया जाए, तो कितना बल लगेगा ?
>
> (मान लीजिए कि AG = BG = CG = 1m. चित्र 8.3 देखिए)

हल (a) चित्र 8.3 में दिखाए गए अनुसार हम अक्षों को चुनते हैं । GC तथा धनात्मक x-अक्ष के बीच का कोण 30° है, और इतना ही कोण GB तथा ऋणात्मक x-अक्ष के मध्य बनता है । सदिश

चित्र 8.3 तीन समान द्रव्यमान किसी समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर स्थित हैं । $2m$ का द्रव्यमान केंद्रक G पर है ।

संकेतन पद्धति से पृथक-पृथक बल निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात किए जाएंगे

$$\mathbf{F}_{GA} = \frac{Gm(2m)}{l^2}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}_{GB} = \frac{Gm(2m)}{l^2}\left(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30° - \hat{\mathbf{j}}\sin 30°\right)$$

$$\mathbf{F}_{GC} = \frac{Gm(2m)}{l^2}\left(+\hat{\mathbf{i}}\cos 30° - \hat{\mathbf{j}}\sin 30°\right)$$

अध्यारोपण सिद्धांत तथा सदिशों के योग के नियम से $2m$ द्रव्यमान पर लगने वाले परिणामी गुरुत्वीय बल $\mathbf{F}_R$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{AG} + \mathbf{F}_{BG} + \mathbf{F}_{CG}$$

* जबकि गुरुत्वाकर्षण सार्वत्रिक है, न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का नियम कुछ प्रभाव क्षेत्रों में, जैसे अत्यधिक संकुचित सघन पिण्डों में तथा विश्व में अनेक उग्र परिघटनाओं में परिमार्जित हो जाता है ।

$$\mathbf{F}_R = 2Gm^2\hat{\mathbf{j}} + 2Gm^2(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30° - \hat{\mathbf{j}}\sin 30°)$$
$$+ 2Gm^2(\hat{\mathbf{i}}\cos 30° - \hat{\mathbf{j}}\sin 30°) = 0$$

विकल्प के रूप में, थोड़ी सोच के बाद यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि सममित के आधार पर परिणामी बल शून्य होना चाहिए ।

(b) सममित से बल के x-घटक निरस्त हो जाते हैं । केवल y-घटक शेष बचते हैं,

$$\mathbf{F}_R = 4Gm^2\hat{\mathbf{j}} - 2Gm^2\hat{\mathbf{j}} = 2Gm^2\hat{\mathbf{j}}$$

सूर्य S के परितः ग्रह P पर आरोपित बल-आघूर्ण सर्वसम रूप से शून्य होता है,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$= \mathbf{r} \times \left(\frac{-GM_s m_p}{r^3} \right) \mathbf{r} = 0 \text{ (समीकरण 8.6 देखिए)}$$

यहां M_s और m_p क्रमशः सूर्य व ग्रह के द्रव्यमान हैं । उपरोक्त पद में हमने क्रास गुणनफल के गुणधर्म का उपयोग किया है

न्यूटन का प्रिंसीपिया

केप्लर ने अपने तृतीय नियम का प्रतिपादन 1619 में किया था । गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम की घोषणा लगभग 70 वर्ष बाद 1687 में तब हुई जब न्यूटन ने अपने ग्रंथ **फिलॉसॉफी नेचरलिस प्रिंसीपिया मैथेमैटिका** (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) जिसे प्रायः **प्रिंसीपिया** (Principia) कहते हैं, में इसे प्रकाशित किया ।

1684 के आसपास एडमण्ड हैली (जिनके नाम के कारण प्रसिद्ध हैली धूमकेतु का नामकरण हुआ) न्यूटन से मिलने कैम्ब्रिज आए [illegible] व्युत्क्रम वर्ग नियम के अंतर्गत गतिमान किसी पिण्ड के प्रक्षेप-पथ की प्रकृति क्या होगी ? न्यूटन ने बिना झिझके उत्तर दिया [illegible] । वास्तव में यह निष्कर्ष उन्होंने बहुत पहले (1665 में) उस समय निकाल लिया था जब प्लेग फैलने के कारण [illegible] वह कैम्ब्रिज से अपने फार्महाउस विश्राम के लिए चले गए थे । दुर्भाग्यवश, न्यूटन से वह पेपर खो गए थे जिन पर [illegible] था । परन्तु हैली ने न्यूटन को इस बात के लिए सहमत कर लिया कि वह अपने काम को पुस्तक के रूप में प्रकाशित करें और प्रकाशन का खर्च वह (हैली) स्वयं वहन करेंगे । न्यूटन ने अपने अलौकिक प्रयास से इस साहसिक कार्य को 18 महीनों में पूरा कर लिया । प्रिंसीपिया अनुपम वैज्ञानिक कीर्तिस्तम्भ है और लैग्रेंज के शब्दों में "यह मानव मस्तिष्क की सर्वश्रेष्ठ उपज है" । भारत में जन्मे खगोल भौतिकविद् तथा नोबेल पुरस्कार से सम्मानित एस. चन्द्रशेखर ने 'प्रिंसीपिया' पर ग्रंथ लिखने में 10 वर्ष का समय लगाया । उनकी पुस्तक "[illegible] प्रिंसीपिया" में न्यूटन की विधियों में निहित सौंदर्य, स्पष्टता तथा विस्मयकारी मितव्ययता शैली की ओर ध्यान [illegible] गया है । इसका एक उदाहरण हम परिशिष्ट में देखेंगे ।

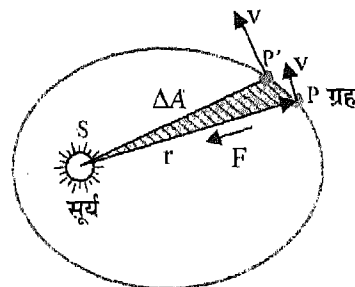
8.4 केप्लर की समस्या : केप्लर के नियमों की व्युत्पत्ति

न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम से केप्लर के तीनों नियमों की व्युत्पत्ति को *केप्लर की समस्या* कहते हैं । हम केप्लर की समस्या को कम से कम आंशिक रूप से सरलीकृत धारणाओं की सहायता से प्रस्तुत करेंगे। सूर्य ग्रहों की अपेक्षा बहुत भारी है तथा इसे हम अपने स्थान पर स्थिर मानेंगे।

केप्लर का प्रथम नियम

यह दर्शाया जा सकता है कि किसी भारी पिण्ड के गुरुत्वीय प्रभाव के अंतर्गत गतिमान अपेक्षाकृत किसी हल्के पिण्ड की कक्षा एक वृत्त, दीर्घवृत्त, परवलय अथवा अतिपरवलय होती है । यह आकृति प्रारंभिक अवस्था पर निर्भर करती है । एक सरल रेखा वास्तव में एक अन्य संभावित आकृति है जिससे हमारा सामना दैनिक अनुभवों में होता रहता है (उदाहरणार्थ, न्यूटन के सिर पर गिरता हुआ सेव) । प्रथम नियम की व्युत्पत्ति के लिए अवकलन एवं ज्यामिति की आवश्यकता होती है जिसे हम यहां प्रस्तुत नहीं करेंगे ।

केप्लर का द्वितीय नियम

केप्लर के दूसरे नियम का संबंध कोणीय संवेग संरक्षण से है जिसका विवरण अध्याय 7 में दिया जा चुका है । तथापि पूर्णता की दृष्टि से इसकी उपपत्ति को हम सारांश रूप में प्रस्तुत कर रहे हैं । चित्र 8.4 में सूर्य दीर्घवृत्त की एक नाभि पर स्थित है ।

चित्र 8.4 ग्रह P पर सूर्य (S) की ओर बल $\mathbf{F}$ कार्य कर रहा है । ग्रह दीर्घवृत्तीय कक्षा में गतिमान है तथा छायांकित भाग उस क्षेत्रफल ΔA को व्यक्त करता है जो ग्रह छोटे समय अंतराल Δt में तय करता है । क्षेत्रफल ΔA, $\mathbf{r}$ तथा PP' $(=\Delta\mathbf{r})$ से निर्मित त्रिभुज SPP' का क्षेत्रफल है ।

(अध्याय 4 देखिए) । कोणीय संवेग $\mathbf{L}$ का मान निम्नलिखित होगा :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$
$$= \mathbf{r} \times m_p \mathbf{v} \qquad (8.8)$$

चूंकि $\tau = \frac{dL}{dt}$ शून्य है, इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि कोणीय संवेग $\mathbf{L}$ एक नियतांक है क्योंकि इसकी दिशा तथा परिमाण दोनों नियत हैं ।

चूंकि $\mathbf{L}$ स्थिर है, अत: $\mathbf{r}$ तथा $\mathbf{v}$ उस समतल में स्थित हैं जो $\mathbf{L}$ के लंबवत् है । दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि ग्रह की कक्षा एक समतल में स्थित होती है और यह केप्लर के प्रथम नियम की आंशिक उपपत्ति है ।

क्षेत्रीय वेग की स्थिरता से संबंधित केप्लर का द्वितीय नियम कोणीय संवेग संरक्षण के नियम का ही एक परिणाम है । इसको हम निम्नलिखित ज्यामितीय तर्कों द्वारा भी प्राप्त कर सकते हैं । मान लीजिए कि त्रिज्या सदिश $\mathbf{r}$ किसी समय अंतराल Δt में ΔA क्षेत्रफल तय करता है । यह क्षेत्रफल $\frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{r}|$ है, यहां $\mathbf{PP}'=\Delta\mathbf{r}$ (चित्र 8.4) । चूंकि $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{v}\Delta t$, अत: समीकरण (8.8) से

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{r}|$$

$$= \frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}\Delta t| \qquad \text{(समीकरण 8.8 से)}$$

$$= \frac{\mathbf{L}\Delta t}{2m_p}$$

$$\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{L}}{2m_p} \qquad (8.9)$$

चूंकि $\mathbf{L}$ एक नियतांक है, अत: क्षेत्रीय वेग भी एक नियतांक ही होगा । अत: केल्पर का दूसरा नियम सिद्ध हो जाता है । यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि कोणीय संवेग का संरक्षण हर उस बल के लिए, मान लीजिए कि व्युत्क्रम घन ($1/r^3$), लागू होगा जो केंद्राभिमुखी हो अर्थात् यह बात किसी भी केंद्रीय बल के लिए लागू होती है । अत: केप्लर का दूसरा नियम उन अन्य समस्त बलों के लिए लागू होता है जिनसे हमारा सामना होना है । इनमें कमानी बल ($-k\mathbf{r}$) तथा कूलॉम का स्थिर-वैद्युत बल अति महत्त्वपूर्ण हैं ।

> *उदाहरण 8.3* : चित्र 8.1 में दर्शाए गए अनुसार उपसौर P पर ग्रह की चाल v_p है तथा सूर्य-ग्रह के बीच की दूरी $SP = r_p$ है । उपसौर P पर $\{r_p, v_p\}$ तथा अपसौर A पर इनके संगत राशियों $\{r_A, v_A\}$ के मध्य संबंध ज्ञात कीजिए । क्या BAC तथा CPB को तय करने में ग्रह को समान समय लगेगा ?

हल P पर कोणीय संवेग का परिमाण $L_P = m_p r_p v_p$, चूंकि निरीक्षण से पता चलता है कि $\mathbf{r}_p$ तथा $\mathbf{v}_p$ परस्पर लंबवत् हैं । इसी प्रकार $L_A = m_p r_A v_A$ । कोणीय संवेग के संरक्षण के नियम से,

$$m_p r_p v_p = m_p r_A v_A$$

अथवा $\dfrac{v_p}{v_A} = \dfrac{r_A}{r_p}$

चूंकि $r_A > r_p$, $v_p > v_A$

त्रिज्या सदिशों SB व SC तथा दीर्घवृत्त से घिरा क्षेत्रफल SBAC (चित्र 8.1) SBPC के क्षेत्रफल से अधिक है । केप्लर के दूसरे नियम के अनुसार समान समयों में समान क्षेत्रफल तय होता है । अत: ग्रह को BAC को तय करने में CPB की अपेक्षा अधिक समय लगेगा ।

केप्लर का तृतीय नियम

यदि यह सरल परिकल्पना कर लें कि सूर्य को केंद्र में रखकर उसके परित: घूम रहे ग्रह की कक्षा R त्रिज्या वाला एक वृत्त है, तो हम केप्लर के तीसरे नियम को सहज सही सिद्ध कर लेंगे । सूर्य का गुरुत्वीय आकर्षण ग्रह के अभिकेंद्री त्वरण के लिए उत्तरदायी है, अर्थात्

$$\frac{GM_s m_p}{R^2} = \frac{m_p v^2}{R}$$

$$\frac{GM_s}{R^2} = \frac{v^2}{R} \qquad (8.10)$$

सूर्य का द्रव्यमान M_s तथा ग्रह की कक्षीय चाल v है । ध्यान दीजिए कि ग्रह का द्रव्यमान निरस्त हो जाता है । हमने दूसरे ग्रहों व उपग्रहों के गुरुत्वीय आकर्षण की उपेक्षा की है । इसलिए कोई भी स्पर्शीय त्वरण विद्यमान नहीं है । अत: ग्रह एकसमान चाल से वृत्तीय गति करता है, जिसका आवर्तकाल T इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$v = \frac{2\pi R}{T} \qquad (8.11)$$

समीकरण (8.11) का मान समीकरण (8.10) में रखने पर

$$\frac{GM_s}{R^2} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} R^3$$

$$= K_S R^3$$

इस प्रकार, $T^2 \propto R^3$ (8.12)

यह केप्लर का तृतीय नियम है । नियतांक K_S सभी ग्रहों के लिए एकसमान है और इसका मान $2.97\times10^{-19} s^2 m^{-3}$ है । यदि कक्षा दीर्घवृत्तीय है तो जैसा अनुभाग 8.2 में वर्णन किया गया है, R को अर्धदीर्घ अक्ष a द्वारा प्रतिस्थापित कर देते हैं । इस प्रतिस्थापन के औचित्य के स्पष्टीकरण में जटिल उपपत्ति सम्मिलित है जिसे हम यहां छोड़ रहे हैं । अत:

$$T^2 = K_S a^3 \qquad (8.13)$$

यहां K_S का मान पहले के समान ही है । पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमण कर रहे उपग्रहों में भी यही तर्क लागू होता है परंतु नियतांक K_S का प्रतिस्थापन $K_E = 4\pi^2/GM_E$ द्वारा करते हैं, यहां M_E पृथ्वी का द्रव्यमान है ।

> उदाहरण 8.4 मंगल ग्रह के दो चंद्रमा हैं जिनके नाम फोबोस तथा डेमोस हैं । (i) फोबोस का आवर्तकाल 7 घंटे, 39 मिनट है तथा कक्षीय त्रिज्या 9.4×10^3 km है । मंगल ग्रह का द्रव्यमान परिकलित कीजिए (ii) मान लीजिए कि पृथ्वी और मंगल सूर्य के परितः वृत्तीय कक्षाओं में परिक्रमण करते हैं तथा मंगल ग्रह की कक्षा पृथ्वी की कक्षा की त्रिज्या की 1.52 गुना है । मंगल वर्ष की अवधि दिनों में परिकलित कीजिए ।

हल समीकरण (8.12) में सूर्य के द्रव्यमान का प्रतिस्थापन मंगल ग्रह के द्रव्यमान M_m से करने पर

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_m} R^3$$

$$M_m = \frac{4\pi^2}{G} \frac{R^3}{T^2}$$

$$= \frac{4 \times (3.14)^2 \times (9.4)^3 \times 10^{18}}{6.67 \times 10^{-11} \times (459 \times 60)^2}$$

$$M_m = \frac{4 \times (3.14)^2 \times (9.4)^3 \times 10^{18}}{6.67 \times (4.59 \times 6)^2 \times 10^{-5}}$$

$$= 6.48 \times 10^{23} \text{ kg}$$

(ii) केप्लर के तीसरे नियम का उपयोग करके हम निम्नलिखित ढंग से T_m का मान ज्ञात कर सकते हैं,

$$\frac{T_M^2}{T_E^2} = \frac{R_{MS}^3}{R_{ES}^3}$$

यहां $R_{MS}(R_{ES})$ मंगल (पृथ्वी) - सूर्य की दूरी हैं ।

$$T_M = \left(\frac{R_{MS}}{R_{ES}}\right)^{3/2} T_E$$

$$T_M = (1.52)^{3/2} \times 365$$

$$= 684 \text{ दिन}$$

यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि बुध, मंगल व प्लूटो को छोड़कर अन्य सभी ग्रहों की कक्षाएं लगभग वृत्तीय हैं । उदाहरणार्थ, पृथ्वी के लिए अर्धलघु व अर्धदीर्घ अक्षों का अनुपात $b/a = 0.99986$ है ।

8.5 गुरुत्वाकर्षण एवं भार

अध्याय 5 में m द्रव्यमान के पिण्ड का भार mg द्वारा परिभाषित किया गया है, यहां g गुरुत्वीय त्वरण है । गुरुत्वाकर्षण के नियम से g का मौलिक विवरण संभव है । प्रथम सन्निकटन के रूप में हम यह मान सकते हैं कि पृथ्वी त्रिज्या R_E तथा द्रव्यमान M_E का एकसमान गोला है । न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण के नियम तथा उसी के गति के दूसरे नियम के अनुसार

$$mg = \frac{GM_E m}{R_E^2}$$

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} \qquad (8.14)$$

ध्यान दीजिए, कि हमने यहां पहले वर्णन किए जा चुके इस तथ्य का उपयोग किया है कि किसी गोलीय पिंड के कारण किसी बाह्य द्रव्यमान पर लगने वाला गुरुत्वीय बल इस प्रकार कार्य करता है जैसे कि गोलीय पिंड का समस्त द्रव्यमान उसके केंद्र पर संकेंद्रित है । अब हम विभिन्न कारकों पर g की निर्भरता के विषय में अध्ययन कर सकते हैं ।

8.5.1 ऊंचाई के साथ 'g' के मान में परिवर्तन

यदि कोई पिण्ड पृथ्वी की सतह से h ऊंचाई पर है, तो g का h ऊंचाई पर मान समीकरण (8.14) को संशोधित करके प्राप्त कर सकते हैं,

$$g(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \qquad (8.15)$$

ध्यान दीजिए $R_E = 6.37 \times 10^6$ m, तथा पार्थिव विवेचन में $h \ll R_E$। तब हम उपरोक्त व्यंजक g का सन्निकटन इस प्रकार कर सकते हैं

$$g(h) \approx \frac{GM_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \qquad (8.16a)$$

$$= g(0)\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \qquad (8.16b)$$

यहां $g(0)$ का मान समीकरण (8.14) से व्यक्त होता है । उदाहरणार्थ, यदि हम पृथ्वी के सर्वोच्च ऊंचाई के पर्वत से कुछ अधिक ऊंचाई पर हैं तब $h = 10$ km तथा चूंकि समीकरण (8.16) में संशोधन पद नगण्य है, अतः समीकरण (8.14) हमारे लिए उपयुक्त है परंतु यदि हम 320 km की ऊंचाई पर हैं, तो इस ऊंचाई पर $g(h)$ का मान

$$g(h) = 0.9\, g(0) \qquad (8.17)$$

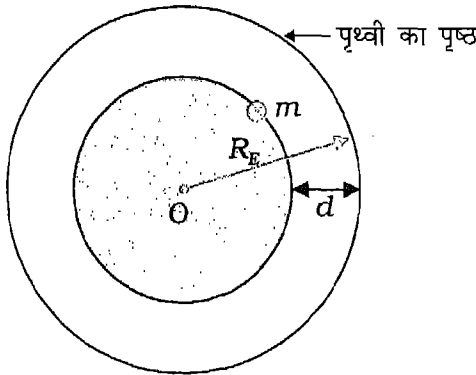
अर्थात् g के मान में 10% की कमी आ जाती है । यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि किसी प्ररूपी अंतरिक्ष शटल के लिए

h का मान लगभग 400 km होता है। समीकरण (8.15) को किसी भी ग्रहीय अथवा आकाशीय पिण्ड वस्तु के लिए विस्तार किया जा सकता है,

$$g_P(h) = \frac{G M_P}{(R_P+h)^2} \qquad (8.18)$$

यहां अधोलिखित P ग्रह को इंगित करता है।

8.5.2 गहराई के साथ 'g' के मान में परिवर्तन

चित्र 8.5 में पृथ्वी के पृष्ठ से d गहराई पर द्रव्यमान m की अवस्थिति एक रेखाचित्र द्वारा स्पष्ट की गई है, जो संभवत: किसी गहरी खान में है। हम यह मानते हैं कि पृथ्वी एक समांगी गोला है। यह दर्शाया जा सकता है कि द्रव्यमान m पर जो गुरुत्वीय बल लगता है वह केवल $(R_E - d)$ त्रिज्या वाले भीतरी ठोस गोले के कारण ही है। द्रव्यमान के बाहर का d मोटाई वाला भूआवरण उस पर कोई बल आरोपित नहीं करता है। इस परिणाम को हमने अवकलन विधि के बिना ही परिशिष्ट में सिद्ध किया है। इस प्रकार किसी द्रव्यमान m के भार के परिकलन के लिए पृथ्वी के जिस संबद्ध द्रव्यमान का हम उपयोग करते हैं, वह निम्नवत् है,

चित्र 8.5 कोई द्रव्यमान m किसी खान में पृथ्वी (द्रव्यमान M_E तथा त्रिज्या R_E) के पृष्ठ से d गहराई पर अवस्थित है। पृथ्वी को हम गोलीय सममित के रूप में लेते हैं।

$$M' = M_E \frac{(R_E - d)^3}{R_E^3}$$

यहाँ हमने यह माना है कि पृथ्वी का घनत्व नियत है। द्रव्यमान M को एक बार फिर पृथ्वी के केंद्र पर संकेंद्रित माना जा सकता है। अत: d गहराई पर m द्रव्यमान के पिण्ड का भार,

$$m\,g'(d) = \frac{G\,m}{(R_E - d)^2} M'$$

$$= \frac{G\,m}{(R_E - d)^2} M_E \frac{(R_E - d)^3}{R_E^3}$$

इस प्रकार,

$$g(d) = \frac{GM_E(R_E - d)}{R_E^3}$$

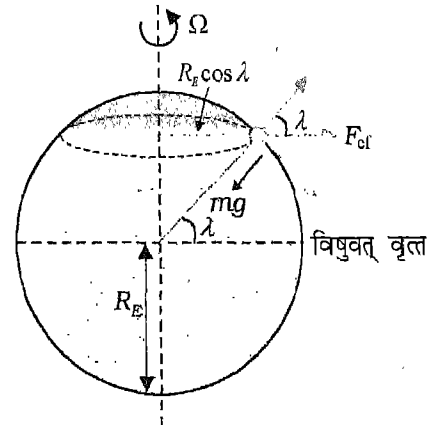
अथवा,

$$g(d) = g(0)\left(1 - \frac{d}{R_E}\right) \qquad (8.19)$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि वस्तु का भार दोनों ही प्रकरणों-ऊंचाई पर जाने में तथा गहराई में उतरने पर घटता है। समीकरण (8.19) से यह भी निष्कर्ष निकलता है कि पृथ्वी के केंद्र पर किसी पिण्ड का भार शून्य होगा।

8.5.3 अक्षांश के साथ g में परिवर्तन : पृथ्वी का घूर्णन

पृथ्वी अपने अक्ष के परित: 24 घंटों में पश्चिम से पूर्व की दिशा में एक घूर्णन पूरा करती है। इसकी कोणीय चाल $\Omega = 7.3 \times 10^{-5}\,\text{rad s}^{-1}$ है।

कल्पना कीजिए कि द्रव्यमान m का कोई पिण्ड पृथ्वी के पृष्ठ पर λ अक्षांश पर अवस्थित है। पृथ्वी को अपने अक्ष के परित: घूर्णन करने के कारण इस पिण्ड पर कोई अभिकेंद्री बल F_{cf} कार्य करता है जिसका मान निम्नलिखित होता है

चित्र 8.6 पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थित किसी द्रव्यमान m के भार पर पृथ्वी के घूर्णन का प्रभाव। वस्तु λ अक्षांश पर स्थित है।

$$F_{cf} = m\Omega^2 R_E \cos\lambda$$

चित्र 8.6 में दर्शाए अनुसार यह बल घूर्णन अक्ष के विपरीत दिशा में लगता है। अत: पिण्ड m पर दो बल कार्य करते हैं : एक गुरुत्व के कारण mg तथा दूसरा पृथ्वी के घूर्णन के कारण अभिकेंद्र बल F_{cf}। पिण्ड पर कार्य करने वाला पृथ्वी के केंद्र की ओर अभिमुख कुल बल

$$m\,g' = mg - F_{cf}\cos\lambda$$
$$= m\,g - m\Omega^2 R_E \cos^2\lambda$$
$$\therefore g' = g - \Omega^2 R_E \cos^2\lambda \qquad (8.20)$$

यहां g' प्रभावी गुरुत्वीय त्वरण है।

इस प्रकार गुरुत्वीय त्वरण में कमी आ जाती है । यह कमी अल्प है और इसका आंकलन सुगमतापूर्वक किया जा सकता है । g के मान में सबसे अधिक कमी विषुवत् वृत्त पर होनी चाहिए, जहां $\lambda = 0°$ होता है । यहां इसका मान $R_E \Omega^2 = 3.55 \times 10^{-2}$ m s^{-2} होता है । यह g के मान से 1% से भी कम है । ध्रुवों पर इस संशुद्धि पद का मान शून्य हो जाता है ।

बल F_{cf} का एक स्पर्शी घटक भी होता है अर्थात् $F_{cf} \sin\lambda = mR_E \Omega^2 \sin\lambda \cos\lambda$ । विषुवत् वृत्त ($\lambda = 0$) पर तथा ध्रुवों $\left(\lambda = \pm\frac{\pi}{2}\text{ rad}\right)$ पर इसका मान शून्य होता है । मध्यवर्ती अक्षांशों पर यह घटक विद्यमान रहता है जो यह संकेत करता है कि गुरुत्वीय त्वरण की दिशा पृथ्वी के केंद्र से थोड़ा विचलित हो जाती है । सर्वाधिक विचलन लगभग 0.002 rad (लगभग 0.1°) होता है जो यद्यपि कम है, तथापि इसे मापा जा सकता है ।

8.5.4 अक्षांश के साथ g में परिवर्तन : पृथ्वी की अगोलीयता

समीकरण (8.20) में गुरुत्वीय त्वरण g पर पृथ्वी के घूर्णन के प्रभाव के साथ ही अक्षांश का प्रभाव भी सम्मिलित है । इसमें अतिरिक्त अक्षांश निर्भरता भी होती है, चूंकि यदि सूक्ष्म निरीक्षण करें तो पृथ्वी की आकृति दीर्घवृत्तज होती है । विषुवत् वृत्त पर पृथ्वी की त्रिज्या का मान ध्रुवों की अपेक्षा 21km (21000 m) अधिक होता है । अत: पृथ्वी में विषुवतीय उभार होता है तथा ध्रुवों पर चपटापन होता है । घूर्णन तथा विषुवतीय उभार दोनों की अभिसंधि के कारण ही g का मान विषुवत् वृत्त पर ध्रुवों की अपेक्षा कम होता है ।

8.5.5 कुछ अन्य लक्षणों के कारण g में परिवर्तन

पृथ्वी का पृष्ठ विषम है । पर्वत श्रेणियों, पठारों, घाटियों आदि की उपस्थिति के कारण भी g के मान में परिवर्तन होना चाहिए ।

इतना ही नहीं, पृथ्वी का घनत्व भी एकसमान नहीं है । आंतरिक क्रोड, प्रावार की अपेक्षा भारी होता है । भूपर्पटी का घनत्व पृथ्वी के पृष्ठ पर एक क्षेत्र से दूसरे क्षेत्र तक परिवर्तित होता रहता है । इस प्रकार g के मान में क्षेत्र के अनुसार परिवर्तन होता है । यदि किसी स्थान पर g का शुद्ध मान निकालें तो इस बात का पता चल सकता है कि यहां भारी मात्रा में खनिज पदार्थ या तेल उपस्थित हैं । ऐसे अध्ययन वास्तव में तेल व खनिज की खोज में लाभप्रद हैं ।

> **उदाहरण 8.5** पृथ्वी को तोलना। आपको निम्नलिखित आंकड़े दिए गए हैं : $g = 9.81$ m s^{-2}, $R_E = 6.37 \times 10^6$ m, चंद्रमा की पृथ्वी के केंद्र से दूरी $R = 3.84 \times 10^8$ m तथा चंद्रमा के परिभ्रमण का आवर्तकाल $T = 27.3$ दिन । दो विधियों द्वारा पृथ्वी का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए ।

हल (1) समीकरण (8.14) से,

$$M_E = \frac{g R_E^2}{G}$$

$$= \frac{9.81 \times (6.37 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}}$$

$$= 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

(2) चंद्रमा पृथ्वी का एक उपग्रह है । केप्लर के तृतीय नियम से (समीकरण 8.12 देखें),

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G M_E}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2 R^3}{G T^2}$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times 3.14 \times (3.84)^3 \times 10^{24}}{6.67 \times 10^{-11} \times (27.3 \times 24 \times 60 \times 60)^2}$$

$$= 6.02 \times 10^{24} \text{ kg}$$

इन परिणामों में 1% से भी कम अंतर है अत: दोनों विधियों से लगभग एक ही उत्तर प्राप्त होता है ।

> **उदाहरण 8.6** चित्र 8.6 के अध्ययन द्वारा λ अक्षांश पर स्थित m द्रव्यमान पर पृथ्वी के केंद्र के सापेक्ष पृथ्वी की घूर्णन गति के कारण आरोपित बल के परिमाण तथा दिशा के लिए यथार्थ व्यंजक प्राप्त कीजिए ।

हल mg तथा F_{cf} के मध्य का कोण $(\pi - \lambda)$ rad है । गुरुत्वीय त्वरण g_t का परिमाण,

$$g_t = [g^2 + \Omega^4 R_E^2 \cos^2\lambda - 2g\, R_E\, \Omega^2 \cos^2\lambda]^{1/2}$$

यदि हम बीच के बहुत छोटे पद $\Omega^4 R_E^2 \cos^2\lambda$ की उपेक्षा कर दें तथा सन्निकटन $(1-x)^{1/2} \approx 1 - x/2$, यदि $(|x| << 1)$ का उपयोग करें तब हमें समीकरण (8.20) प्राप्त होता है तथा $g_t = g$ । यदि पृथ्वी के केंद्र से ϕ कोण बनता है तो,

$$\tan\phi = \frac{R_E\, \Omega^2 \sin\lambda \cos\lambda}{g - R_E \Omega^2 \cos^2\lambda}$$

यह पुन: बहुत कम है । यदि हम हर में $R_E \Omega^2 \cos^2$ की उपेक्षा कर दें तथा सन्निकटन की शर्त लगाएं कि $\tan\phi \approx \phi$ (यहां ϕ को रेडियन्स में व्यक्त किया गया है) तो हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\phi \approx \frac{R_E\, \Omega^2 \sin 2\lambda}{2g}$$

यहां हमने $2\sin\lambda\cos\lambda = \sin 2\lambda$ का उपयोग किया है । विचलन ϕ विषुवत् वृत्त ($\lambda = 0$ rad) तथा ध्रुवों ($\lambda = \pm\pi/2$ rad) पर शून्य होता है ।

8.6 गुरुत्वीय विभव व स्थितिज ऊर्जा

किसी संरक्षी बल के प्रभाव में गतिमान पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा को हमने अध्याय 6 में परिभाषित किया है । गुरुत्वीय बल संरक्षी बल का एक उदाहरण है । जैसा कि अध्याय 6 में बताया गया है कि किसी (त्रिज्या) विस्थापन Δr के लिए स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन $\Delta V(r)$ को इस प्रकार व्यक्त करते हैं* :

$$\Delta V(r) = -F(r)\Delta r$$

अब चूंकि $F(r) = \frac{-G\,M\,m}{r^2} = G\,M\,m\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)$

इससे स्पष्ट है कि एक दूसरे से r दूरी पर स्थित M तथा m द्रव्यमान वाले दो कणों के मध्य गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा,

$$V(r) = -\frac{G\,M\,m}{r} \qquad (8.21)$$

जब r का मान अनन्त की ओर अग्रसर हो तब गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मान शून्य होता है । यह उपर्युक्त परिभाषा विस्तृत पिंडों के ऐसे युग्मों के लिए लागू होती है जिनके बीच की दूरी r उनके पृथक्-पृथक् आकारों की अपेक्षा काफी अधिक होती है । यह उन गोलीय खोल या समांगी (एकसमान) ठोस गोलों पर भी इस शर्त के साथ लागू होता है कि r का मान उनकी अलग-अलग त्रिज्याओं के योग से अधिक हो, चूंकि ऐसा पहले कहा जा चुका है कि गोले के द्रव्यमान को उसके केंद्र पर संकेंद्रित माना जा सकता है । किसी द्रव्यमान M के गुरुत्वीय विभव $U(r)$ को हम प्रति एकांक द्रव्यमान की स्थितिज ऊर्जा के रूप में परिभाषित करते हैं । अतः

$$U(r) = \frac{V(r)}{m} = -\frac{GM}{r}$$

यह भी अदिश है और इसका मात्रक J/kg है ।

छठे अध्याय में हमने पृथ्वी के पृष्ठ के समीप स्थित किसी द्रव्यमान m की स्थितिज ऊर्जा को mgh के रूप में परिभाषित किया था, यहां h पृथ्वी के पृष्ठ से द्रव्यमान की ऊंचाई है । समीकरण (8.21) से हम पृथ्वी-द्रव्यमान निकाय की स्थितिज ऊर्जा V_1 को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$V_1(r) = -\frac{GM_E m}{(R_E + h)}$$

यदि, $h << R_E$ है

तो, $\frac{1}{(R_E + h)} \approx \frac{1}{R_E}\left(1 - \frac{h}{R_E}\right)$

चूंकि, $g = GM_E / R_E^2$,

अतः $$V_1(r) \approx -\frac{GM_E m}{R_E} + \left(\frac{GM_E}{R_E}\right)mh$$

$$\approx V_0 + mgh$$

चूंकि स्थितिज ऊर्जा नियतांक की सीमा के अंतर्गत स्वेच्छा से चुनी जा सकती है इसलिए आइए हम स्थितिज ऊर्जा को V_h के रूप में पुनर्परिभाषित करें

$$V_h = V_1 - V_0$$

$$= mgh \qquad (8.22)$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि दोनों परिभाषाओं में एक सामंजस्य है तथा वे मात्र समग्र नियतांक की सीमा में ही एक दूसरे से भिन्न हैं । यहां दो बातों पर विशेष ध्यान देना आवश्यक है ।

1. स्थितिज ऊर्जा को हम अपनी सुविधाजनक अवस्थिति पर शून्य मान सकते हैं । समीकरण (8.21) में हमने इसे पिण्ड से अनन्त दूरी ($r \to \infty$) पर शून्य माना है । समीकरण (8.22) में हमने पृथ्वी के पृष्ठ पर इसे शून्य माना है ।
2. स्थितिज ऊर्जा एक साथ लिए गए दो कणों का एक संयुक्त गुण है । यदि दो कणों में से कोई एक कण बहुत भारी है, उदाहरणार्थ $M >> m$ तो मान्य प्रथा के अनुसार इस परिस्थिति में हल्के द्रव्यमान की स्थितिज ऊर्जा कहा जाएगा जैसा कि समीकरण (8.22) में व्यक्त किया गया है । इसके विपरीत, गुरुत्वीय विभव संयुक्त गुण नहीं है ।

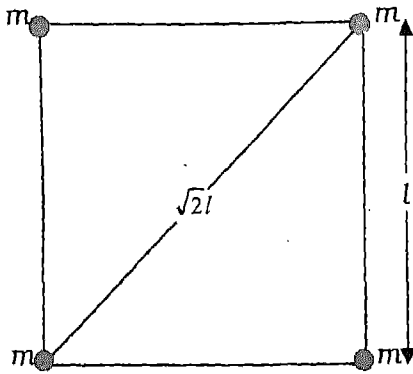
हम अनेक कणों या पिण्डों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा को भी परिभाषित कर सकते हैं । इसके लिए हम कणों के सभी संभव युग्मों के बीच की स्थितिज ऊर्जा का योग ज्ञात करते हैं । नीचे के उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाएगा ।

▶ ***उदाहरण 8.7*** भुजा l वाले किसी वर्ग के शीर्षों पर चार कण रखे हुए हैं । इस निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए । वर्ग के केंद्र पर भी स्थितिज ऊर्जा परिकलित कीजिए ।

हल हमारे पास l दूरी वाले 4 तथा $\sqrt{2}\,l$ दूरी वाले दो युग्म हैं । इसलिए,

$$V(r) = -4\frac{Gm^2}{l} - 2\frac{Gm^2}{\sqrt{2}\,l}$$

$$= -\frac{2Gm^2}{l}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5.41\frac{Gm^2}{l}$$

*. स्थितिज ऊर्जा की व्युत्पत्ति यथार्थ नहीं है क्योंकि हमने विस्थापन को एक ही विमा अर्थात् त्रिज्यी दिशा (r) के अनुदिश लिया है । तीन विमाओं के लिए व्यापक उपपत्ति को हमने छोड़ दिया है ।

चित्र 8.7 भुजा l वाले वर्ग के शीर्षों पर चार कण रखे हैं।

वर्ग के केंद्र $\left(r=\frac{\sqrt{2}l}{2}\right)$ पर गुरुत्वीय विभव

$$U(r) = -4\sqrt{2}\,\frac{Gm}{l}$$

युग्मों के योग का उपरोक्त निर्धारण अनुभाग 8.3 में वर्णित **अध्यारोपण के सिद्धांत** पर आधारित है। ◀

8.7 पलायन चाल

हम जानते हैं कि गुरुत्वीय बल एक संरक्षी बल होता है। अतः केवल गुरुत्वीय बलों के प्रभाव के अंतर्गत गतिमान कणों के निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित होनी चाहिए। संरक्षण का यह सिद्धांत निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने में लाभकारी है : किसी प्रक्षेप्य को निम्नतम क्या चाल प्रदान की जाए कि वह पृथ्वी से सदा के लिए पलायन कर जाए ? इस प्रकार की चाल को हम पलायन चाल कहते हैं तथा इसे प्रतीक v_e* से व्यक्त करते हैं। इस वेग का आंकलन हम यह मान कर करते हैं कि विश्व में कोई अन्य गुरुत्वीय पिण्ड नहीं है। पृथ्वी के पृष्ठ पर द्रव्यमान m के प्रक्षेप्य की आरंभिक यांत्रिक ऊर्जा

$$E_i = \frac{mv_e^2}{2} - \frac{GM_E m}{R_E}$$

पृथ्वी के पृष्ठ से h ऊंचाई पर ऊर्जा

$$E_h = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_E m}{(R_E+h)}$$

यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण से

$$\frac{mv_e^2}{2} - \frac{GM_E m}{R_E} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_E m}{(R_E+h)}$$

पृथ्वी के गुरुत्व की पहुंच से बाहर की स्थिति में $(h \to \infty)$ लेते हैं। न्यूनतम आरंभिक चाल ज्ञात करने के लिए $(h \to \infty)$ की स्थिति में हम प्रक्षेप्य की चाल v को शून्य लेते हैं। इस प्रकार,

$$\frac{mv_e^2}{2} - \frac{GM_E\, m}{R_E} = 0$$

$$v_e = \left(\frac{2GM_E}{R_E}\right)^{1/2} \quad (8.23)$$

हम जानते हैं कि $g = GM_E / R_E^2$,

अतः $$v_e = \sqrt{2gR_E} \quad (8.24)$$

आंकिक रूप में इसका मान $1.12 \times 10^4\, m\, s^{-1}$ ($11.2\, km\, s^{-1}$) होता है। यह चाल वायु में ध्वनि की चाल की लगभग 30 गुनी है। यह वायु के अणु की माध्य चाल की लगभग 10 गुनी है। इससे स्पष्ट होता है कि क्यों जीवन के लिए आवश्यक वायुमंडलीय आवरण को पृथ्वी अपने गुरुत्वीय आकर्षण के द्वारा रोक लेती है। इसके विपरीत, इसी के सदृश परिकल्पनाओं द्वारा चंद्रमा की पलायन चाल का परिमाण बहुत कम यानी $2.3\, km\, s^{-1}$ आता है। परिणामस्वरूप चंद्रमा में कोई वायुमंडल नहीं है। बृहस्पति ग्रह में पलायन वेग का मान अधिक ($60\, km\, s^{-1}$) होता है। हम आगे यह देखेंगे कि किसी दिए गए ताप पर अपेक्षाकृत हल्की गैसों की आण्विक चाल अधिक होती है। अतः यहां तक कि सबसे हल्के तत्व हाइड्रोजन को बृहस्पति के गुरुत्वीय बल के कारण रोक लिया जाता है तथा यह इसके वायुमंडल का प्रमुख घटक है। इसके विपरीत पृथ्वी के वायुमंडल में हाइड्रोजन अल्प मात्रा में है।

▶ ***उदाहरण 8.8*** कृष्ण विवर को एक ऐसा पिण्ड मानते हैं जिसके पृष्ठ से कभी भी पलायन नहीं हो सकता। द्रव्यमान M वाला कोई एकसमान गोला किस परिस्थिति में कृष्ण विवर बन सकता है ? यदि कृष्ण विवर का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान के बराबर हो, तो इसकी त्रिज्या कितनी होगी ?

हल अभी तक हमने आइंस्टीन के आपेक्षिकता के विशेष सिद्धांत का अध्ययन नहीं किया है। तथापि हम उसके कुछ परिणामों से परिचित हैं। इनमें से एक यह है कि किसी वस्तु की चाल प्रकाश की चाल, c ($3 \times 10^8\, m\, s^{-1}$) से अधिक नहीं हो सकती। इसलिए समीकरण (8.23) में प्रक्षेप्य की पलायन चाल की अधिकतम सीमा c है, अर्थात्

$$\left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} \le c$$

* बहुत-सी पाठ्यपुस्तकों में पलायन चाल को पलायन वेग कहा गया है यद्यपि यह अदिश है।

यदि $M = M_E$ हो तो हमें कृष्ण विवर की त्रिज्या,

$$R = \frac{2GM_E}{c^2} = 1\,\text{cm!}$$

अर्थात् पृथ्वी को अविश्वसनीय रूप से छोटी रसभरी के आकार में सिकुड़ जाना चाहिए ! ◀

▶ उदाहरण 8.9 समान त्रिज्या तथा M व $4M$ द्रव्यमान वाले दो एकसमान गोले इस प्रकार रखे हैं कि उनके केंद्रों के बीच की दूरी चित्र 8.8 में दर्शाए अनुसार $6R$ है । दोनों गोलों को स्थिर कर दिया गया है । M द्रव्यमान वाले गोले के पृष्ठ से m द्रव्यमान का कोई प्रक्षेप्य दूसरे गोले के केंद्र की ओर सीधे प्रक्षेपित किया गया है । प्रक्षेप्य की उस न्यूनतम चाल v के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए कि वह दूसरे गोले के पृष्ठ तक पहुंच जाए ।

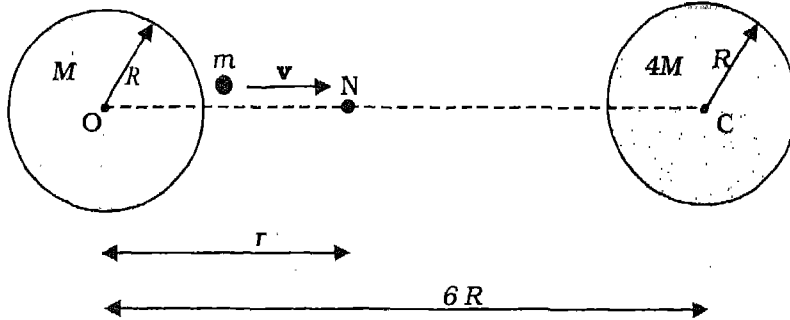
उदासीन बिंदु N पर चाल शून्य के सदृश हो जाती है । बिंदु N पर यांत्रिक ऊर्जा शुद्ध रूप से स्थितिज होती है ।

$$E_N = -\frac{GMm}{2R} - \frac{4GMm}{4R}$$

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम के अनुसार;

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} - \frac{4GM}{5R} = -\frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R}$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{2GM}{R}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

अथवा $\quad v = \left(\frac{3GM}{5R}\right)^{1/2}$

चित्र 8.8 उदाहरण 8.9 के गोले दिखाए गए हैं । प्रक्षेप्य को सीधे OC के अनुदिश फेंका गया है ।

हल प्रक्षेप्य पर दोनों गोलों के कारण परस्पर लंबवत् परंतु एक दूसरे का विरोध करते हुए दो गुरुत्वीय बल कार्य कर रहे हैं। उदासीन बिंदु N (चित्र 8.8 देखिए) एक ऐसा बिंदु है जहां दोनों बल एक दूसरे को यथार्थ रूप में निरस्त कर देते हैं । यदि $ON = r$, तो

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{4GMm}{(6R-r)^2}$$

$$\therefore (6R-r)^2 = 4r^2$$

या $\quad 6R - r = \pm 2r$

$$\therefore r = 2R \text{ अथवा} -6R$$

इस उदाहरण में उदासीन बिंदु $r = -6R$, का हमारे लिए कोई महत्त्व नहीं है । इस प्रकार, $ON = r = 2R$ । अत:, कण को उस चाल से प्रक्षेपित करना पर्याप्त होगा ताकि वह N बिंदु पर पहुंच जाए । इसलिए द्रव्यमान $4M$ का अपेक्षाकृत अधिक गुरुत्वीय बल पर्याप्त होगा । M के पृष्ठ पर यांत्रिक ऊर्जा

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} - \frac{4GMm}{5R}$$

यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि N बिंदु पर प्रक्षेप्य की चाल शून्य होती है परंतु जब वह भारी वस्तु $4M$ से टकराता है तो चाल शून्य नहीं होती । इस चाल का परिकलन हम छात्रों को एक अभ्यास के रूप में करने के लिए दे रहे हैं । ◀

8.8 उपग्रहों की गति

उपग्रह एक ऐसा पिण्ड होता है जो किसी ग्रह के परित: परिक्रमण करता है । इसकी कक्षीय गति प्रमुख रूप से ग्रह के गुरुत्वीय आकर्षण तथा आरंभिक अवस्थाओं द्वारा निर्धारित होती है । उपग्रह दो प्रकार के होते हैं–प्राकृतिक अथवा कृत्रिम (मानव निर्मित) । चंद्रमा पृथ्वी का प्राकृतिक उपग्रह है । बृहस्पति के 16 चंद्रमा हैं इसलिए इसके 16 उपग्रह हैं । 1957 में रूसी वैज्ञानिकों ने पहला कृत्रिम उपग्रह स्पूतनिक I कक्षा में स्थापित किया था । इसका द्रव्यमान 84kg था तथा यह पृथ्वी के परित: 1 घंटे 36 मिनट में एक परिक्रमा पूरी करता था । हमने तब से इस क्षेत्र में एक लंबी दूरी तय की है । मानवरहित तथा मानवसहित अनेक अन्वेषी अंतरिक्ष में भेजे जा चुके हैं और आज सैकड़ों उपग्रह तथा अंतरिक्ष अन्वेषी पृथ्वी की कक्षाओं में परिक्रमण कर रहे हैं । इन्हें वैज्ञानिक, इंजीनियरिंग, व्यापारिक

तथा सामरिक अनुप्रयोगों आदि के विभिन्न परासों में उपयोग किया जा रहा है ।

किसी उपग्रह की गति का वर्णन करने के लिए हम उस पर केवल पृथ्वी द्वारा लगाए गए प्रबल गुरुत्वीय बल पर विचार करेंगे । हम दूसरे उपग्रहों (जैसे चंद्रमा), सूर्य, अन्य ग्रह, साथ ही वायुमण्डलीय कर्षण, पृथ्वी की अगोलीयता आदि के प्रभावों की उपेक्षा कर देंगे । कल्पना कीजिए कि उपग्रह का द्रव्यमान m तथा उसकी वृत्तीय कक्षा की त्रिज्या a है । अनुभाग 8.4 में केप्लर के तीसरे नियम की व्युत्पत्ति में हमने देखा है कि परिक्रमण काल T तथा कक्षीय त्रिज्या a में निम्नलिखित संबंध है,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_E} a^3 = ka^3 \tag{8.25a}$$

$$k = \frac{4\pi^2}{GM_E} \tag{8.25b}$$

यहां नियतांक $k = 10^{-13}\,s^2\,m^{-3}$ है । k को दिनों और किलोमीटर में व्यक्त करना अधिक उपयोगी होता है ।

▶ **उदाहरण 8.10** स्थिरांक k को दिनों व किलोमीटर में व्यक्त कीजिए । चंद्रमा पृथ्वी से 3.84×10^5 km की दूरी पर है । इसके परिक्रमण का आवर्तकाल (दिनों में) ज्ञात कीजिए ।

हल दिया हुआ है,

$$k = 10^{-13}\,s^2\,m^{-3}$$

$$= 10^{-13}\left[\frac{1}{(24\times 60\times 60)^2}\,d^2\right]\left[\frac{1}{(1/1000)^3\,km^3}\right]$$

$$= 1.33\times 10^{-14}\,d^2\,km^{-3} \tag{8.26}$$

समीकरण (8.25) तथा (8.26) का उपयोग करने पर चंद्रमा का परिक्रमण काल

$$T^2 = (1.33\times 10^{-14})(3.84\times 10^5)^3$$

$$\therefore T = 27.3\,d$$

ध्यान दीजिए कि यदि a को हम दीर्घवृत्त की अर्धदीर्घ अक्ष मान लें तो समीकरण (8.25) दीर्घवृत्तीय कक्षाओं के लिए भी लागू होती है । ऐसी स्थिति में पृथ्वी दीर्घवृत्त की एक नाभि पर होगी । ◀

तुल्यकाली उपग्रह एक विशेष प्रकार का कृत्रिम उपग्रह होता है । इसे उस वृत्तीय कक्षा में स्थापित करते हैं जो विषुवत् वृत्त के तल में इतनी दूरी पर स्थित हो कि उसका परिक्रमण काल पृथ्वी के घूर्णन काल (नाक्षत्र दिन) के संपाती हो जाए । ऐसा उपग्रह स्थिर भौगोलिक देशांतर पर होगा । समीकरणों (8.25) तथा (8.26) के उपयोग से हम पृथ्वी के केंद्र से उसकी दूरी ज्ञात कर लेते हैं,

$$a^3 = \frac{1\times 1}{1.33\times 10^{-14}}$$

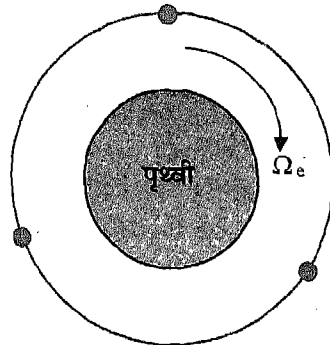
$$\therefore a = 4.22\times 10^4\,km$$

इस प्रकार पृथ्वी के पृष्ठ से इसकी ऊंचाई

$$h = a - R_E$$

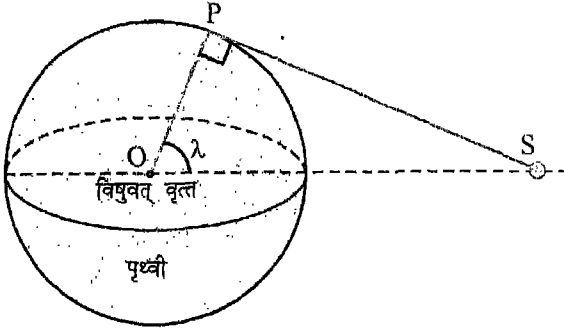
$$= (42.2 - 6.37)\times 10^3 = 3.58\times 10^4\,km$$

इस प्रकार के उपग्रह को तुल्यकाली उपग्रह भी कहते हैं । चित्र 8.9 में तुल्यकाली विषुवतीय कक्षाओं में एकसमान दूरियों पर स्थित तीन उपग्रहों को दिखाया गया है । उपग्रहों के ऐसे विन्यास को रेडियो ट्रांसपोंडरों से लैस करके उदाहरण 8.11 में स्पष्ट किए अनुसार पृथ्वी के किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य सार्वभौमिक संप्रेषणों की दृश्य रेखा को प्राप्त करते हैं । इन उपग्रहों का उपयोग संप्रेषण में करते हैं । इन्हें SYNCOMS (सीन्क्रोनस कम्युनिकेशन्स सेटेलाइट अर्थात् तुल्यकाली संप्रेषण उपग्रह) कहते हैं । तुल्यकाली कक्षाओं को आधिकारिक रूप से 'क्लार्क की तुल्यकाली कक्षा' या 'क्लार्क आर्क' भी कहते हैं । यह नामकरण प्रसिद्ध वैज्ञानिक कथाकार आर्थर सी. क्लार्क को सम्मानित करने के लिए किया गया है, जिन्होंने सर्वप्रथम 1945 में संप्रेषण उपग्रह की कल्पना की थी । 1957 में **स्पूतनिक I** के छोड़े जाने के काफी पहले ही ऐसा हो चुका था ।

ध्रुवीय उपग्रह उस स्थिति में उत्तर-दक्षिण दिशा में परिक्रमा करता है जब इसके नीचे पृथ्वी पश्चिम से पूर्व दिशा में घूर्णन करती है । इसके परिणामस्वरूप अंततोगत्वा उपग्रह पृथ्वी के पूरे पृष्ठ का परीक्षण कर सकता है । यह प्रक्रिया किसी संतरे को एक खण्ड में छीलने के समान होती है जिसमें घुमा-घुमा कर-एक समय में एक ही पट्टी के रूप में पूरे छिलके को उतारा जाता है । मौसम तथा परिवेश का मानीटरन करने वाले उपग्रह, तथा जासूसी उपग्रह लगभग सदैव ही नीची उड़ान वाली ध्रुवीय कक्षाओं (500-800 km) में रहते हैं । यूरोपीय एस.पी.ओ.टी. (SPOT) तथा इंडियन अर्थ रिसोर्सेज़ सेटेलाइट्स (IERS) इसके उदाहरण हैं । मानचित्रण तथा सर्वेक्षण के इस

चित्र 8.9 एकसमान दूरियों पर स्थित तीन उपग्रह तुल्यकाली विषुवतीय कक्षाओं में स्थापित किए गए हैं । चित्र उचित पैमाने के अनुसार नहीं खींचा गया है ।

सिद्धांत का अनुप्रयोग चंद्रमा, शुक्र व मंगल की स्थलाकृति के अध्ययन में किया जाता है ।

उदाहरण 8.11 किस देशांतर तक SYNCOMS का क्षेत्र फैला हुआ है ? किसी SYNCOMS की कक्षीय चाल कितनी होगी ?

हल

चित्र 8.10 संप्रेषण उपग्रह को S से चिह्नित किया गया है तथा संप्रेषण क्षेत्र का देशांतर λ है ।

चित्र 8.10 में स्पष्ट किया गया है कि संप्रेषण क्षेत्र का देशांतर स्पर्श रेखा SP तक फैला हुआ है । समकोण त्रिभुज OPS में,

$$\cos\lambda = \frac{OP}{OS} = \frac{R_E}{OS} = \frac{6.37\times10^3}{4.22\times10^4} = 0.151$$

अत: $\lambda = 81.3°$

अत: ध्रुव के चारों ओर 9° का वृत्तीय आर्क संप्रेषण क्षेत्र में आने से छूट जाता है । इस प्रकार पूरी पृथ्वी पर संप्रेषण के लिए तीन उपग्रहों की आवश्कता होती है । SYNCOMS की कक्षीय चाल होगी

$$v = \frac{2\pi a}{T}$$

$$= \frac{2\times3.14\times4.22\times10^7}{8.64\times10^5} = 3.07\times10^2 \text{m s}^{-1}$$

8.8.1 परिक्रमणकारी उपग्रह की कुल ऊर्जा

अब हम उपग्रह की वृत्तीय कक्षाओं से संबद्ध ऊर्जा के विषय में जानकारी प्राप्त करेंगे । चाल v_E से गतिमान उपग्रह की कुल यांत्रिक ऊर्जा

$$E = K + V = \frac{1}{2}m v_E^2 - \frac{GM_E m}{a} \quad (8.27)$$

गुरुत्वाकर्षण के नियम से,

$$\frac{m v_E^2}{a} = \frac{GM_E m}{a^2}$$

अर्थात् $$K = \frac{m v_E^2}{2} = \frac{GM_E m}{2a} \quad (8.28)$$

समीकरण (8.27) में रखने पर हमें अधोलिखित व्यंजक प्राप्त होता है,

$$K = \frac{|V|}{2} \quad (8.29)$$

$$E = \frac{V}{2} = -K \quad (8.30)$$

या $$E = -\frac{GM_E m}{2a} \quad (8.31)$$

गतिज ऊर्जा तथा कुल ऊर्जा परिमाण में बराबर हैं । कुल ऊर्जा ऋणात्मक है तथा स्थितिज ऊर्जा की आधी है । कभी-कभी हमारा सामना बंधन ऊर्जा E_B नामक पद से होता है । यह वह कुल ऊर्जा है जो किसी उपग्रह को उसकी कक्षा से अलग करने के लिए आवश्यक होती है ।

अत: $$E_B = -E = |E| = \frac{GM_E m}{2a} \quad (8.32)$$

समीकरण (8.31) तथा (8.32) दीर्घवृत्तीय कक्षाओं के लिए भी इस शर्त के साथ लागू होती है कि a की व्याख्या हम अर्धदीर्घ-अक्ष के रूप में करें । उपग्रहों का उनकी कक्षाओं में राकेटों के द्वारा प्रमोचन कराया जाता है । उपग्रहों को ध्रुवीय कक्षाओं की अपेक्षा तुल्यकाली कक्षाओं में प्रमोचन कराने के लिए इन राकेटों को अधिक शक्तिशाली होना आवश्यक है । इसका कारण सरल है । तुल्यकाली कक्षाएं पृथ्वी से अपेक्षाकृत बहुत अधिक दूरी पर हैं । राकेट की आदर्शीकृत गति से संबंधित भौतिकी की विवेचना अध्याय 5 में की गई है ।

उदाहरण 8.12 400 kg का कोई उपग्रह पृथ्वी के परित: $2R_E$ त्रिज्या वाली किसी वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण कर रहा है । इसे $4R_E$ त्रिज्या वाली वृत्तीय कक्षा में स्थानांतरित करने के लिए कितनी ऊर्जा की आवश्यकता होगी ? इसकी गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं में कितना परिवर्तन होगा ?

हल आरंभ में

$$E_i = -\frac{GM_E m}{4R_E}$$

जबकि अंत में,

$$E_f = -\frac{GM_E m}{8R_E}$$

अत: ऊर्जा में कुल परिवर्तन

$$\Delta E = E_f - E_i$$

$$= \frac{GM_E m}{8R_E} = \left(\frac{GM_E}{R_E^2}\right)\frac{mR_E}{8}$$

भारत की अंतरिक्ष में छलांग

1975 में पहले भारतीय उपग्रह आर्यभट के प्रमोचन के साथ भारत ने अंतरिक्ष युग में प्रवेश किया। योजना के पहले कुछ वर्षों में पूर्ववर्ती सोवियत संघ ने प्रमोचन वाहन उपलब्ध कराए थे। स्वदेशी प्रमोचन वाहनों का उपयोग 1980 दशक के आरंभ में रोहिणी श्रेणी के उपग्रह को अंतरिक्ष में भेजने में किया गया। ध्रुवीय उपग्रहों को अंतरिक्ष में प्रमोचन करने का कार्यक्रम 1980 दशक के अंतिम वर्षों में आरंभ किया गया। आई.आर.एस (इंडियन रिमोट सेंसिंग सेटेलाइट्स) से निर्धारित उपग्रहों की शृंखला का प्रमोचन आरंभ हो चुका है और आशा की जाती है कि यह कार्यक्रम भविष्य में भी चलता रहेगा। इन उपग्रहों का उपयोग सर्वेक्षण, मौसम की भविष्यवाणी तथा अंतरिक्ष में प्रयोगों के संपन्न करने में हो रहा है। संचार तथा मौसम की भविष्यवाणी के उद्देश्य से इनसेट (इंडियन नेशनल सेटेलाइट) श्रेणी के उपग्रहों की शृंखला का आरंभ 1982 में हुआ। [illegible] श्रेणी के उपग्रहों के प्रमोचन में यूरोपीय वाहनों का उपयोग किया गया। भारत ने 2001 में अपनी भूमि से भूस्थायी प्रमोचन क्षमता का परीक्षण तब किया जब उसने एक प्रायोगिक संप्रेषण उपग्रह (GSAT-1) को अंतरिक्ष में भेजा। 1984 में राकेश शर्मा को प्रथम भारतीय अंतरिक्ष यात्री बनने का सौभाग्य प्राप्त हुआ। भारतीय अंतरिक्ष शोध संस्थान (इंडियन स्पेस रिसर्च आर्गनाइजेशन-ISRO) वह छत्र संस्था है जिसके द्वारा अनेक केंद्र संचालित हो रहे हैं। इसका प्रमुख प्रमोचन केंद्र श्री हरिकोटा (शार) है जो चेन्नई से 100 km उत्तर में स्थित है। राष्ट्रीय सुदूर संवेदन एजेंसी (नेशनल रिमोट सेंसिंग एजेंसी – NRSA) हैदराबाद के समीप स्थित है। अंतरिक्ष तथा संबद्ध विज्ञान से संबंधित शोध के लिए इसका राष्ट्रीय केंद्र अहमदाबाद में स्थित जिसका नाम भौतिकी राष्ट्रीय शोध प्रयोगशाला (PRL) है।

$$\Delta E = \frac{g\,m R_E}{8} = \frac{9.81\times 400\times 6.37\times 10^6}{8}$$
$$= 3.1\times 10^9 \text{ J}$$

गतिज ऊर्जा में कमी आ जाती है और यह ΔE के सदृश हो जाती है, अर्थात्

$$\Delta K = K_f - K_i = -3.13\times 10^9 \text{ J}$$

स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन कुल ऊर्जा में परिवर्तन का दो गुना होता है, अर्थात्

$$\Delta V = V_f - V_i = -6.25\times 10^9 \text{ J}$$

8.9 भारहीनता

पत्रिकाओं एवं दूरदर्शन के अंतरिक्ष संबंधी कार्यक्रमों में हम देखते हैं कि अंतरिक्ष यात्री और वस्तुएं पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमण कर रहे उपग्रहों में तैर रही हैं। इस आभासी भारहीनता की यह कह कर व्याख्या की गई है कि "चूंकि ये वस्तुएं पृथ्वी से बहुत दूर हैं इसलिए गुरुत्वीय त्वरण g का मान (समीकरण 8.15 देखें) बहुत कम होता है"। यह तर्क त्रुटिपूर्ण है। इसके पहले कि हम किसी उपग्रह में भारहीनता की व्याख्या करने का प्रयास करें, हम किसी गिरती हुई लिफ्ट का सरल उदाहरण लेकर उसकी गति का अध्ययन करेंगे। चित्र 8.11(a) व 8.11(b) में एक कद्दू

चित्र 8.11 (a) लिफ्ट विरामावस्था में है। कमानीदार तुला का पाठ्यांक W है। (b) लिफ्ट जिसकी निलंबन रस्सी काट दी गई है, तथा गुरुत्व के प्रभाव में नीचे गिर रही है। कमानीदार तुला का पाठ्यांक शून्य हो जाता है। अधोमुखी दिशा को धनात्मक लिया गया है।

(सीताफल) को लिफ्ट की छत से जुड़ी कमानीदार तुला से लटके हुए दर्शाया गया है। लिफ्ट के फर्श पर खड़ी एक लड़की कमानीदार तुला का प्रेक्षण कर रही है।

कल्पना कीजिए कि कद्दू पर लगने वाले गुरुत्वीय खिंचाव का परिमाण mg तथा कमानी के कारण उस पर लगने वाला बल W है। पहले प्रकरण में कद्दू का त्वरण a शून्य है, इसलिए

$$mg - W = 0$$

कमानीदार तुला के संकेतक का पाठ्यांक W है। यदि लिफ्ट का त्वरण a हो जाए तो कद्दू का बल निर्देशक आरेख यह व्यंजित करता है कि

$$mg - W = ma$$

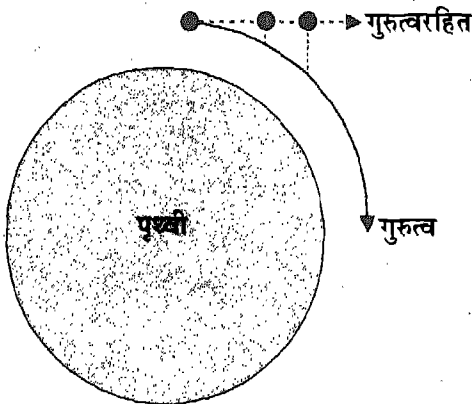
अर्थात् कमानीदार तुला का पाठ्यांक

$$W = mg - ma$$

यदि लिफ्ट की निलंबन रस्सी को काट दिया जाए, तो लिफ्ट तथा उसके भीतर की सभी वस्तुओं का त्वरण g होगा, तथा

$$W = mg - ma = 0$$

कामानीदार तुला का पाठ्यांक शून्य होगा। लड़की भौचक्की रह जाएगी। वास्तव में लड़की पर लगने वाली अभिलंब प्रतिक्रिया N भी शून्य ही होगी। लड़की यदि भार मापने वाली तुला पर खड़ी होती तो उसके संकेतन का पाठ्यांक भी शून्य होता। पृथ्वी के कारण कद्दू व लड़की पर क्रमशः mg व Mg बल सतत् रूप से लगे रहेंगे। कद्दू का आभासी भार कमानीदार तुला का पाठ्यांक होगा तथा लड़की का भार फर्श के कारण अभिलंब प्रतिक्रिया का मान होगा। स्वतंत्रतापूर्वक गिरते समय W तथा N दोनों ही शून्य होंगे। यह उदाहरण आभासी भारहीनता की व्याख्या करता है।

ऐसी ही अवस्थिति उस प्रकरण में होती है जब उपग्रह कक्षाओं में परिक्रमण करते हैं। उपग्रह और उसके भीतर अंतरिक्ष यात्री सहित सभी पिण्ड पृथ्वी के गुरुत्व के कारण आकर्षण बल

चित्र 8.12 गुरुत्व के प्रभाव के अंतर्गत उपग्रह सरल रेखा के मार्ग से विचलित होकर पृथ्वी की ओर गिर रहा है।

का अनुभव करते हैं और वास्तव में स्वतंत्रतापूर्वक गिरते (मुक्त पतन) हैं। चित्र 8.12 में दिखाया गया है कि पृथ्वी के गुरुत्व के कारण लगने वाला बल उपग्रह को उसके स्वाभाविक सरल रेखीय पथ से विचलित कर देता है तथा वह पृथ्वी की ओर गिरने लगता है। क्षैतिज वेग बहुत अधिक होने के कारण उपग्रह क्षितिज को पार कर जाता है और वृत्तीय कक्षा में गति करने लगता है। यदि उपग्रह को अचानक रोक कर पुनः छोड़ दिया जाए तो वह सरल रेखीय पथ पर अत्यन्त तीव्र गति से पृथ्वी की ओर जाएगा। **स्वतंत्रतापूर्वक गिरने का अर्थ है कि त्वरण g है।** चित्र 8.11 में गिरती हुई लिफ्ट तथा उपग्रह, इसका ध्यान किए बिना कि उनके निजी प्रक्षेप पथ क्या हैं, दोनों ही स्वतंत्रतापूर्वक गिर रहे हैं।

परिक्रमण कर रहे उपग्रह के अंदर का जीवन अत्यन्त रोचक हो सकता है। 1000 kg द्रव्यमान को आसानी से उठाया जा सकता है, फर्श पर बिना एक बूंद टपकाए चाय के प्याले को उलटा किया जा सकता है, परियों की कथा के अनुसार कमरे में तैरा जा सकता है। भारहीनता का शरीर क्रियात्मक प्रभाव भी बड़ा नाटकीय होता है। बहुत संभव है कि आपका चेहरा फूल जाए, तरलों द्वारा आपकी नाक बंद हो जाए, सिर में दर्द हो जाए, और यहां तक कि आप एक या दो सेंटीमीटर लंबे हो जाएं। हृदवाहिका तंत्र को कम काम करना पड़े, परंतु यह कोई सांत्वना देने वाली बात नहीं है। जब आप पृथ्वी पर वापस लौटें तो संभव है कि मांसपेशियां अपना काम करना बंद कर दें अथवा उन्हें ठीक से काम करने में कठिनाई हो।

8.10 गुरुत्वीय व जड़त्वीय द्रव्यमान

गैलीलियो के प्रसिद्ध प्रयोगों से यह प्रमाणित हो चुका है कि यदि वायु के प्रतिरोध को नगण्य मान लें तो सभी वस्तुएं समान त्वरण से गिरती हैं। जब न्यूटन ने अपने सशक्त गति संबंधी नियमों को सूत्रबद्ध कर लिया तो गैलीलियो के प्रेक्षणों से कुछ अधिक महत्वपूर्ण तथ्य सामने आए। विशेषकर दूसरा नियम बताता है कि

$$F = m_i a \tag{8.33}$$

द्रव्यमान m_i वस्तु के त्वरण के प्रतिरोध-जड़त्व की माप है। इसे जड़त्वीय द्रव्यमान कहते हैं। पृथ्वी के पृष्ठ के पास गुरुत्वीय बल के प्रभाव में स्वतंत्रतापूर्वक गिरते पिण्ड पर विचार करें। गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम के अनुसार पिण्ड पर कार्य करने वाले बल का परिमाण दोनों पिण्डों के द्रव्यमानों के गुणनफल का अनुक्रमानुपाती होता है। क्या इस नियम में दृष्टिगोचर होने वाला द्रव्यमान वही है जो समीकरण (8.33) में जड़त्वीय द्रव्यमान है? मान लीजिए कि यह भिन्न है और इसे पिण्ड का गुरुत्वीय द्रव्यमान m_g कहिए। तब

$$F = \frac{GM_{Eg} m_g}{R_E^2} \tag{8.34}$$

यहां M_{Eg} पृथ्वी का गुरुत्वीय द्रव्यमान है। समीकरण (8.33) तथा (8.34) से हमें

$$\frac{GM_{Eg}m_g}{R_E^2} = m_i a$$

प्राप्त होता है । अत: त्वरण का मान

$$a = \frac{m_g g}{m_i}$$

होगा । यहां $g = \frac{GM_{Eg}}{R_E^2}$ है ।

यदि हम भिन्न द्रव्यमान का कोई अन्य पिण्ड लें तो

$$A = \frac{M_g g}{M_i}$$

गैलीलियो के प्रयोग ने यह सिद्ध किया कि $a = A$ होता है । अत:

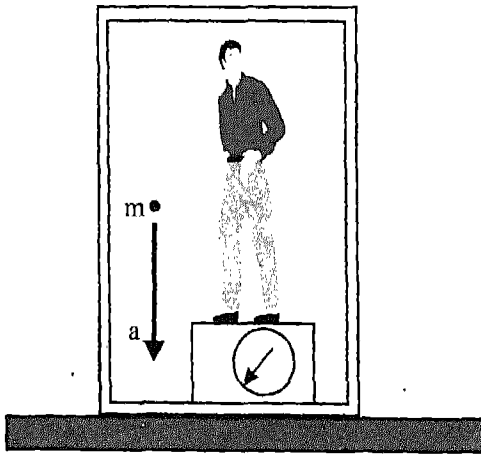
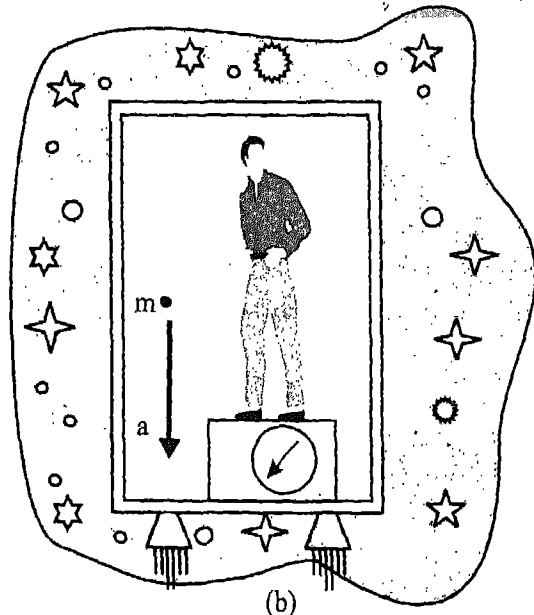
$$\frac{m_g}{m_i} = \frac{M_g}{M_i} = k$$

दूसरे शब्दों में गुरुत्वीय द्रव्यमान तथा जड़त्वीय द्रव्यमान का अनुपात पिंड पर निर्भर नहीं करता । आनुपातिकता नियतांक का मान वही रहता है चाहे द्रव्यमान कुछ भी हो । यदि $k = 1$ लें तो व्यापकता में कोई हानि नहीं होती । अत:

$$\frac{m_g}{m_i} = \frac{M_g}{M_i} = 1$$

अत: विश्व के प्रत्येक पिंड के लिए हम जड़त्वीय द्रव्यमान व गुरुत्वीय द्रव्यमान को समान मान सकते हैं । न्यूटन को दो मूल नियमों में प्रकट होने वाले द्रव्यमानों की इस सर्वसमता को देखकर स्वयं भी जिज्ञासा हुई । इस सर्वसमता का परीक्षण करने के लिए उन्होंने सरल लोलक की तरह के कुछ प्रयोग किए । उन्होंने पाया कि दोलन कर रहे खोखले गोलक के परिमाण तथा उसके पदार्थ के गुण पर लोलक का आवर्तकाल T निर्भर नहीं करता । यहां हम महान वैज्ञानिक को उन्हीं के शब्दों में उद्धृत कर रहे हैं, "मैंने यह प्रयोग सोना, चाँदी, सीसा, कांच आदि पदार्थों की वस्तुओं के साथ किए"......"मैं कुल के हज़ारवें भाग तक के पदार्थ के अंतर को खोजने में सक्षम था" ।

1909 में योटवॉस ने परिशुद्धता के दृष्टिकोण से 10^9 में 5 भाग का सुधार किया । अभी हाल ही में गुरुत्वीय व जड़त्वीय द्रव्यमानों में समानता (अथवा अधिक शुद्ध रूप में कहें तो अनुपातत:) की 10^{12} में एक भाग तक का परीक्षण किया जा चुका है !

बीसवीं शताब्दी के आरंभ में अल्बर्ट आइंस्टीन ने इस समतुल्यता की और आगे खोज की । कल्पना कीजिए कि कोई

चित्र 8.13 आइंस्टीन बाक्स : पृथ्वी के पृष्ठ पर विरामावस्था में रखे किसी बंद कक्ष के भीतर कोई व्यक्ति । यही व्यक्ति अंतरतारकीय अंतरिक्ष में $9.8\ m\ s^{-2}$ से त्वरित हो रहा है । कक्ष के भीतर विद्यमान किसी व्यक्ति के लिए यह संभव नहीं होता कि वह दो कक्षों में विभेदन कर सके ।

* यह दर्शाया जा सकता है कि k के किसी अन्य मान के लिए केवल G का कोई भिन्न आंकिक मान प्राप्त होगा ।

व्यक्ति किसी बंद बॉक्सनुमा लिफ्ट तक सीमित है तथा उसके पास जीवनयापन के सभी साधन उपलब्ध हैं। परन्तु बाहरी संसार से संपर्क करने का उसके पास कोई साधन नहीं है तथा वह सभी गुरुत्वीय पिण्डों से दूर है। चित्र 8.13 में दर्शाए इस प्रकार के निकाय को **आइंस्टीन बॉक्स** कहते हैं। मान लीजिए कि बॉक्स में $+z$-दिशा में 9.81 m s^{-2} का त्वरण उत्पन्न किया जाता है। बॉक्स के भीतर बैठा व्यक्ति कोई भी प्रयोग क्यों न करे, वह किसी प्रकार से भी यह नहीं बता सकता कि बॉक्स त्वरित हो रहा है या नहीं अथवा $-z$–दिशा में कोई गुरुत्वीय क्षेत्र विद्यमान है या नहीं। आइंस्टीन (एक अन्य महान वैज्ञानिक) के शब्दों में "इस सरल विचार ने मेरे ऊपर गहरा प्रभाव डाला। इसने मुझे गुरुत्वाकर्षण के सिद्धांत की ओर प्रेरित किया।"

सारांश

1. न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम यह बतलाता है कि एक दूसरे से r दूरी पर स्थित m_1 व m_2 द्रव्यमान के दो कणों के मध्य लगने वाले आकर्षक बल का परिमाण निम्नलिखित होता है

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियतांक है जिसका मान $6.672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ होता है।

2. यदि हम कई द्रव्यमानों $M_1, M_2, ...M_n$ आदि के कारण m द्रव्यमान के किसी कण पर परिणामी बल ज्ञात करना चाहते हैं तो हम अध्यारोपण के सिद्धांत का उपयोग करते हैं। कल्पना कीजिए कि गुरुत्वाकर्षण के नियम से $M_1, M_2, ...M_n$ द्रव्यमानों में से प्रत्येक के कारण m द्रव्यमान पर आरोपित पृथक्–पृथक् बल $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, ...\mathbf{F}_n$ हैं। तब अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार प्रत्येक बल स्वतंत्रतापूर्वक कार्य करता है तो अन्य पिंड उसे प्रभावित नहीं करते। अतः परिणामी बल $\mathbf{F}_R$ को हम सदिश योग विधि द्वारा ज्ञात कर लेते हैं

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

यहां चिह्न Σ योग को व्यक्त करता है।

3. केप्लर के ग्रह गति नियम बतलाते हैं कि

(i) सभी ग्रह दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में गति करते हैं तथा सूर्य दीर्घवृत्त की दो में से किसी एक नाभि पर स्थित होता है।

(ii) सूर्य से किसी ग्रह तक खींचा गया त्रिज्या सदिश समान समय अंतरालों में समान क्षेत्रफल तय करता है। यह इस तथ्य का परिणाम है कि किसी ग्रह पर लगने वाला गुरुत्वीय बल केंद्रीय बल होता है। अतः कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

(iii) किसी ग्रह के परिक्रमण काल का वर्ग उसकी दीर्घवृत्तीय कक्षा के अर्धदीर्घ-अक्ष के घन के अनुक्रमानुपाती होता है,

सूर्य के परितः वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण कर रहे ग्रह के आवर्तकाल T तथा उसकी त्रिज्या में निम्नलिखित संबंध होता है,

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right)R^3$$

यहां M_s सूर्य का द्रव्यमान है। अधिकांश ग्रहों का पथ सूर्य के परितः लगभग वृत्तीय होता है।

यदि R को अर्धदीर्घ-अक्ष a से प्रतिस्थापित कर दें, तो दीर्घवृत्तीय कक्षाओं के लिए भी उपर्युक्त समीकरण लागू होगी।

4. गुरुत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी के पृष्ठ से h ऊंचाई पर,

$$g(h) = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}$$

$$\approx \frac{GM_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right), \quad h << R_E$$

$$g(h) = g(0)\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \text{ यहां } g(0) = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

(ii) पृथ्वी से d गहराई पर,

$$g(d) = \frac{GM_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{d}{R_E}\right) = g(0)\left(1 - \frac{d}{R_E}\right) \text{ होगा}$$

(iii) अक्षांश λ पर इसका मान लगभग

$g(\lambda) = g(0) - \Omega^2 R_E \cos\lambda$ होगा।

यहां $\Omega = 7.3 \times 10^{-5}\,\text{rad s}^{-1}$ पृथ्वी की कोणीय चाल है तथा $g(0) = \frac{GM_E}{R_E^2}$ है। पृथ्वी की अगोलीय आकृति के कारण अतिरिक्त संशोधन करने होते हैं।

5. गुरुत्वीय बल एक संरक्षी बल होता है। इसलिए किसी स्थितिज ऊर्जा फलन को परिभाषित किया जा सकता है। एक दूसरे से r दूरी पर स्थित दो कणों से संबद्ध गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$V = \frac{-Gm_1m_2}{r}$$

दूरी r के अनन्त की ओर अग्रसर होने पर V का मान शून्य हो जाता है। कणों के निकाय की कुल ऊर्जा कणों के सभी युग्मों की ऊर्जा के योग के बराबर होती है। प्रत्येक युग्म की स्थितिज ऊर्जा का मान उपर्युक्त समीकरण से व्यक्त होता है। यह निर्धारण अध्यारोपण के सिद्धांत का परिणाम है।

6. यदि किसी वियुक्त निकाय में m द्रव्यमान का कोई कण M द्रव्यमान के किसी भारी पिण्ड के समीप v चाल से गतिमान है तो निकाय की कुल ऊर्जा निम्नलिखित सूत्र द्वारा व्यक्त की जाती है,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

अर्थात् कुल यांत्रिक ऊर्जा गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं का योग है। कुल ऊर्जा गति का नियतांक होती है। इस प्रकार गुरुत्वाकर्षण में कम से कम दो राशियां संरक्षित रहती हैं :

(i) कोणीय संवेग – केप्लर के दूसरे नियम की व्याख्या इस पर आधारित है।

(ii) कुल यांत्रिक ऊर्जा।

7. यदि द्रव्यमान M के परितः a त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में m द्रव्यमान का कोई पिण्ड परिक्रमण कर रहा है, $(M >> m)$ है, तो निकाय की कुल ऊर्जा

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

इसमें स्वेच्छ नियतांक का चुनाव उपरोक्त बिंदु (5) के अनुसार है।

किसी दीर्घवृत्तीय कक्षा जैसी बंद कक्षा अथवा किसी परिबद्ध निकाय के लिए कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है। गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाएं निम्नलिखित होती हैं

$$K = \frac{GMm}{2a}$$

$$V = -\frac{GMm}{a}$$

8. पृथ्वी के पृष्ठ से पलायन चाल है,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

इसका मान $11.2\,\text{km s}^{-1}$ है।

9. यदि कोई कण किसी एकसमान गोलीय खोल या ठोस गोले, जिसके भीतर द्रव्यमान वितरण में गोलीय सममिति है, के बाहर स्थित है, तो गोला कण को इस प्रकार आकर्षित करता है जैसे कि गोले का संपूर्ण द्रव्यमान उसके केंद्र पर संकेंद्रित हो।
10. यदि कोई कण किसी एकसमान गोलीय खोल के भीतर है, तो कण के ऊपर लगने वाला गुरुत्वीय बल शून्य होगा। यदि कण किसी समांगी ठोस गोले के भीतर है, तो कण पर लगने वाला बल गोले के केंद्र की ओर होता है। कण के ऊपर लगने वाला बल गोले के आंतरिक द्रव्यमान के कारण होता है (आप इसकी उपपत्ति परिशिष्ट में देख सकते हैं)।
11. कोई तुल्यकाली (संप्रेषण) उपग्रह पृथ्वी के केंद्र से लगभग 4.22×10^4 km दूर स्थित विषुवतीय समतल की वृत्तीय कक्षा में गति करता है।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएं	मात्रक	टिप्पणी
गुरुत्वीय नियतांक	G	$[M^{-1}L^3T^{-2}]$	N $m^2 kg^{-2}$	6.67×10^{-11}
गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा	$V(r)$	$[ML^2T^{-2}]$	J	$-GMm/r$ (अदिश)
गुरुत्वीय विभव	$U(r)$	$[L^2T^{-2}]$	J kg^{-1}	$-GM/r$ (अदिश)
गुरुत्वीय तीव्रता	**E** या g	$[LT^{-2}]$	m s^{-2}	$\frac{GM}{r^2}\hat{r}$ (सदिश)

विचारणीय विषय

1. किसी पिण्ड की किसी अन्य पिण्ड के अंतर्गत गति के विषय में विचार करते समय निम्नलिखित राशियां संरक्षित रहती हैं :

   (a) कोणीय संवेग

   (b) कुल यांत्रिक ऊर्जा

   रैखिक संवेग संरक्षित नहीं रहता।
2. कोणीय संवेग के संरक्षण से केप्लर का दूसरा नियम प्राप्त होता है। परंतु यह गुरुत्व के व्युत्क्रम वर्ग के लिए विशिष्ट नहीं है। यह किसी भी केंद्रीय बल के लिए लागू होता है।
3. केप्लर के तृतीय नियम [समीकरण (8.1) व (8.13) देखें] में $T^2 = k_s R^3$। नियतांक k_s वृत्तीय कक्षाओं वाले सभी ग्रहों के लिए समान होता है। इसका मान ग्रहों के अनुसार नहीं बदलता। पृथ्वी की परिक्रमा करने वाले उपग्रहों पर भी यही टिप्पणी लागू होती है (समीकरण 8.25b)।
4. अंतरिक्ष उपग्रह के भीतर कोई अंतरिक्ष यात्री भारहीनता का अनुभव करता है। ऐसा इस कारण नहीं होता कि अंतरिक्ष में उस अवस्थिति पर गुरुत्वीय बल कम है वरन् उसका कारण यह है कि अंतरिक्ष यात्री तथा उपग्रह दोनों ही पृथ्वी की ओर 'स्वतंत्रतापूर्वक' (मुक्त पतन) गिर रहे हैं।
5. एक दूसरे से r दूरी पर स्थित दो कणों से संबद्ध गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

   $$V = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \text{स्थिरांक}$$

   यहां नियतांक का मान कुछ भी हो सकता है। इसे शून्य मानना सबसे सरल विकल्प है। इस विकल्प से

   $$V = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

   इस चुनाव में यह अंतर्निहित है कि जब $r \to \infty$ तो $V \to 0$ होता है। गुरुत्वीय ऊर्जा की शून्य की अवस्थिति का चुनाव स्थितिज ऊर्जा में स्वेच्छ नियतांक चुनने के समान है। ध्यान दीजिए, गुरुत्वीय बल उस नियतांक के चुनाव से परिवर्तित नहीं होता।

6. किसी पिण्ड (मान लीजिए, कक्षा में उपग्रह) की कुल यांत्रिक ऊर्जा ऋणात्मक होगी यदि वह परिबद्ध है, उदाहरणार्थ उसकी कक्षा दीर्घवृत्त या वृत्त है । परंतु इसका मान सदैव ही ऋणात्मक नहीं होता । उस प्रकरण जिसमें प्रक्षेप-पथ अतिदीर्घवृत्त है तथा पिण्ड केंद्रीय तारे या उसके समतुल्य से परिबद्ध नहीं है, तो यह धनात्मक भी हो सकती है । ये प्रकथन स्पष्ट रूप से सत्य हैं, जब स्थितिज ऊर्जा का शून्य अनन्त पर चुना जाता है ।
7. प्राय: स्थितिज ऊर्जा के जिस व्यंजक mgh से हमारा सामाना होता है वह वास्तव में उपर्युक्त बिंदु (6) में विवेचित गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा के अंतर का सन्निकटन है । इस व्यंजक की उपपत्ति के लिए पाठक अनुभाग 8.6 तथा विशेषकर समीकरण 8.22 की व्युत्पत्ति का अध्ययन करें ।
8. यद्यपि दो कणों के मध्य गुरुत्वीय बल केंद्रीय बल है, किन्तु यह आवश्यक नहीं है कि किन्हीं दो परिमित दृढ़ पिण्डों के बीच लगने वाला बल उन द्रव्यमानों के केंद्रों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश हो । तथापि किसी गोलीय सममित पिण्ड के लिए उस पिण्ड से बाहर स्थित किसी कण पर लगा बल ऐसा होता है जैसे कि पिण्ड का द्रव्यमान उसके केंद्र पर संकेंद्रित हो तथा यह बल इसलिए केंद्रीय बल होता है ।
9. किसी गोलीय खोल के भीतर किसी कण पर गुरुत्वीय बल शून्य होता है तथापि (किसी धात्विक खोल के विपरीत, जो वैद्युत बलों के लिए कवच का काम करता है) वह खोल अपने से बाहर स्थित दूसरे पिण्डों को अपने भीतर के किसी कण पर लगने वाले गुरुत्वीय बल से परिरक्षित नहीं करता । *गुरुत्वीय परिरक्षण संभव नहीं है ।*
10. जड़त्वीय व गुरुत्वीय द्रव्यमानों की समानता (अथवा अधिक शुद्ध रूप में कहें तो आनुपातित:) स्पष्ट नहीं है, तथा इसकी कोई सैद्धांतिक उपपत्ति नहीं है । यह प्रायोगिक तथ्य है तथा गैलीलियो के उस प्रेक्षण का आधार है कि "भारी व हल्के पिण्ड समान गुरुत्वीय त्वरण से नीचे गिरते हैं" ।

अभ्यास

8.1 निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(a) प्रकृति में बलों के ज्ञात प्रकारों में गुरुत्वीय बल सबसे दुर्बल है, तथापि यह पार्थिव खगोलीय व ब्रह्माण्डकीय पैमाने पर पिण्डों की गति में प्रधान भूमिका क्यों निभाता है ?

(b) क्या घर्षण बल तथा अन्य संपर्क बल गुरुत्वाकर्षण के कारण उत्पन्न होते हैं ? यदि नहीं, तो इन बलों का उद्गम क्या है ?

(c) आप किसी आवेश को किसी खोखले चालक के भीतर रखकर वैद्युत बलों से परिरक्षित कर सकते हैं। क्या आप किसी वस्तु को किसी खोखले गोले के अंदर रखकर या किसी अन्य साधन द्वारा गुरुत्वीय प्रभाव से परिरक्षित कर सकते हैं ?

(d) पृथ्वी के परित: परिक्रमण कर रहे किसी छोटे अंतरिक्षयान में कोई अंतरिक्ष यात्री गुरुत्व को अनुभव नहीं कर सकता। यदि पृथ्वी के परित: परिक्रमण कर रहे अंतरिक्ष स्टेशन का आकार बड़ा हो तो क्या वह गुरुत्व के संसूचन की आशा कर सकता है ?

(e) यदि आप पृथ्वी पर सूर्य के कारण गुरुत्वीय बल की तुलना चंद्रमा के कारण गुरुत्वीय बल के साथ करें तो आप पाएंगे कि सूर्य का आकर्षण चंद्रमा के आकर्षण से अधिक है। आगामी अभ्यासों में दिए गए आंकड़ों से आप स्वयं इसकी पुष्टि कर सकते हैं। तथापि चंद्रमा के आकर्षण का ज्वारीय प्रभाव सूर्य के ज्वारीय प्रभाव से अधिक है। क्यों ?

8.2 सही विकल्प चुनिए :

(i) गुरुत्वीय त्वरण ऊंचाई बढ़ने के साथ बढ़ता/घटता है।

(ii) गुरुत्वीय त्वरण गहराई बढ़ने के साथ बढ़ता/घटता है (पृथ्वी को एकसमान घनत्व का गोला मानिए)।

(iii) गुरुत्वीय त्वरण के प्रभावी मान पर घूर्णन का प्रभाव विषुवत् वृत्त/ध्रुवों पर सर्वाधिक है।

(iv) गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी के द्रव्यमान/पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता।

(v) पृथ्वी के केंद्र से r_2 व r_1 की दूरी पर दो बिंदुओं के स्थितिज ऊर्जा-अंतर के लिए सूत्र $mg\,(r_2 - r_1)$ की $-GMm\,(1/r_2 - 1/r_1)$ अधिक/कम परिशुद्ध है।

8.3 सही विकल्प चुनिए :

(i) यदि अनन्त दूरी पर स्थित दो बिंदु द्रव्यमानों की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा को शून्य माना जाए, तो किसी आकाशगंगा की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (धनात्मक/ऋणात्मक/शून्य) है।

(ii) विश्व का आकार बड़े पैमाने पर (गुरुत्वीय/वैद्युतचुंबकीय) बलों द्वारा, परमाण्वीय पैमाने पर (गुरुत्वीय/वैद्युतचुंबकीय) बलों द्वारा, नाभिकीय पैमाने पर (गुरुत्वीय/वैद्युतचुंबकीय/प्रबल नाभिकीय) बलों द्वारा दिया जाता है।

(iii) यदि स्थितिज ऊर्जा का शून्य अनन्त पर है, तो परिक्रमण कर रहे किसी उपग्रह की कुल ऊर्जा इसकी गतिज/स्थितिज ऊर्जा का ऋणात्मक है।

(iv) परिक्रमण कर रहे किसी उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वीय प्रभाव से बाहर निकालने के लिए आवश्यक ऊर्जा समान ऊंचाई (जितनी उपग्रह की है) पर किसी स्थिर पिण्ड को पृथ्वी के प्रभाव से बाहर निकालने के लिए आवश्यक ऊर्जा से अधिक/कम होती है।

8.4 क्या पृथ्वी से किसी पिण्ड की पलायन चाल निम्न पर निर्भर करती है :

(a) पिण्ड का द्रव्यमान, (b) प्रमोचन का स्थान, (c) प्रमोचन की दिशा, (d) उस स्थान की ऊंचाई जहां से पिण्ड प्रमोचित किया गया है? अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए।

8.5 कोई धूमकेतु सूर्य के परितः अत्यंत दीर्घवृत्तीय कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। क्या संपूर्ण कक्षा में धूमकेतु की कोई नियत (a) रैखिक चाल, (b) कोणीय चाल, (c) कोणीय संवेग, (d) गतिज ऊर्जा, (e) कुल ऊर्जा है? सूर्य के अति निकट आने पर धूमकेतु के द्रव्यमान में हुई किसी भी हानि की उपेक्षा कीजिए।

8.6 नीचे दिए गए प्रेक्षणों में से कौन-सा प्रेक्षण जड़त्वीय व गुरुत्वीय द्रव्यमान की तुल्यता की ओर संकेत करता है :

(a) किसी लंबी निर्वातित नली के ऊपरी सिरे से गिराए गए भिन्न द्रव्यमानों के दो गोले नली के निचले सिरे पर एक ही समय पहुंचते हैं।

(b) किसी साधारण लोलक का आवर्तकाल इसके द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

(c) पृथक् खोखले गोले के अंदर किसी कण पर गुरुत्वीय बल शून्य होता है।

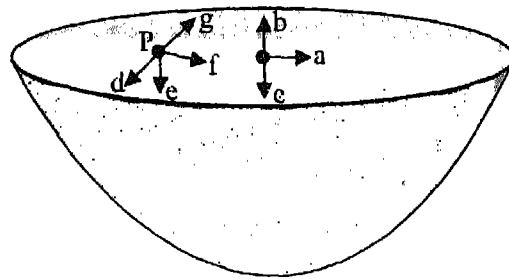
(d) गुरुत्व के प्रभाव में मुक्त रूप से गिर रहे किसी बंद केबिन के भीतर किसी व्यक्ति के लिए गुरुत्व "लुप्त हो जाता है"।

(e) पृथ्वी के परितः परिक्रमण कर रहे अंतरिक्षयान के भीतर कोई अंतरिक्ष यात्री भारहीन अनुभव करता है।

(f) सूर्य के परितः परिक्रमण करने वाले ग्रह केप्लर के तीसरे नियम का (सन्निकटतः) पालन करते हैं।

(g) पृथ्वी के कारण किसी पिण्ड पर गुरुत्वीय बल उस पिण्ड के कारण पृथ्वी पर गुरुत्वीय बल के बराबर व विपरीत है।

8.7 इनमें से कौन-से लक्षण अंतरिक्ष यात्रियों को आक्रांत करते हैं (a) पैरों का सूजना, (b) चेहरे का सूजना, (c) सिर दर्द, (d) दिगविन्यास संबंधी समस्याएं।

8.8 ढोल के पृष्ठ (किसी अर्धगोलीय खोल का भाग) के केंद्र पर गुरुत्वीय तीव्रता की दिशा किस तीर द्वारा प्रदर्शित होगी (चित्र 8.15 देखिए) (i) a, (ii) b, (iii) c, (iv) शून्य

चित्र 8.15

8.9 उपरोक्त प्रश्न में किसी स्वेच्छ बिन्दु P पर गुरुत्वीय तीव्रता की दिशा किस तीर के द्वारा व्यक्त होगी (i) d, (ii) e, (iii) f, (iv) g

8.10 पृथ्वी से कोई राकेट सूर्य की ओर दागा गया है। पृथ्वी के केंद्र से कितनी दूरी पर राकेट पर लगने वाला गुरुत्वीय बल शून्य होगा? सूर्य का द्रव्यमान $= 2 \times 10^{30}$ kg, पृथ्वी का द्रव्यमान $= 6 \times 10^{24}$ kg। अन्य ग्रहों आदि के प्रभाव की उपेक्षा कीजिए (कक्षीय त्रिज्या $= 1.5 \times 10^{11}$m)।

8.11 आप 'सूर्य को किस प्रकार तोलेंगे', अर्थात् इसके द्रव्यमान का अनुमान कैसे लगाएंगे ? इसके लिए आपको इसके किसी ग्रह के परिक्रमण काल तथा ग्रह की कक्षा की त्रिज्या के जानने की आवश्यकता होगी। सूर्य के परितः पृथ्वी की माध्य कक्षीय त्रिज्या 1.5×10^8 km है। सूर्य के द्रव्यमान का अनुमान लगाइए।

8.12 एक शनि-वर्ष पृथ्वी-वर्ष का 29.5 गुना है। यदि सूर्य से पृथ्वी की दूरी 1.50×10^8 km है, तो सूर्य से शनि कितनी दूर है ?

8.13 पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी पिंड का भार 63 N है। यदि यही पिण्ड पृथ्वी के पृष्ठ से उसकी त्रिज्या की आधी ऊंचाई पर स्थित है तो उस पर पृथ्वी के कारण लगने वाला गुरुत्वीय बल कितना होगा ?

8.14 पृथ्वी को एकसमान द्रव्यमान-घनत्व का गोला मानते हुए यदि किसी वस्तु का पृथ्वी के पृष्ठ पर भार 250 N है तो पृथ्वी के केंद्र की ओर आधे पथ पर उसका भार क्या होगा ?

8.15 पृथ्वी के पृष्ठ से कोई राकेट 5 km s^{-1} की चाल से ऊर्ध्वाधर दागा जाता है। पृथ्वी पर लौटने से पहले राकेट पृथ्वी से कितनी दूर जाता है ? पृथ्वी का द्रव्यमान $= 6.0 \times 10^{24}$ kg, पृथ्वी की माध्य त्रिज्या $= 6.4 \times 10^6$ m, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}।

8.16 पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी प्रक्षेपक की पलायन चाल 11.2 km s^{-1} है। किसी पिण्ड को इससे तीन गुनी चाल से प्रक्षेपित किया जाता है। पिण्ड की पृथ्वी से पर्याप्त दूरी पर चाल क्या है ? सूर्य व अन्य ग्रहों की उपस्थिति की उपेक्षा कीजिए।

8.17 कोई उपग्रह पृथ्वी के परितः उसके पृष्ठ से 400 km ऊंचाई पर परिक्रमण कर रहा है। पृथ्वी के गुरुत्वीय प्रभाव से उपग्रह को बाहर निकालने के लिए कितनी ऊर्जा खर्च की जानी चाहिए ? उपग्रह का द्रव्यमान = 200 kg, पृथ्वी का द्रव्यमान $= 6.0 \times 10^{24}$ kg, पृथ्वी की त्रिज्या $= 6.4 \times 10^6$ m, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$ ।

8.18 1 सौर द्रव्यमान ($= 2 \times 10^{30}$ kg) के दो तारे एक-दूसरे की ओर प्रत्यक्ष संघट्ट के लिए आ रहे हैं। जब वे 10^9 km की दूरी पर हैं तो उनकी चालें उपेक्षणीय हैं। वे किस चाल से टकराते हैं ? प्रत्येक तारे की त्रिज्या 10^4 km है। यह मानिए कि जब तक तारे टकराते नहीं तब तक उनमें कोई विरूपण नहीं होता। (G के ज्ञात मान का उपयोग कीजिए)।

8.19 किसी क्षैतिज मेज पर दो भारी गोले, प्रत्येक का द्रव्यमान 100 kg व त्रिज्या 0.10 m है, एक-दूसरे से 1.0 m की दूरी पर रखे गए हैं। गोलों के केंद्रों को मिलाने वाली रेखा के मध्य-बिंदु पर गुरुत्वीय क्षेत्र व विभव क्या है। उस बिंदु पर रखी गई कोई वस्तु क्या संतुलन में है ? यदि हां, तो क्या संतुलन स्थायी है अथवा अस्थायी ?

8.20 जैसा कि आपने इस अध्याय में पढ़ा है, कोई तुल्यकाली उपग्रह पृथ्वी के पृष्ठ से लगभग 36,000 km ऊंचाई पर पृथ्वी के परितः परिक्रमण करता है। उपग्रह के स्थान पर पृथ्वी के गुरुत्व के कारण विभव क्या है ? (अनन्त पर स्थितिज ऊर्जा को शून्य मानिए)। पृथ्वी का द्रव्यमान $= 6.0 \times 10^{24}$ kg, त्रिज्या = 6400 km।

8.21 दो चरण वाले किसी उपग्रह में, पहला चरण उपग्रह को 150 km की ऊंचाई तक ले जाता है और दूसरा चरण इसे पृथ्वी के परितः किसी वृत्तीय पथ में रखने के लिए आवश्यक क्रांतिक चाल प्रदान करता है। कौन-से चरण के लिए ईंधन की खपत अधिक होगी ? (विशेषतः पहले चरण में वायु-प्रतिरोध के कारण अवमंदन की उपेक्षा कीजिए)। पृथ्वी का द्रव्यमान $= 6.0 \times 10^{24}$ kg, त्रिज्या = 6400 km तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$।

8.22 किसी काल्पनिक ग्रह परिवार में केंद्रीय तारे का द्रव्यमान वही है जो हमारे सूर्य का है, परन्तु यह कहीं अधिक चमकीला है जिसके कारण केवल उसी ग्रह पर जीवन हो सकता है, जो सूर्य व पृथ्वी के बीच की दूरी के दोगुने पर स्थित है। उस ग्रह पर जैव विकास (काल-प्रभावन प्रक्रिया आदि सहित) पृथ्वी जैसा ही मानिए। उस ग्रह पर प्राकृतिक वर्ष के पदों में किसी "मानव" की औसत जीवन अवधि क्या होगी ? पृथ्वी पर मानव की औसत जीवन अवधि 70 वर्ष मानिए।

अतिरिक्त अभ्यास

8.23 कल्पना कीजिए कि पृथ्वी के व्यास के अनुदिश कोई सुरंग खोदी गई है। यह प्रदर्शित कीजिए कि सुरंग के एक किनारे से फेंका गया कोई कण सरल आवर्त गति करता है। इस गति का आवर्तकाल क्या है ? पृथ्वी को एकसमान द्रव्यमान घनत्व (इसके ज्ञात माध्य घनत्व = 5520 kg m^{-3} के बराबर) का कोई गोला मानिए। $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$। सभी अवमंदक (damping) बलों की उपेक्षा कीजिए।

8.24 यदि पृथ्वी 6.37×10^6 m त्रिज्या का कोई आदर्श गोला होती, जो अपने अक्ष के परितः 1 दिन ($= 8.64 \times 10^4$ s) के घूर्णन काल के साथ घूर्णन कर रही है, तो गुरुत्वीय त्वरण (g) ध्रुवों से विषुवत् वृत्त तक कितना परिवर्तित होता।

8.25 सूर्य के द्रव्यमान से 2.5 गुना का कोई तारा जिसका 12 km के आकार में निपात हो गया है, 1.5 rev प्रति सेकंड की चाल से घूर्णन कर रहा है। (इसी प्रकार के अत्यंत संहत तारों को **न्यूट्रॉन तारे** कहते हैं। ऐसा विश्वास है कि पल्सार कहे जाने वाले कुछ प्रेक्षित तारकीय पिण्ड इसी श्रेणी के हैं)। इसके विषुवत् वृत्त पर रखा कोई पिण्ड गुरुत्व के कारण क्या इसके साथ चिपका रहेगा? (सूर्य का द्रव्यमान $= 2 \times 10^{30}$ kg)।

8.26 कोई अंतरिक्षयान मंगल पर ठहरा हुआ है। अंतरिक्षयान पर कितनी ऊर्जा खर्च की जानी चाहिए कि यह सौर परिवार से बाहर निकल जाए? अंतरिक्षयान का द्रव्यमान = 1000 kg, सूर्य का द्रव्यमान $= 2 \times 10^{30}$ kg, मंगल का द्रव्यमान $= 6.4 \times 10^{23}$ kg, मंगल की त्रिज्या = 3395 km, मंगल की कक्षा की त्रिज्या $= 2.28 \times 10^{8}$ km, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}।

8.27 मंगल के पृष्ठ से किसी राकेट को 2 km s^{-1} की चाल से ऊर्ध्वाधर दागा गया है। यदि इसकी लगभग 20% आरंभिक ऊर्जा मंगल के वायुमंडल के प्रतिरोध के कारण नष्ट हो जाती है तो मंगल पर लौटने से पहले राकेट कितनी दूर तक जाएगा? मंगल का द्रव्यमान $= 6.4 \times 10^{23}$ kg, मंगल की त्रिज्या = 3395 km, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}।

8.28 R त्रिज्या के किसी असमांगी गोले के घनत्व में परिवर्तन निम्नलिखित है :

$$\rho = \rho_0, \qquad r \le R/3$$

$$= \frac{1}{2}\rho_0, \qquad \frac{R}{3} < r \le \frac{3R}{4}$$

$$= \frac{1}{8}\rho_0, \qquad \frac{3R}{4} < r \le R$$

गोले के कारण $r = R/4$, $5R/6$ व $2R$ पर गुरुत्वीय क्षेत्र क्या है। (किसी बिंदु का गुरुत्वीय क्षेत्र वह बल है जिसे उस बिंदु पर रखा कोई एकांक द्रव्यमान का पिण्ड अनुभव करता है।)

8.29 किसी विशाल तारे से आने वाले प्रकाश में "गुरुत्वीय अभिरक्त-विस्थापन" (gravitational red shift) होता है, अर्थात् तारे के गुरुत्वाकर्षण के कारण इसकी तरंगदैर्ध्य अभिरक्त सिरे की ओर परिवर्तित हो जाती है। साधारण तथ्यों, जैसे ν आवृत्ति के फोटॉन की ऊर्जा $h\nu$ (h = प्लैंक नियतांक) व द्रव्यमान $h\nu/c^2$ है, का उपयोग करते हुए इस गुरुत्वीय अभिरक्त विस्थापन के लिए कोई सूत्र ज्ञात कीजिए। द्रव्यमान 10^{32} kg व त्रिज्या 10^6 km के किसी तारे से 5000 Å तरंगदैर्ध्य के प्रकाश के लिए अभिरक्त-विस्थापन के परिमाण का अनुमान लगाइए। G व c के ज्ञात मान प्रयोग कीजिए।

($G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, $c = 3.00 \times 10^8$ m s^{-1})

8.30 निम्नलिखित समस्या अभिकलित्र/कंप्यूटर के प्रयोग पर आधारित है:

पृथ्वी को स्थायी घनत्व वाला गोला मानकर हमने इसके गुरुत्वीय त्वरण की गहराई पर निर्भरता $g(d)$ के विषय में पढ़ा है। जीवोन्स्की तथा एन्डरसन (Dziewonski and Anderson) ने पांच सोपानों के (जैसा कि नीचे सारणी में दर्शाया गया है) अति परिष्कृत मॉडल की रूपरेखा प्रस्तुत की है। r के सापेक्ष $g(r)$ में हो रहे परिवर्तन को आलेखित कीजिए। r पृथ्वी के केंद्र से दूरी को व्यक्त करता है ($0 < r < R_E$)।

सोपान	आंतरिक त्रिज्या (km)	बाह्य त्रिज्या (km)	माध्य घनत्व (10^3 kg m^{-3})
आंतरिक क्रोड	0.0	1221.5	12.893
बाह्य क्रोड	1221.5	3480.0	10.901
निम्न आवरण	3480.0	5701.0	4.904
उच्च आवरण	5701.0	6346.6	3.605
भूपृष्ठ/महासमुद्र	6346.6	6371.0	2.395
कुल	0	6371.0	5.513

परिशिष्ट 8.1 : खोल प्रमेय

हम यह सिद्ध करेंगे कि किसी गोलीय खोल के भीतर कहीं भी स्थित किसी द्रव्यमान पर लगने वाला गुरुत्वीय बल शून्य होता है । आधुनिक पाठ्यपुस्तकों में इसे समाकलन-गणित की सहायता से सिद्ध किया गया है । किन्तु हम यहां विशुद्ध ज्यामितीय ढंग से इसे सिद्ध करेंगे । इस विधि को न्यूटन ने ***प्रिंसीपिया*** में अपनाया था ।

पृष्ठीय द्रव्यमान घनत्व σ तथा त्रिज्या R वाले गोलीय खोल पर विचार कीजिए । यदि परीक्षण द्रव्यमान m को खोल के केंद्र O पर रखा जाए तो सममित के कारण उस पर प्रभावी बल शून्य होगा । यह परिणाम तब भी लागू होता है जब बल व्युत्क्रम वर्ग नियम का पालन नहीं करता, उदाहरणार्थ, यह $1/r^3$ या $1/r^4$ के लिए भी लागू होगा ।

कल्पना कीजिए कि परीक्षण द्रव्यमान को खोल के भीतर किसी स्वेच्छ बिंदु C पर रखा गया है । इसे चित्र 8.14 में दर्शाया गया है । यह कैसे सिद्ध करेंगे कि खोल के कारण इस पर प्रभावी गुरुत्वीय बल शून्य होगा ?

शंकु का एक युग्म इस प्रकार बनाइए जो C की विपरीत दिशाओं में एक छोटा घन कोण $\Delta\Omega$ इस प्रकार बनाए कि खोल P_1P_2 व P_3P_4 पर प्रतिच्छेदित हो । अभिलंब क्षेत्रफल $A(P_1P_5)$ जिसे छायांकित भाग के रूप में दिखाया गया है,

$$A(P_1P_5) = \Delta\Omega\, r_1^2$$

इसी प्रकार

$$A(P_1P_6) = \Delta\Omega\, r_2^2$$

P_1 व P_3 के स्पर्श तल छायांकित भागों P_1P_5 व P_1P_6 से क्रमश: समान कोण α बनाते हैं । अत: खोल के अवयव का क्षेत्रफल

$$A(P_1P_2) = \frac{A(P_1P_5)}{\cos\alpha} = \frac{\Delta\Omega r_1^2}{\cos\alpha}$$

तथा इस अवयव का तदनुरूपी द्रव्यमान

$$\Delta m_1 = \frac{\sigma\Delta\Omega r_1^2}{\cos\alpha}$$

इसी प्रकार कोणीय अवयव P_3P_4 का द्रव्यमान

$$\Delta m_2 = \frac{\sigma\Delta\Omega r_2^2}{\cos\alpha}$$

चित्र 8.14 द्रव्यमान m गोलीय खोल के भीतर किसी स्वेच्छ बिंदु पर रखा हुआ है । खोल के कारण इस पर लगने वाला बल शून्य होगा । प्रतीकों की व्याख्या मूल पाठ में की गई है ।

अत: बिंदु C पर रखे परीक्षण द्रव्यमान m पर इन क्षेत्रीय अवयवों के कारण आरोपित गुरुत्वीय बल

$$\frac{Gm}{r_1^2}\frac{\sigma\Delta\Omega r_1^2}{\cos\alpha} - \frac{Gm}{r_2^2}\frac{\sigma\Delta\Omega r_2^2}{\cos\alpha} = 0$$

इसी प्रकार के सममितीय विपरीत दिशाओं वाले शंकुओं को रखकर हम पूरे खोल को ढक सकते हैं और सिद्ध कर सकते हैं कि खोल के अंदर किसी बिंदु पर स्थित द्रव्यमान पर प्रभावकारी बल शून्य होगा । ध्यान दीजिए कि खोल के भीतर किसी स्वेच्छ बिंदु पर यह परिणाम मात्र $1/r^2$ बल नियम के लिए लागू होता है । यद्यपि हमने उपर्युक्त परिणाम को गोलीय खोल के लिए सिद्ध किया है तथापि इस परिणाम को हम किसी भी स्वेच्छ आकृति के खोखले पिण्ड के लिए सिद्ध कर सकते हैं । सीमित मोटाई के खोल को हम संकेंद्रित पतले खोलों की शृंखला के रूप ले सकते हैं तथा इसके भीतर स्थित परीक्षण द्रव्यमान पर बल के लिए शून्य परिणाम को सिद्ध कर सकते हैं ।

यदि द्रव्यमान m को खोल के बाहर रखा जाए, तो उस पर लगने वाले गुरुत्वीय बल के परिकलन के लिए हम यह मानेंगे कि खोल का संपूर्ण द्रव्यमान उसके केंद्र O पर केंद्रित है । न्यूटन ने इसे केवल ज्यामितीय विधि से सिद्ध किया था न कि समाकलन की विधि से (यद्यपि ऐसा माना जाता है कि लीबनिज के साथ इन्होंने समाकलन गणित की खोज कर ली थी) । इस ज्यामितीय उपपत्ति के विवेचन के लिए हम उत्साही पाठक को भारत में जन्मे खगोल भौतिकविद् तथा नोबेल पुरस्कार विजेता एस. चन्द्रशेखर द्वारा लिखित पुस्तक **न्यूटन्स प्रिंसीपिया फॉर दि कॉमन रीडर** पढ़ने का निर्देश देते हैं ।

अध्याय 9

ठोस यांत्रिकी

9.1 भूमिका

अब तक हमने यांत्रिकी की (अध्याय 3 से 8 तक) जितनी चर्चा की है वह द्रव्य के किसी सूक्ष्म चित्रण पर आधारित नहीं है । नि:संदेह हमने 'कणों' के बारे में विचार विमर्श किया है । यांत्रिकी में कण से हमारा तात्पर्य किसी ऐसे पिण्ड से होता है जिसका आकार नगण्य हो तथा जिसकी कोई आंतरिक रचना न हो । चूंकि आगे हमें ठोसों तथा तरलों की यांत्रिकी का अध्ययन करना है, अत: द्रव्य की परमाण्वीय संरचना के विषय में जानना आवश्यक है ।

प्रत्येक द्रव्य अत्यन्त छोटे घटकों, जिन्हें अणु कहते हैं, से मिलकर बनता है । अणु के अवयव जो प्रकृति में स्वतंत्र रूप में नहीं पाए जाते, परमाणु कहलाते हैं । परमाणु तत्व के सभी गुणों से समाहित होते हैं । कापर अथवा सोडियम जैसे तत्वों के अणु उनके परमाणु ही होते हैं जो इन तत्वों के अभिलाक्षणिक गुणों से युक्त हैं । किसी रासायनिक यौगिक के अणु उसमें उपस्थित विभिन्न तत्वों के परमाणुओं से मिलकर बनते हैं । उदाहरण के लिए, कार्बन डाइऑक्साइड के अणु में कार्बन का एक परमाणु तथा ऑक्सीजन के दो परमाणु होते हैं । कभी-कभी किसी तत्व के छोटे से छोटे कण में भी उस तत्व के कुछ परमाणु होते हैं; जैसे–ऑक्सीजन, नाइट्रोजन । नायलॉन जैसे बहुलकों अथवा प्रोटीन जैसे जैविक अणुओं में सैकड़ों अथवा हजारों परमाणुओं की लंबी श्रृंखलाएं होती हैं ।

इन परमाणुओं अथवा अणुओं की प्ररूपी आमाप क्या है ? इन्हें परस्पर कौन बांधे रखता है ? या किस रूप में द्रव्य की तीन अवस्थाएं (ठोस, द्रव तथा गैस) एक दूसरे से भिन्न हैं ? इस अध्याय के आरंभ में हम ऐसे ही कुछ प्रश्नों की विवेचना करेंगे । तत्पश्चात् अनुभाग 9.6 तथा 9.7 में, हम ठोसों के स्थूल प्रत्यास्थ गुणों तथा उनके अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे । इन अनुभागों में परमाण्विक चित्रण को सम्मिलित नहीं किया गया है । वास्तव में इनमें जिन स्थूल प्रत्यास्थ नियतांकों का वर्णन किया गया है वे अंतरापरमाणुक तथा अंतराणुक बलों की विस्तृत प्रकृति के अध्ययन से उत्पन्न हुए हैं । ठोसों के इस स्थूल अध्ययन को व्यापक रूप में ठोस यांत्रिकी के नाम से जाना जाता है ।

9.2 द्रव्य का आण्विक निरूपण

द्रव्य की संरचना करने वाले सूक्ष्मतम इमारती खण्डों के विषय में जानने के लिए पुरातन काल से ही लोगों ने रुचि ली है । क्या द्रव्य अपने सूक्ष्मतम परिमाप तक सभी आकारों में सतत् है ? अथवा यदि हम द्रव्य को निरन्तर तोड़ते जाएं तो

क्या हमारा सामना विविक्त इकाइयों (परमाणु अथवा अणु) से होता है ? इस प्रकार के प्रश्नों पर विद्वानों में परस्पर वार्तालाप होते रहे जिसके आधार पर उन्होंने द्रव्य के परमाण्विक रूप का अनुमान लगा लिया था । निम्न बॉक्स में उन प्राचीन विद्वानों की वैभवपूर्ण अंतर्दृष्टि की कुछ झलक देखने को मिलती है ।

प्राचीन भारत तथा ग्रीस में परमाण्वीय परिकल्पना

यद्यपि आधुनिक विज्ञान में परमाण्वीय दृष्टिकोण को प्रतिपादित करने का श्रेय जॉन डाल्टन को जाता है । भारत तथा ग्रीस के विद्वानों ने बहुत पहले ही परमाणुओं तथा अणुओं के अस्तित्व के विषय में अनुमान लगा लिया था । भारत में वैशेषिक दर्शन, जिसके प्रणेता कणाद थे (छठी शताब्दी ई०पू०), में परमाण्वीय प्रारूप का विस्तृत विकास हुआ । उन्होंने परमाणुओं को अविभाज्य, सूक्ष्म तथा द्रव्य का अविभाज्य अंश माना । यह भी तर्क दिया गया कि यदि द्रव्य को विभाजित करने के क्रम का कोई अन्त न हो तो किसी सरसों के दाने तथा मेरु पर्वत में कोई अंतर नहीं रहेगा । इस प्रकार के परमाणुओं (संस्कृत में सूक्ष्मतम कण को **परमाणु** कहते हैं) की कल्पना की गई जिनकी अपनी अभिलाक्षणिक संहति तथा अन्य विशेषताएं थीं जो इस प्रकार हैं : भूमि (पृथ्वी), अप् (जल), तेज (अग्नि) तथा वायु (हवा) । उन्होंने आकाश (अंतरिक्ष) को सतत् तथा अक्रिय माना और यह बताया कि इसकी कोई परमाण्वीय संरचना नहीं है । परमाणु संयोग करके विभिन्न अणुओं का निर्माण करते हैं (जैसे दो परमाणु संयोग करके एक द्विपरमाणुक अणु 'द्वैणुक', तीन परमाणुओं के संयोग से 'त्रसरेणु' अथवा त्रिपरमाणुक अणु बनाते हैं), इनके गुण संघटक अणुओं की प्रकृति एवं अनुपात पर निर्भर करते हैं । अनुमानों द्वारा अथवा उन विधियों द्वारा जो हमें ज्ञात नहीं हैं, उन्होंने परमाणुओं के आकार का आकलन भी किया । इन आकलनों में विविधता है । ललित विस्तार - बुद्ध की एक प्रसिद्ध जीवनी जिसे मुख्य रूप से ईसा पूर्व द्वितीय शताब्दी में लिखा गया, में परमाणु का आकार 10^{-10} m की कोटि का बताया गया है । यह आकलन परमाणु के आकार के आधुनिक आकलनों के निकट है ।

पुरातन ग्रीस में, डेमोक्रिटस (चतुर्थ शताब्दी ई.पू.) को उनकी परमाण्वीय परिकल्पना के लिए सर्वश्रेष्ठ माना जाता है । ग्रीक भाषा में 'Atom' शब्द का अर्थ है 'अविभाज्य' । उनके अनुसार परमाणु एक दूसरे से भौतिक रूप में, आकृति में, आकार में तथा अन्य गुणों में भिन्न होते हैं तथा इसी के परिणामस्वरूप उनके संयोग द्वारा निर्मित पदार्थों के भिन्न-भिन्न गुण होते हैं । उनके विचारों के अनुसार जल के अणु चिकने तथा गोल होते हैं तथा वे एक दूसरे के साथ जुड़ने योग्य नहीं होते, यही कारण है कि जल आसानी से प्रवाहित होने लगता है। भूमि के परमाणु खुरदरे तथा काँटेदार होते हैं जिसके कारण वे एक दूसरे को जकड़े रहते हैं तथा कठोर पदार्थ निर्मित करते हैं । उनके विचार से अग्नि के परमाणु कँटीले होते हैं जिसके कारण वे पीड़ादायक जलन उत्पन्न करते हैं। ये धारणाएं चित्ताकर्षक होते हुए भी, और आगे विकसित न हो सकीं। इसका कदाचित यह कारण हो सकता है कि ये विचार उन दार्शनिकों की अंतर्दर्शी कल्पनाएं एवं अनुमान मात्र थे, जिनका न तो परीक्षण किया गया था और न ही मात्रात्मक प्रयोगों (जो कि आधुनिक विज्ञान का प्रमाण-चिह्न हैं) द्वारा संशोधित किए गए थे ।

परमाणु के लिए सर्वप्रथम प्रमाण रसायन विज्ञान से मिले । एक अंग्रेज रसायन शास्त्री जॉन डाल्टन ने यह सुझाया कि आण्विक परिकल्पनाओं के पदों में रासायनिक संयोजन के आनुभविक नियमों की प्राकृतिक व्याख्या मिलती है । **निश्चित अनुपात का नियम** यह बतलाता है कि किसी भी यौगिक में उसके संघटक तत्वों की संहतियों में एक निश्चित अनुपात होता है । **गुणित अनुपात का नियम** उन प्रकरणों का उल्लेख करता है जिनमें दो तत्व संयोग करके विभिन्न यौगिकों का निर्माण करते हैं । यह नियम बताता है कि किसी एक तत्व की निश्चित संहति के लिए अन्य तत्व की संहतियां लघु पूर्णांकों के अनुपात में होती हैं । डाल्टन की परमाण्वीय परिकल्पना के अनुसार, परमाणु द्रव्य के सूक्ष्मतम संघटक होते हैं, किसी तत्व के परमाणु सर्वसम होते हैं तथा इनकी संहतियां अन्य तत्वों के परमाणुओं से भिन्न होती हैं । जब तत्व संयोग करके कोई यौगिक बनाते हैं तब प्रत्येक तत्व के परमाणु छोटी संख्या में संयोग करके उस यौगिक का अणु बनाते हैं । परमाणु के इस चित्रण को **आवोगाद्रो परिकल्पना** ***(किसी दिए गए ताप एवं दाब पर सभी गैसों के समान आयतनों में अणुओं की संख्या समान होती है ।)*** के साथ संयोजित करके गै-लुसैक के नियम ***(जब गैसें रासायनिक संयोग करके अन्य गैसीय उत्पाद बनाती हैं, तब उनके आयतन लघु पूर्णांकों के अनुपात में होते हैं ।)*** की सरल व्याख्या भी प्रदान की गई । आप इस विषय वस्तु के बारे में रसायन शास्त्र में अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे ।

द्रव्य का आधुनिक परमाण्वीय दृष्टिकोण : प्रारंभिक पथ प्रदर्शक

अंग्रेज रसायनशास्त्री जिन्होंने रासायनिक संयोजन के आनुभविक नियमों (निश्चित अनुपात का नियम तथा गुणित अनुपात का नियम) के आधार पर द्रव्य के परमाण्वीय सिद्धांत की परिकल्पना की । इससे उन्होंने न केवल रसायन शास्त्र, वरन् वास्तव में संपूर्ण विज्ञान को सदृढ़ नींव पर खड़ा किया । उन्हें गैसों के मिश्रण के लिए "डाल्टन के आंशिक दाब नियम", "मौसम विज्ञान", "गैसों के ऊष्मीय प्रसार" तथा "वर्णान्धता के सिद्धांत" में मौलिक योगदान के लिए भी जाना जाता है ।

जॉन डाल्टन
(1766-1844)

इतालवी (इटली) भौतिकवेत्ता जिनके नाम से प्रचलित आवोगाद्रो परिकल्पना ने इस तथ्य की सरल आण्वीय व्याख्या प्रदान की कि गैसों का संयोग आयतनों के सरल अनुपात में ही क्यों होता है ? उन्होंने प्रस्तावित किया कि हाइड्रोजन, ऑक्सीजन तथा नाइट्रोजन जैसी गैसों के सूक्ष्मतम संघटक परमाणु नहीं हैं वरन् उनके द्विपरमाणुक अणु हैं । आवोगाद्रो संख्या (6.023×10^{23}) प्रकृति का एक महत्त्वपूर्ण नियतांक है तथा यह परमाण्वीय संहतियों के पैमाने को प्रस्थापित करता है ।

अमीडियो आवोगाद्रो
(1776-1856)

द्रव्य के आण्वीय निरूपण को **गैसों के अणुगति सिद्धांत** द्वारा पुष्टता प्राप्त हुई । इस सिद्धांत के विषय में हम अध्याय 11 में चर्चा करेंगे । इस सिद्धांत से गैसों के विभिन्न गुणों की सफल आण्वीय व्याख्या संभव हुई। इससे आण्विक आकारों के आकलन में भी योगदान मिला । इतने प्रमाणों के होते हुए भी उन्नीसवीं शताब्दी के अन्त तक भी कुछ वैज्ञानिक अणु तथा परमाणुओं के अस्तित्व से सहमत नहीं थे तथा वे यह मानते थे कि सैद्धांतिक विश्लेषणों की सुगमता के लिए इन काल्पनिक सत्ताओं (अणु तथा परमाणु) को व्यर्थ में जोड़ दिया गया है । ब्राउनी गति (अध्याय 11) की परिघटना से अणु तथा परमाणु की वास्तविकता को और अधिक प्रामाणिकता प्राप्त हुई ।

परमाणुओं के आकार एवं संहतियों के विषय में बहुत से प्रत्यक्ष प्रमाण मिल चुके हैं जिनके आधार पर अब हम यह जानते हैं कि परमाणु का आकार प्ररूपी तौर पर एंग्स्ट्रॉम ($1Å = 10^{-10}$ m) के परिसर में होता है । इसकी संहति परमाणुक संहति मात्रकों ($1 u = 1.66 \times 10^{-27}$ kg) के पैमाने पर व्यक्त की जाती है । आवोगाद्रो संख्या (परमाणुओं अथवा अणुओं की वह संख्या है जो किसी पदार्थ की ग्रामों में परमाणुक अथवा अणुक संहति में होती है) 6.023×10^{23} है । किसी पदार्थ के एक मोल को इस प्रकार परिभाषित करते हैं – पदार्थ का वह परिमाण जिसमें अणुओं की संख्या आवोगाद्रो की संख्या के बराबर हो। सामान्य पदार्थों जैसे इस पुस्तक का कोई पृष्ठ, सिलिंडर में भरी रसोई गैस अथवा पानी से भरी किसी बाल्टी में अणुओं की संख्या बहुत ही बड़ी होती है ।

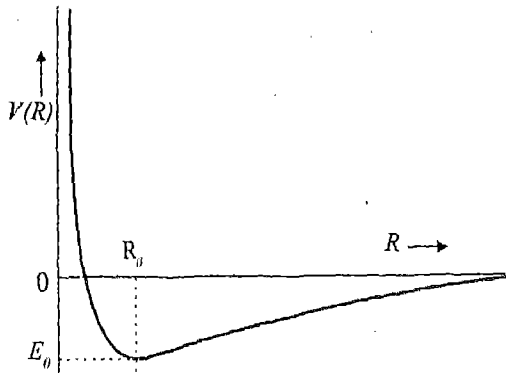
इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी तथा क्रमवीक्षण सुरंगन सूक्ष्मदर्शी (STM) जैसे उच्च आवर्धन क्षमता तथा उच्च विभेदन क्षमता के उपकरणों के आविष्कार हो जाने पर आज हम किसी ठोस में परमाणु अथवा अणुओं की वास्तविक व्यवस्था को देख सकते हैं। अब हम इनके आकारों के विषय में भी अनुमान लगा सकते हैं। किसी प्रतिरूपी ठोस में इनके बीच के पृथकन को माप सकते हैं । ठोसों में अंतराणुक दूरियां कुछ एंगस्ट्रॉम की कोटि की होती हैं। चूंकि ठोसों तथा द्रवों के प्रतिरूपी घनत्वों में कोई विशेष अन्तर नहीं होता, अतः द्रवों में भी अंतराणुक दूरियां इसी कोटि की होती हैं । इसके विपरीत गैसों में अंतराणुक दूरियां ठोसों अथवा द्रवों की अपेक्षा लगभग दस गुनी होती हैं।

9.3 अंतरापरमाणुक तथा अंतराणुक बल

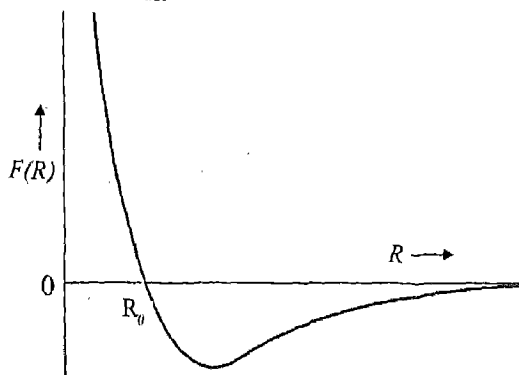
ठोसों अथवा द्रवों में परमाणुओं को कौन बांधे रखता है ? अब हम इसी प्रश्न पर विचार करेंगे । स्पष्ट है कि यहां कोई अंतरापरमाणुक अथवा अंतराणुक बल होने चाहिए जो इन्हें बांधे रखते हैं । यद्यपि इन बलों की विस्तृत प्रकृति जटिल है, अतः इस अनुभाग में हम केवल इन बलों का गुणात्मक विवरण ही प्रस्तुत करेंगे और यह देखेंगे कि इन पदों में हम द्रव्य के विभिन्न गुणों को किस प्रकार समझ सकते हैं ।

हम जानते हैं कि निश्चित आकृति एवं निश्चित आकार, ठोसों का अभिलाक्षणिक गुण होता है । इनकी आकृति अथवा आकार में कोई परिवर्तन करने के लिए अत्यधिक परिमाण के विरूपक बल की आवश्यकता होती है । इसी प्रकार, द्रवों का कोई निश्चित आयतन होता है किन्तु कोई निश्चित आकृति नहीं होती । असमतल पर ये सरलता से प्रवाहित होने लगते हैं । इसके विपरीत गैसों का न तो कोई निश्चित आकार होता है और न ही कोई निश्चित आकृति होती है । इन प्रेक्षित तथ्यों से यह धारणा बनती है कि कदाचित् ठोसों में अंतरापरमाणुक अथवा अंतराणुक बल प्रबलतम होते हैं तथा गैसों में ये दुर्बलतम होते हैं । ये बल आकर्षी बल होते हैं जो अंतरापरमाणुक अथवा अंतराअणुक पृथकन पर निर्भर करते हैं । परन्तु यदि ये बल सदैव ही आकर्षी बल होते तथा इन बलों की तीव्रता पृथकन कम होने पर बढ़ती जाती तब परमाणुओं के क्रमशः निकट आने पर द्रव्य का निपात हो जाना चाहिए । यह प्रेक्षित तथ्यों के विपरीत है । यह भी सर्वविदित है कि ठोस अत्यधिक असंपीड्य होते हैं । इन प्रेक्षणों से यह संकेत मिलता है कि जब परमाणु एक दूसरे के अत्यधिक निकट आ जाते हैं, तब अंतरापरमाणुक बलों की प्रकृति में परिवर्तन हो जाता है । ये बल आकर्षी बल नहीं रहते वरन् प्रतिकर्षी बल हो जाते हैं ।

अंतरापरमाणुक बलों की प्रकृति ''वैद्युती'' होती है । जैसा कि आप जानते ही हैं कि परमाणु में बहुत छोटा धनावेशित नाभिक (आकार~10^{-15}m) होता है तथा इसके चारों ओर ~10^{-10}m (परमाणु आकार) कोटि की दूरी पर ऋणावेशित इलेक्ट्रॉन होते हैं । प्रत्येक परमाणु विद्युत्-उदासीन होता है । अब प्रश्न यह है कि जब परमाणु विद्युत्-उदासीन हैं, तो वे एक दूसरे को आकर्षित कैसे करते हैं । वास्तव में परमाणु व अणु कठोर ठोस नहीं होते, इनकी कोई सुनिश्चित अथवा सुस्पष्ट सीमाएं भी नहीं होतीं । किसी परमाणु में उसके नाभिक के चारों ओर ऋण आवेशों (इलेक्ट्रॉनों) का, बादलों की तरह, फैलाव होता है । इस फैलाव अथवा बादल का आकार ही परमाणु का आकार होता है । प्रत्येक परमाणु अथवा अणु की आकृति में सतत् अस्थिर विरूपण होते रहते हैं । इस प्रकार के विरूपण से प्रत्येक परमाणु के धनात्मक तथा ऋणात्मक आवेशों के केंद्रों के बीच सापेक्ष विस्थापन उत्पन्न होता है जिसके फलस्वरूप प्रत्येक परमाणु एक दोलायमान वैद्युत द्विध्रुव की भांति व्यवहार करता है जिसका निश्चित द्विध्रुव-आघूर्ण होता है । यह दर्शाया जा सकता है कि दो दोलायमान वैद्युत् द्विध्रुव सदैव एक दूसरे को आकर्षित करते हैं । इनके बीच अन्योन्य ऊर्जा में R^{-6} के अनुसार परिवर्तन होता है। फलतः दो परमाणुओं (या अणुओं) के बीच एक आकर्षक अन्योन्य क्रिया, जिसे ''वांडर वाल्स आकर्षण'' कहते हैं, का उद्भव होता है। इस आकर्षण को यह नाम डच भौतिकवेत्ता सी.एफ. वांडर वाल्स के सम्मान में दिया गया है जिन्होंने अपने गैस-द्रावण के अध्ययन में इस प्रकार के आकर्षक बल की परिकल्पना की थी । विस्तृत परिकलन तथा प्रयोगों पर

आधारित व्युत्पन्न निष्कर्ष यह दर्शाते हैं कि परमाणुओं या अणुओं के वियुक्त युगलों के बीच अन्योन्य क्रिया को एक वक्र द्वारा निरूपित किया जा सकता है जो यह दर्शाता है कि किस प्रकार स्थितिज ऊर्जा में इनके बीच पृथकन के साथ परिवर्तन होता है, जैसा कि चित्र 9.1 में दर्शाया गया है । यह वक्र अंतरापरमाणुक विभव प्रदर्शित करता है ।

चित्र 9.1 दो सर्वसम परमाणुओं के बीच अंतरापरमाणुक स्थितिज ऊर्जा V(R) इन नाभिकों के बीच पृथकन R के फलन के रूप में।

स्थितिज ऊर्जा द्वारा निम्नलिखित संबंध का उपयोग करके परमाणुओं के बीच बल ज्ञात किया जा सकता है

$$F(R) = -\frac{dV}{dR}$$

चित्र 9.2 दो सर्वसम परमाणुओं के बीच अंतरापरमाणुक बल F(R) इन परमाणुओं के नाभिकों के बीच पृथकन R के फलन के रूप में।

चित्र 9.2 में परिणामी अंतरापरमाणुक वक्र दर्शाया गया है । यह बल दो परमाणुओं या अणुओं को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश कार्य करता है । आकर्षण बल को ऋणात्मक तथा प्रतिकर्षण बल को धनात्मक दर्शाया गया है । हम देखते हैं कि जैसे-जैसे पृथकन R घटता है, आकर्षक बल आरंभ में बढ़ता है और फिर घटकर पृथकन R_0 पर शून्य हो जाता है जहां पर स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होती है । कम दूरियों पर यह बल प्रतिकर्षी होते हैं क्योंकि इन दूरियों पर एक परमाणु से संबद्ध ऋणावेश का विस्तार दूसरे परमाणु से संबद्ध ऋणावेश के विस्तार पर अतिव्यापित होने लगता है । अतः स्थितिज ऊर्जा वक्र के व्यापक रूप को निम्न व्यंजक द्वारा निरूपित किया जा सकता है,

$$U(R) = \frac{A}{R^n} - \frac{B}{R^m} \tag{9.1}$$

गुणांक A तथा B और घातांक n तथा m के मान संबद्ध परमाणुओं (अथवा अणुओं) की प्रकृति पर निर्भर करते हैं । इस व्यंजक का प्रथम पद विभव के प्रतिकर्षण को तथा द्वितीय भाग आकर्षण को निरूपित करता है । अधिकांश पदार्थों के लिए n और m घातांकों के मान क्रमशः 12 तथा 6 होते हैं । इस प्रकार, विभव के प्रतिकर्षित भाग का अत्यन्त लघु परास होता है तथा यह तभी प्रभावी होता है जब दो परमाणु एक दूसरे के बहुत निकट लाए जाते हैं ।

अंतरापरमाणुक अथवा अंतराणुक बलों का उपरोक्त निरूपण वास्तविक स्थिति का अत्यन्त सरलतम रूप है । तथापि यह वास्तविकता के काफी सन्निकट है ।

9.4 द्रव्य की अवस्थाएं

द्रव्य तीन अवस्थाओं में पाया जाता है – ठोस, द्रव तथा गैस । द्रव्य की चौथी अवस्था भी होती है, जिसमें द्रव्य आयनीकृत अवस्था में होता है, जिसे **प्लैज़्मा** कहते हैं । तथापि, हम यहां केवल तीन अवस्थाओं की चर्चा करेंगे ।

द्रव्य का तीन अवस्थाओं – ठोस, द्रव तथा गैस में पाया जाना अंतरापरमाणुक अथवा अंतराणुक बलों की उपस्थिति का एक महत्त्वपूर्ण परिणाम है । समान परमाणुओं अथवा अणुओं (उदाहरणार्थ Na, H_2O, N_2) का कोई संग्रह इन तीनों अवस्थाओं में से किसी एक अवस्था में हो सकता है जो ताप तथा दाब जैसी परिस्थितियों पर निर्भर करता है । किसी गैस का आयतन उतना ही होता है जितना कि उस बर्तन का होता है, जिसमें वह भरी होती है । किसी द्रव का किसी निश्चित ताप पर एक नियत आयतन होता है परन्तु कोई निश्चित आकृति नहीं होती । किसी ठोस की आकृति तथा आकार निश्चित होता है । इनके विभिन्न व्यवहारों के लिए कौन उत्तरदायी है ? माना जाता है कि यह मुख्यतः दो कारकों की अन्योन्य क्रिया का फल है– (a) अंतरापरमाणुक या अंतराणुक बल, तथा (b) ताप के कारण यादृच्छिक गति (अथवा प्रक्षोभन) ।

किसी गैस में अणु एक दूसरे से दूर होते हैं । दो अणुओं के बीच माध्य-दूरी उनके व्यासों की लगभग दस गुनी होती है । इनके बीच कार्यरत बल दुर्बल होते हैं । अणु निरन्तर गति करते रहते हैं, इनकी गतिज ऊर्जा ताप के अनुक्रमानुपाती होती है (देखिए अध्याय 11) । चूंकि अणुओं या परमाणुओं के बीच कार्यरत बल दुर्बल होता है, अतः वे मुक्त कण की भांति इधर-उधर गति करते हुए यदा-कदा एक दूसरे से टकराते रहते हैं । गैसों के इस प्रकार के व्यवहार के विषय में अधिक विस्तार से हम आगे चर्चा करेंगे ।

अब मान लीजिए गैस को ठंडा किया जाता है। ऐसा करने से गैस के अणुओं की गति धीमी पड़ जाती है। अब यदि गैस को बिना ठंडा किए उस पर दाब बढ़ाएं अथवा ठंडा करने के साथ-साथ दाब भी बढ़ाएं, तो ऐसा करने पर गैस के अणुओं के बीच की माध्य दूरी घट जाती है। बहुत संभव है कि अणु एक दूसरे के इतने पास आ जाएं कि उनके बीच अंतराणुक विभव पर्याप्त तथा आकर्षी हो जाय। यदि किसी अणु की माध्य गतिज ऊर्जा माध्य आकर्षी स्थितिज ऊर्जा से कम है तो वह द्रव में संघनित हो जाता है। इसके विपरीत यदि अणु की गतिज ऊर्जा अधिक है, तो वह दूर जाता है। ऐसा निकाय एक गैस होता है। अतः किसी गैस को ठंडा तथा संपीडित करने पर ऐसी परिस्थिति उत्पन्न होती है, कि वह गैस, द्रव में संघनित हो जाती है।

किसी द्रव में अणु एक दूसरे के निकट होते हैं। ठंडे द्रवों (अर्थात् क्वथनांक से काफी नीचे ताप पर) में सामान्यतः अंतराणुक पृथकन R_0 के अत्यधिक निकट परन्तु इससे कुछ अधिक होता है [यहां R_0 वह पृथकन है जिस पर स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होती है]। द्रव में अणु अस्त-व्यस्त रूप में गतिशील रहते हैं, यद्यपि यह गति गैस के अणुओं की तुलना में काफी धीमी होती है। द्रव किसी विरूपण का प्रतिरोध नहीं कर सकते। इनके पृष्ठ पर स्पर्श रेखीय बल आरोपित करते ही ये प्रवाहित होना आरंभ कर देते हैं।

मान लीजिए द्रव को अधिक ठंडा करते हैं, तो अणु और अधिक निकट आ जाते हैं। ठंडा करते-करते एक ऐसी स्थिति आती है जब अंतराणुक पृथकन $\approx R_0$ हो। तब अणु निम्नतम ऊर्जा के अभिविन्यास को धारण करने का प्रयास करेंगे, अर्थात् तब अणु इस प्रकार की व्यवस्था अपनाएंगे जिसमें प्रत्येक अणु अपने निकटतम पड़ोसी से दूरी R_0 के अत्यधिक निकट होगा। इस दशा में निकटतम पड़ोसी सममित रूप में इस प्रकार व्यवस्थित होंगे कि प्रत्येक अणु न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा की अवस्था में हो। यह नियमित अथवा लगभग नियमित व्यवस्था ठोस में होती है। यद्यपि अणु इस स्थिति में भी गतिशील होते हैं, प्रत्येक अणु की यह गति अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर तक सीमित होती है। परमाणु अथवा अणु अपनी किसी निश्चित माध्य स्थिति के दिक् में दोलनी अथवा कंपन गति करते रहते हैं। गति का आयाम यद्यपि ताप पर निर्भर करता है, परन्तु यह अल्प होता है।

यदि कल्पना करें कि अणुओं की आकृति गोलीय आकृति से काफी भिन्न है (उदाहरण के लिए वे अणु छड़ों अथवा चक्रिकाओं जैसे हैं), तब अन्य प्रावस्थाएं भी संभव हैं। उदाहरण के लिए, छड़ों जैसे अणुओं का समूह संघनित होकर ''द्रव क्रिस्टल'' प्रावस्था ग्रहण कर लेता है, जो किसी समदैशिक द्रव तथा किसी क्रिस्टलीय ठोस से भिन्न होती है।

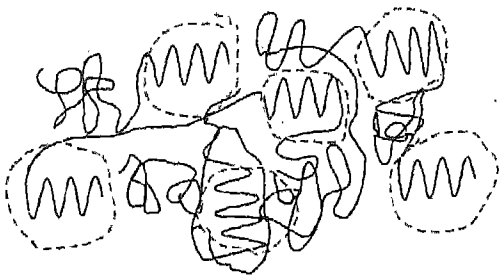
पदार्थ की तीन विभिन्न अवस्थाओं के जिन स्थूल गुणों का वर्णन हमने ऊपर किया है, वे एक-दूसरे से काफी भिन्न हैं। हम इस अध्याय में अपनी चर्चा को ठोसों के यांत्रिक व्यवहार अथवा ठोसों की यांत्रिकी तक ही सीमित रखेंगे। तरल-यांत्रिकी की व्यापक चर्चा अगले अध्याय में की जाएगी।

9.5 ठोस

जब हम किसी दृढ़ पिण्ड की कल्पना करते हैं, तो हमारे मस्तिष्क में किसी ऐसे कठोर पिण्ड का चित्र उभरता है जिसकी कोई निश्चित आकृति तथा आकार हो (अर्थात् कोई ठोस हो)। किसी ठोस में प्रत्येक परमाणु अथवा अणु अन्य परमाणुओं अथवा अणुओं के आपेक्ष किसी निश्चित माध्य दूरी (पृथकन) पर होता है। तथापि ऊष्मीय ऊर्जा के कारण अणु अथवा परमाणु अपनी माध्य स्थिति के आस-पास कम्पन्न करते हैं। समय के साथ परमाणुओं अथवा अणुओं के बीच माध्य पृथकन में कोई परिवर्तन नहीं होता। प्रत्येक परमाणु अथवा अणु की स्थिति इस शर्त से निश्चित होती है कि प्रत्येक परमाणु अथवा अणु साम्यावस्था में है, अर्थात् उनमें से किसी एक पर भी अन्य के कारण कोई नेट (परिणामी) बल नहीं लगता। यह साम्यावस्था स्थायी होती है। यदि किसी परमाणु अथवा अणु को उसकी साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापित किया जाए, तो उस पर अन्य परमाणुओं अथवा अणुओं के कारण एक प्रत्यानयन बल कार्य करने लगता है जो उसे वापस धकेलने का प्रयास करता है। इसी गुण के कारण कोई ठोस कुछ सीमा तक दृढ़ होता है। यह उन बलों के विरुद्ध स्थिर होता है जो किसी ठोस के परमाणुओं अथवा अणुओं के बीच की आपेक्ष दूरी को, फलस्वरूप उस ठोस की आकृति तथा आकार को परिवर्तित करने का प्रयास करते हैं। ठोसों के प्रत्यास्थ व्यवहार का भी यही कारण है। तथापि, यदि यह बल सीमा से अधिक है, तो वह ठोस में स्थायी विरूपण उत्पन्न कर सकता है (ठोस टूट भी सकता है)।

ठोसों में परमाणुओं अथवा अणुओं की स्थानिक व्यवस्था भिन्न-भिन्न हो सकती है। कुछ ठोसों में परमाणु अथवा अणु नियमित त्रिविमीय आवर्ती-क्रम में अभिविन्यस्त होते हैं जबकि कुछ ठोसों में यह व्यवस्था पूर्णतः यादृच्छिक हो सकती है। जो भी ठोस हमारे दैनिक जीवन में संपर्क में आते हैं, उन्हें हम स्थूल रूप से निम्नलिखित समूहों में वर्गीकृत कर सकते हैं : (i) क्रिस्टलीय ठोस, (ii) अंश-क्रिस्टलीय ठोस, तथा (iii) कांचीय अथवा अक्रिस्टलीय ठोस।

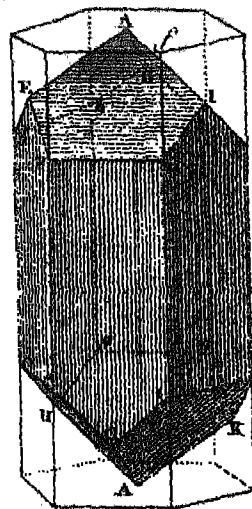
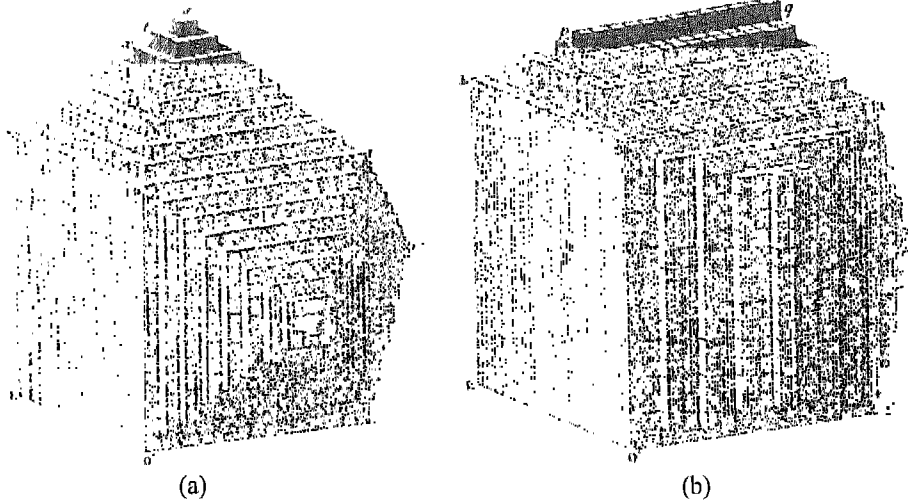
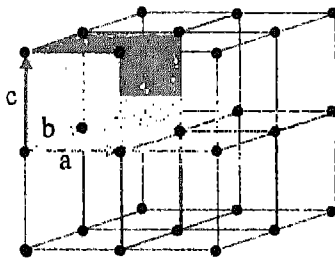
क्रिस्टलीय ठोसों, जैसे चीनी, साधारण नमक, हीरा आदि, में परमाणु अथवा परमाणुओं के समूह दिक् में पूर्णतः आवर्ती क्रम में व्यवस्थित रहते हैं तथा तीन विमाओं में स्थानान्तरीय सममिति प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार के ठोसों में, यदि हम किसी भी दिशा में बढ़ें, तो एक निश्चित अन्तराल के पश्चात् व्यवस्था की पुनरावृत्ति होने लगती है। दैशिक सममिति में कमी होने पर **ठोस कांचीय** अथवा **अक्रिस्टलीय** बन जाते हैं। कांच, बिटूमन (डामर), लकड़ी आदि पदार्थ इस प्रकार के ठोसों के उदाहरण हैं। बहुलक (पॉलीमर) अणु बहुत बड़े होते हैं, बड़ी संख्या ($\sim10^{10}$) में इसके मूल एककों की पुनरावृत्ति इन अणुओं का अभिलाक्षणिक गुण होता है। पॉलीएथीलीन

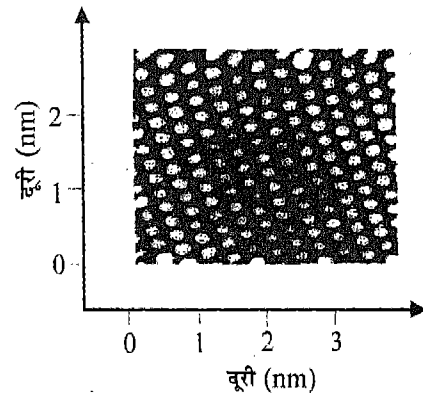
कदाचित् सरलतम बहुलक है, जिसका हमारे दैनिक जीवन में व्यापक उपयोग है। आजकल सामान लाने में उपयोग होने वाले थैले (कैरी-बैग) तथा बाल्टियां इसी पदार्थ से बनते हैं। पॉलीएथीलीन अणु को $(-CH_2-)_n$ द्वारा निरूपित किया जाता है, जिसमें पुनरावृत्ति होने वाले एककों की संख्या n है। ये अणु दीर्घ शृंखला अणु होते हैं जिनका आण्विक द्रव्यमान बहुत अधिक होता है। इसीलिए कभी-कभी इन्हें "बृहदणु" भी कहते हैं। प्रोटीन अणु भी इसी श्रेणी में आते हैं। इन पदार्थों मे एकल अणु का ही आयतन काफी अधिक हो सकता है। जब इस प्रकार के अणुओं को उनकी द्रव प्रावस्था अथवा गलित अवस्था से भी ठंडा किया जाता है, तो वे चित्र 9.3 में दर्शाए अनुसार अभिविन्यास प्राप्त कर लेते हैं। इनमें हम यह पाते हैं कि यहां कुछ क्षेत्र ऐसे भी हैं जिनमें आण्विक शृंखला नियमित प्रकार से व्यवस्थित है। इन क्षेत्रों को "क्रिस्टलाणु" कहते हैं। इन क्रिस्टलाणुओं के बीच में शृंखला अनियमित ढंग में वलित होती है। ऐसे क्षेत्र कांचीय अथवा अक्रिस्टलीय क्षेत्रों का निर्माण करते हैं। इस प्रकार, हम यह पाते हैं कि इस प्रकार के पदार्थों में क्रिस्टलीय प्रावस्था अक्रिस्टलीय प्रावस्था में अंतर्परिक्षिप्त होती है। इस प्रकार के पदार्थों को "अंश-क्रिस्टलीय ठोस" कहते हैं। इस अध्याय में हम केवल क्रिस्टलीय तथा कांचीय (अथवा अक्रिस्टलीय) ठोसों के विषय में चर्चा करेंगे।

चित्र 9.3 बृहदणु में शृंखला का वलित होना, कुछ ऐसे क्षेत्र होते हैं जिनमें शृंखला नियमित ढंग से वलित होती है (इन्हें बिंदुओं द्वारा घिरा दर्शाया गया है)। ऐसे क्षेत्र क्रिस्टलीय क्षेत्रों का निर्माण करते हैं जिन्हें क्रिस्टलाणु कहते हैं। वे भाग जहां शृंखला अनियमित ढंग से वलित होती है, अक्रिस्टलीय क्षेत्र का निर्माण करते हैं।

सभी ठोस कुछ सीमाओं तक प्रत्यास्थ होते हैं। हम उनकी विमाओं में थोड़ा परिवर्तन उन्हें खींचकर, दबाकर, ऐंठकर अथवा संपीडित करके कर सकते हैं। इस अध्याय के अंतिम भागों में हम विभिन्न प्रकार के विरूपक बल लगाने पर ठोसों के प्रत्यास्थ व्यवहार के विषय में विस्तृत जानकारी प्राप्त करेंगे।

9.5.1 क्रिस्टलीय ठोस

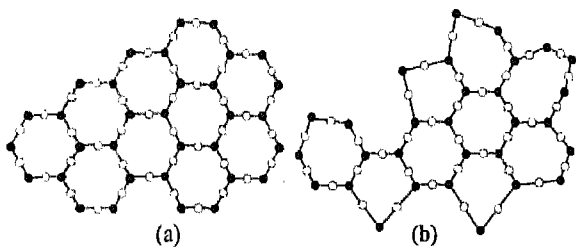
कई हजार वर्ष पूर्व यह ज्ञात हो चुका है (और जिसका वर्णन भी किया जा चुका है) कि बहुत से खनिजों तथा रत्नों (मणियों) के बाह्य रूप नियमित होते हैं। कोई हीरा छोटा हो या बड़ा, उसे चाहे कहीं से भी प्राप्त किया गया हो, उसका बाह्य रूप सदैव समान होता है। सर्वप्रथम क्रिस्टल शब्द का उल्लेख केवल बर्फ (हिम) के लिए और इसके पश्चात् क्वार्ट्ज़ के लिए किया गया। तत्पश्चात् मध्ययुग के उत्तरार्ध तक इस शब्द का उपयोग अधिक व्यापक अर्थों में होने लगा। वह हर ठोस जिसके बाह्य रूप में नियमितता प्रदर्शित होती है, उसका वर्गीकरण क्रिस्टलीय ठोस के रूप में होने लगा।

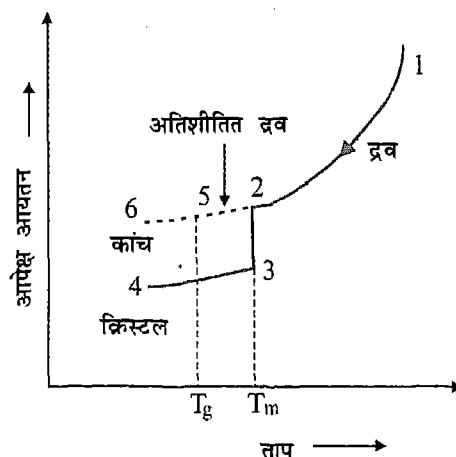
प्रकृति में पाए जाने वाले क्रिस्टलों (देखिए चित्र 9.4) अथवा प्रयोगशाला में उगाए गए क्रिस्टलों के बाह्य रूप तथा दिखाव-बनाव में नियमितता से प्रेक्षकों की 17वीं शताब्दी से यह धारणा बन गई कि सर्वसम भवन खण्डों (इमारती खंडों) की नियमित पुनरावृत्ति द्वारा क्रिस्टलों का निर्माण होता है। चित्र 9.5 में यह दर्शाया गया है कि समान भवन खण्डों से विभिन्न बाह्य रूपों के क्रिस्टल बन सकते हैं। जब कोई क्रिस्टल सम परिस्थितियों में उगता है, तो उसके विकास के समय की उसकी आकृति अपरिवर्तित रहती है। ऐसा प्रतीत होता है मानो सर्वसम प्राथमिक भवन-खण्ड क्रिस्टल के साथ निरन्तर जोड़े जा रहे हैं। अब हम यह जानते हैं कि ये प्राथमिक भवन-खण्ड परमाणु अथवा परमाणुओं के समूह होते हैं। ये क्रिस्टल परमाणुओं के त्रिविमीय आवर्ती विन्यास होते हैं (देखिए चित्र 9.6)। यह आवर्ती व्यवस्था दीर्घ परास तक नियमित रूप से दोहराती है। अत: यह निकाय दीर्घ परासी व्यवस्था प्रदर्शित करता है। इस प्रकार की पुनरावर्ती त्रिविमीय व्यवस्था जालक (लैटिस) कहलाती है। किसी जालक में, प्रत्येक परमाणु की अपने निकटतम पड़ोसियों से सुनिश्चित साम्य दूरी होती है। अंतरापरमाणुक बल परमाणुओं को एक दूसरे के साथ बांधे रखते हैं। इन बलों की कल्पना हम पड़ोसी अणुओं को एक-दूसरे से संबद्ध करने वाली छोटी-छोटी कमानियों के रूप में कर सकते हैं। जालक असाधारण रूप से दृढ़ होता है। इसे दूसरे शब्दों में इस प्रकार भी कह सकते हैं कि ''अंतरापरमाणुक कमानियां'' अत्यधिक दृढ़ हैं। यही तथ्य ठोसों की निश्चित आकृति एवं आकार के लिए उत्तरदायी है।

चित्र 9.4 क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल का रेखाचित्र

चित्र 9.5 क्रिस्टलों के बाह्य रूप और प्राथमिक भवन-खण्डों के रूप में संबंध । (a) तथा (b) में भवन-खण्ड सर्वसम हैं, परंतु भिन्न क्रिस्टल-फलक विकसित हुए हैं।

चित्र 9.6 परमाणुओं का त्रिविमीय विन्यास, छायांकित घन पुनरावर्त एकक का घटक है । इस प्रकार की संरचना को जालक (लेटिस) कहते हैं ।

हम कैसे कह सकते हैं कि किसी क्रिस्टल में परमाणु अथवा परमाणुओं के समूह त्रिविमीय जालक में व्यवस्थित होते हैं ? एक तथ्य जो इस ओर प्रबलता से संकेत करता है यह है कि प्रकृति में पाए जाने वाले अथवा कृत्रिम रूप से उगाए गए क्रिस्टलों में सपाट (समतल) फलकों का होना । तथापि, क्रिस्टलों में परमाणुओं की व्यवस्था के अन्वेषण की कई परोक्ष विधियां हैं । अत्यधिक उच्च विभेदन क्षमता और आवर्धन क्षमता के इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी तथा क्रमवीक्षण सुरंगन सूक्ष्मदर्शी (STM) (देखिए चित्र 9.7) द्वारा किसी क्रिस्टल जालक में परमाणुओं की व्यवस्था को परोक्ष रूप से "देख पाना" संभव हो गया है । X- किरण विवर्तन इसकी अत्यधिक व्यापक विधि है । X-किरणें विद्युत् चुंबकीय तरंगें होती हैं जिनकी तरंगदैर्ध्य अति लघु ~1Å से 10Å होती है । किसी क्रिस्टल के परमाणु इन किरणों को विवर्तित कर देते हैं । क्रिस्टल में परमाणुओं की नियमित व्यवस्था होने के कारण यह पाया गया है कि किसी विशेष दिशा में X-किरणों का विवर्तन अत्यधिक प्रबल होता है, जो परमाणुओं की व्यवस्था पर निर्भर करता है । इन दिशाओं के विस्तृत अध्ययन के आधार पर हम न केवल तांबे तथा चट्टानी नमक जैसे साधारण क्रिस्टलों की संरचना ज्ञात कर सकते हैं, वरन् डी.एन.ए.(डीआक्सीराइबोन्यूकलिक अम्ल) जैसे जटिल क्रिस्टलों की संरचना की जानकारी भी प्राप्त कर सकते हैं ।

चित्र 9.7 किसी ऐलुमिनियम पृष्ठ का क्रमवीक्षण सुरंगन सूक्ष्मदर्शी प्रतिबिम्ब, प्रत्येक चमकदार बिंदु एकल परमाणु को निरूपित करता है । प्रतिबिम्ब कुछ विकृत है : परमाणु वर्गाकार जालक पर 0.2 nm पृथकन के साथ स्थित हैं ।

9.5.2 कांचीय अथवा अक्रिस्टलीय ठोस

बहुत से ठोस जैसे कांच, अस्थि, लकड़ी आदि क्रिस्टलीय नहीं हैं । इन पदार्थों में परमाणु नियमित विन्यास में व्यवस्थित नहीं होते, वरन् द्रवों की भांति यादृच्छिक ढंग में होते हैं । परंतु द्रवों की भांति, इन ठोसों में, अणु एक दूसरे के आपेक्ष गति नहीं करते । इनमें परमाणुओं अथवा अणुओं की अवस्थिति एक दूसरे के आपेक्ष निश्चित होती हैं । अत: इन ठोसों की भी, क्रिस्टलीय ठोसों की भांति निश्चित आकृति एवं आकार होता है । ऐसे पदार्थों को कांचीय अथवा अक्रिस्टलीय ठोस कहते हैं । इस प्रकार के ठोसों

की परमाण्वीय व्यवस्था का द्विविमीय बहिर्वेशन चित्र 9.8 में दर्शाए अनुसार निरूपित किया जा सकता है। इसमें तुलना के लिए क्रिस्टलीय ठोसों में तद्नुरूपी परमाण्वीय व्यवस्था का द्विविमीय बहिर्वेशन भी दर्शाया गया है।

चित्र 9.8 इस चित्र में क्रिस्टल एवं कांच में भिन्नता की व्याख्या की गई है। (a) Si तथा O परमाणुओं से किसी द्विविमीय क्रिस्टल की रचना की कल्पना। (b) कांच में क्रिस्टल के किसी भी परमाणु पर बंधों को अत्यधिक विक्षोभित किए बिना ही क्रिस्टल की दीर्घ परासी व्यवस्था नष्ट हो गई है।

एक आश्चर्यजनक तथ्य यह है कि कांचों के निर्माण में प्रयुक्त कई पदार्थों (उदाहरणार्थ क्वार्ट्ज़ अर्थात् सिलिका) की भी क्रिस्टलीय प्रावस्था (निम्न ऊर्जा की) होती है। ऐसा क्यों है कि अपेक्षाकृत कम स्थायी व्यवस्था दीर्घ अवधि (हजारों वर्ष) तक बनी रहती है तथा एक अधिक स्थायी क्रिस्टलीय व्यवस्था प्राय: नहीं पाई जाती ? इसे समझने के लिए आइए चित्र 9.9 में दर्शाए अनुसार किसी पदार्थ के, उसकी द्रव प्रावस्था के, शीतलन-वक्र पर विचार करते हैं। इस चित्र में दर्शाया गया है कि जब कोई द्रव धीरे-धीरे ठंडा किया जाता है, तो वह वक्र 1-2-3-4 का पालन करता है। इसके विपरीत यदि उसे शीघ्र ठंडा किया जाए, तो वह वक्र 1-2-5-6 का पालन करता है। प्रथम प्रकरण में, ताप T_m पर ताप में कोई विशेष परिवर्तन न होने पर भी आपेक्ष आयतन में एक आकस्मिक परिवर्तन होता है। इस प्रकार का परिवर्तन प्रावस्था रूपान्तरण निरूपित करता है। इस ताप पर द्रव जमकर क्रिस्टलीय ठोस बन जाता है। इस ताप को **गलनांक** अथवा **क्रिस्टलन ताप** कहते हैं। शीघ्र ठंडा करने पर, ताप T_m से नीचे भी द्रव जमकर ठोस नहीं बनता, परंतु द्रव-प्रावस्था में ही बना रहता है। ऐसी दशा में द्रव को अतिशीतित अवस्था में कहा जाता है। वक्र के 2-5 क्षेत्र में द्रव अतिशीतित अवस्था में है। ताप T_g से नीचे और अधिक ठंडा करने पर यह **कांचीय** अथवा **अक्रिस्टलीय ठोस** में रूपान्तरित हो जाता है। ताप T_g को **कांच संक्रमण ताप** कहते हैं। यह ताप किसी पदार्थ का अभिलाक्षणिक गुण होता है। अत: अधिकांश ठोसों के लिए क्रिस्टलीय अवस्था प्राकृतिक होती है, चूंकि क्रमिक परमाण्वीय व्यवस्था की ऊर्जा किसी अनियमित संकुलन की ऊर्जा से कम होती है। यद्यपि कम ऊर्जा की अवस्था अपेक्षाकृत अधिक स्थायी होती है। तथापि, जब परमाणु अथवा परमाणुओं के समूह को उचित प्रकार से व्यवस्थित होने का अवसर नहीं दिया जाता, तब उनकी गतिशीलता को यकायक अवरुद्ध करके अक्रिस्टलीय पदार्थों का निर्माण हो सकता है। कम ताप पर अक्रिस्टलीय कार्बन अपघटक उत्पाद के रूप में बनता है।

चित्र 9.9 किसी पदार्थ का उसकी गलित प्रावस्था से शीतलन-वक्र। धीरे-धीरे ठंडा करने पर यह पथ 1-2-3-4 अपनाता है; ताप T_m पर पदार्थ क्रिस्टलीय ठोस में जम जाता है। तीव्र गति से शीतलन करने पर यह पथ 1-2-5-6 अपनाता है। यह T_m से भी निम्न तापों पर गलित प्रावस्था बनाए रखता है। T_g से निम्न तापों पर यह अक्रिस्टलीय ठोस में जम जाता है।

9.6 प्रत्यास्थता : प्रतिबल तथा विकृति

यह पहले बताया गया है कि ठोसों की निश्चित आकृति एवं आकार होता है। किसी ठोस की आकृति अथवा आकार में परिवर्तन अथवा विरूपण करने के लिए बल की आवश्यकता होती है। यदि उस ठोस को उसकी नई आकृति एवं आकार में ही रखना है तो प्राय: इस बल को लगाए रखना होता है। यदि आप किसी कमानी को खींचते हैं तो उस कमानी में समान विस्तार (खिंचाव) बनाए रखने के लिए आवश्यक बल में समय के साथ कोई परिवर्तन नहीं होता। कमानी के जिस सिरे पर कोई बाह्य बल आरोपित किया है उस सिरे के निकट के किसी छोटे भाग पर विचार कीजिए। चूंकि यह भाग साम्यावस्था में है, इस भाग पर लगा नेट बल शून्य है। शेष कमानी इस भाग पर समान एवं विपरीत बल लगाती है। इस बल को **प्रत्यानयन बल** कहते हैं (चूंकि यह बल उस दिशा में लगता है जो कमानी को उसकी मूल लंबाई को पुन: स्थापित करने के लिए आवश्यक है)। कोई ठोस जो उपयुक्त आचरण के अनुकूल विरूपित होने पर प्रत्यानयन बल प्रदर्शित करता है **प्रत्यास्थ ठोस** कहलाता है। यदि कोई ठोस

बाह्य बल हटाए जाने पर अपनी मूल आकृति को यथार्थ रूप से प्राप्त कर लेता है तो उसे **पूर्ण प्रत्यास्थ ठोस** कहते हैं। तथापि कोई भी ठोस पूर्ण प्रत्यास्थ नहीं है। वह तभी तक पूर्ण प्रत्यास्थ आचरण करता है जब तक उसमें उत्पन्न विरूपण बहुत कम होता है। विरूपण एवं विकृति की परिमाण कोटि की जानकारी प्राप्त करने के लिए 1 cm व्यास की, 1 m लंबी स्टील की छड़ पर विचार करें। यदि आप इस छड़ के एक सिरे से किसी मध्यम आकार की कार को (द्रव्यमान ~3000 kg) लटकाएं तो छड़ में विस्तार होगा। परंतु यह विस्तार केवल ~0.05% ही होगा। यदि कार को हटा लिया जाए तो छड़ पुनः अपनी मूल लंबाई ग्रहण कर लेगी। यदि आप इसी छड़ से इसी प्रकार की दो कारें लटकाएं तो छड़ में स्थायी विस्तार उत्पन्न हो जाएगा और यह छड़ कारों को हटा लेने पर भी अपनी मूल लंबाई ग्रहण नहीं करेगी। यदि आप इस छड़ से तीन कारें लटका दें तो वह छड़ टूट जाएगी। टूटने से तुरंत पूर्व छड़ की लंबाई में वृद्धि ~0.2% हो जाती है। यद्यपि इस परिमाण का विरूपण देखने में छोटा प्रतीत होता है, परंतु अभियांत्रिकी की दृष्टि से महत्त्वपूर्ण है।

कमानियों से प्रयोग करते समय अंग्रेज भौतिकीवेत्ता राबर्ट हुक (1635 – 1703) ने यह पाया कि किसी भी कमानी में विस्तार लोड (भार) के अनुक्रमानुपाती होता है। लोड तथा विस्तार के बीच संबंध बायल के नियम की ही भांति, विज्ञान के प्राचीन मात्रात्मक संबंधों में से एक है। विभिन्न प्रकार के भारण के प्रभाव में पदार्थों के आचरणों के विषय में जानना महत्त्वपूर्ण है। भवनों तथा पुलों की अभिकल्पना करने (डिजाइन बनाने) में यह जानकारी होना अनिवार्य होता है। इसी प्रकार, कोई भी यह प्रश्न पूछ सकता है कि क्या हम ऐसे वायुयान की अभिकल्पना कर सकते हैं जो काफी हल्का परंतु पर्याप्त प्रबल हों? रेलगाड़ियों की पटरियों की आकृति अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षर **I** जैसी क्यों बनाई जाती है? कांच भंगुर पदार्थ क्यों है जबकि पीतल भंगुर नहीं है? इन सभी प्रश्नों का उत्तर देने से पूर्व हमें यह अध्ययन करना अत्यन्त आवश्यक है कि विभिन्न प्रकार के ठोस पिण्डों में भारण से विस्तार, संपीडन अथवा विरूपण (विकृति) किस प्रकार होते हैं।

जब कोई बाह्य बल किसी ठोस में अपरूपण उत्पन्न करता है, तब उस पिण्ड में उत्पन्न परिवर्तन (अपरूपण) का विरोध करने के लिए आंतरिक प्रत्यानयन बल विकसित हो जाता है। इस अवस्था में वह पिण्ड **प्रतिबलित** कहा जाता है। जब किसी ठोस पिण्ड पर कोई बाह्य बल कार्य करता है, तब उस ठोस पिण्ड के विस्तार में तीन प्रकार के परिवर्तन हो सकते हैं। ये सभी प्रकार के परिवर्तन चित्र 9.10 में दर्शाए गए हैं। चित्र 9.10(a) में किसी सिलिंडर की अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल के अभिलंबवत् आरोपित दो बलों द्वारा उस सिलिंडर को खींचते हुए दर्शाया गया है। चित्र 9.10(b) में किसी सिलिंडर पर परिमाण में समान एवं दिशा में विपरीत दो बलों को उस सिलिंडर की अनुप्रस्थ काट के समान्तर तथा उसके अक्ष के लंबवत् आरोपित (उस सिलिंडर को, ताश के पत्तों की गड्डी में विरूपण की भांति, विरूपित करने के लिए) दर्शाया गया है। चित्र 9.10(c) में किसी ठोस पिण्ड को किसी तरल के भीतर अत्यधिक उच्च दाब द्वारा प्रत्येक दिशा में एकसमान रूप से संपीडित दर्शाया गया है। इन सभी विरूपणों में यह तथ्य सर्वनिष्ठ (कॉमन) है कि प्रतिबल (अर्थात् प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित विरूपक बल) विकृति (अर्थात् विरूपण) उत्पन्न करता है। चित्र 9.10 में **तनन प्रतिबल** (खिंचाव से संबद्ध) का (a), **अवरूपण विकृति** का (b) तथा **संपीडन प्रतिबल** का (c) में चित्रांकन किया गया है। चित्र 9.10 में दर्शायी गई तीन स्थितियों में प्रतिबलों तथा विकृतियों के रूप भिन्न-भिन्न हैं। प्रयोगों द्वारा पाया गया कि प्रतिबल तथा विकृति एक-दूसरे के अनुक्रमानुपाती होते हैं। अतः

प्रतिबल $\propto$ विकृति

$$= k \times \text{विकृति} \qquad (9.2)$$

समीकरण 9.2 की आनुपातिकता केवल अल्प विकृतियों के लिए ही सत्य है। इसे **हुक का नियम** कहते हैं। आनुपातिकता स्थिरांक k को **प्रत्यास्थता गुणांक** कहते हैं।

चित्र 9.10 (a) तनन प्रतिबल लगाए जाने पर सिलिंडर में खिंचाव Δl (b) अवरूपण प्रतिबल के प्रभाव से सिलिंडर में विरूपण Δx, जैसा कि ताश के पत्तों की गड्डी में होता है, (c) एकसमान द्रवचालित प्रतिबल के प्रभाव में किसी ठोस गोले के आयतन में कमी ΔV।

तनन गुणों के किसी मानक परीक्षण में, किसी परीक्षण सिलिंडर पर चित्र 9.11 में दर्शाए अनुसार, तनन प्रतिबल में शून्य से धीरे-धीरे उस बिंदु तक वृद्धि की जाती है जिस पर वह सिलिंडर टूट जाता है तथा सिलिंडर में हुई विकृति को सावधानीपूर्वक मापा जाता है। आरोपित प्रतिबल तथा उत्पन्न

चित्र 9.11 किसी परीक्षण पिण्ड का उपयोग प्रतिबल-विकृति वक्र ज्ञात करने के लिए किया गया है। किसी निश्चित लंबाई L में परिवर्तन ΔL की माप किसी तनन प्रतिबल-विकृति परीक्षण से की जाती है।

विकृति के बीच ग्राफ आलेखित किया जाता है। इसी प्रकार का एक ग्राफ चित्र 9.12 में दर्शाया गया है। प्रक्षेण द्वारा यह पाया जाता है कि आरोपित प्रतिबल के काफी बड़े परास के लिए (बिंदु A तक) प्रतिबल-विकृति संबंध रैखिक है, तथा प्रतिबल हटाने पर परीक्षण सिलिंडर अपनी मूल विस्तारों पर वापस लौट आता है। इस सीमा में ठोस एक पूर्ण प्रत्यास्थ पिण्ड की भांति आचरण करता है। अत: इस पर समीकरण 9.2 लागू है। बिंदु A से B तक, प्रतिबल तथा विकृति एक दूसरे के अनुक्रमानुपाती नहीं होते, परन्तु फिर भी यदि बिंदु O तथा B के बीच कहीं भी भारण को हटा दिया जाए, तो वक्र पर पुन: वापस लौटा जा सकता है तथा वह पदार्थ अपनी मूल लंबाई पर वापस लौट आएगा। O तथा B के बीच वह पदार्थ प्रत्यास्थ कहा जाता है (अथवा वह प्रत्यास्थ आचरण प्रदर्शित करता है)। बिंदु B

चित्र 9.12 प्ररूपी प्रतिबल-विकृति।

प्रत्यास्थ सीमा अथवा **पराभव बिंदु** कहलाता है। बिंदु B के संगत प्रतिबल को **पराभव सामर्थ्य** S_y कहते हैं। इस बिंदु तक पदार्थ द्वारा आरोपित बल **संरक्षी** होते हैं। जब पदार्थ अपनी मूल आकृति में वापस लौट आता है, तो विरूपण उत्पन्न करने में किया गया कार्य पुन: प्राप्त हो जाता है। जब प्रतिबल बढ़ते-बढ़ते पराभव सामर्थ्य S_y से अधिक हो जाता है तो विकृति तेजी से बढ़ती है। परन्तु जब बिंदु B के आगे कही भी, मान लीजिए बिंदु C पर लोड को हटाया जाता है, तो पदार्थ अपनी मूल लंबाई पर वापस नहीं लौटता, वरन् वह चित्र 9.12 में दर्शाई गई बिंदुकित रेखा के अनुदिश वापस लौटता है। इस समय शून्य प्रतिबल होने पर भी पदार्थ की लंबाई अपनी मूल लंबाई से अधिक होती है, तथा पदार्थ को **स्थायी विरूपण** अवस्था में कहा जाता है। इस स्थिति में प्रतिबल को घटाकर शून्य करने पर भी अरूपित की अवस्था पर नहीं पहुंचा जा सकता। पदार्थ में कुछ न कुछ विकृति अवश्य शेष रहती है। इस तथ्य को जिसमें विकृति को उत्क्रमित करके प्रतिबल-विकृति वक्र पर वापस नहीं लौटा जा सकता, **प्रत्यास्थ हिस्टेरेसिस** अथवा **प्रत्यास्थ शैथिल्य** कहते हैं। यदि भारण को बिंदु C के आगे और बढ़ाया जाता है, तो विकृति में अत्यधिक बढ़ोतरी होती है और यह बिंदु D तक होती रहती है और ऐसी स्थिति आती है कि वह पदार्थ टूट जाता है। बिंदु B से D तक के भाग को **प्लास्टिक क्षेत्र** अथवा **सुघट्य क्षेत्र** कहते हैं। इस अवस्था में पदार्थ सुघट्य प्रवाह अथवा सुघट्य विरूपण की अवस्था में कहा जाता है। यदि प्रत्यास्थ सीमा तथा पराभव बिंदु के बीच सुघट्य विरूपण अधिक होता है, तो पदार्थ **आघातवर्ध्य** कहा जाता है। और यदि प्रत्यास्थ सीमा के पश्चात् शीघ्र ही पराभव हो जाता है, तो पदार्थ भंगुर कहलाता है। अंतत: वह प्रतिबल जिस पर परीक्षण पिण्ड वियुक्त हो जाता है उसे पदार्थ की **चरम सामर्थ्य** S_u अथवा **तनन सामर्थ्य** कहते हैं।

प्रकृति में ऐसे पदार्थ भी हैं जिनका आचरण उपरोक्त आचरण से अत्यधिक भिन्न होता है। उदाहरण के लिए, रबड़ को ही लेते हैं। हम जानते हैं कि रबड़ को उसकी मूल लंबाई के कई गुने तक खींचा जा सकता है, तथापि वह बल हटाने पर अपनी मूल आकृति ग्रहण कर लेता है। इसका कोई सुस्पष्ट सुघट्य प्रवाह क्षेत्र भी नहीं होता, किसी सीमा से अधिक खींचे जाने पर रबड़ टूट जाता है। चित्र 9.13 में रबड़ जैसे पदार्थ, उदाहरण के लिए महाधमनी के प्रत्यास्थ ऊतक के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र दर्शाया गया है। यहां ध्यान दीजिए कि यद्यपि प्रत्यास्थ क्षेत्र बहुत अधिक है, फिर भी यह पदार्थ हुक के नियम का पालन नहीं करता। ऐसे पदार्थ जिनके लिए विकृति का मान अत्यधिक है **प्रत्यास्थलक** कहलाते हैं। हमारे शरीर में महाधमनी हृदय से रुधिर पहुंचाने वाली बृहत रुधिर वाहिका का प्रत्यास्थ ऊतक एक प्रत्यास्थलक है।

चित्र 9.13 महाधमनी के प्रत्यास्थ ऊतक के लिए प्रतिबल-विकृति ग्राफ । महाधमनी हृदय से रुधिर पहुंचाने वाली बृहत रुधिर वाहिका होती है ।

चित्र 9.14 किसी तार के विस्तार के अध्ययन के लिए व्यवस्था ।

अब हम ऊपर वर्णन किए गए विभिन्न प्रकार के विरूपणों के विषय मे चर्चा करेंगे ।

9.6.1 तनन तथा संपीडन

जब किसी सिलिंडर अथवा किसी तार को तानित (विस्तारित) किया जाता है, अर्थात् चित्र 9.10(a) में दर्शाए अनुसार उसके दोनों सिरों पर परिमाण में समान व दिशा में विपरीत बल लगाए जाते हैं, तब उस सिलिंडर अथवा तार को तानित अवस्था (अथवा तनन प्रतिबल के प्रभाव) में कहा जाता है । इसी प्रकार, यदि किसी सिलिंडर के दोनों सिरों पर परिमाण में समान व दिशा में विपरीत बल एक दूसरे की ओर लगाए जाते हैं, तब उस सिलिंडर को संपीडन के अधीन कहा जाता है ।

चित्र 9.14 में तनाव के प्रभाव में किसी पिण्ड में खिंचाव (विस्तार) का अध्ययन करने की एक प्ररूपी प्रायोगिक व्यवस्था दर्शायी गयी है । यहां एकसमान अनुप्रस्थ काट के किसी लंबे सीधे तार को किसी दृढ़ टेक से निलंबित किया जाता है । तार के दूसरे सिरे से एक पलड़ा जुड़ा होता है जिस पर ज्ञात परिमाण के भार रखे जा सकते हैं । पलड़े पर रखे भार अधोमुखी बल आरोपित करते हैं जबकि समान एवं विपरीत दिशा में प्रतिक्रिया टेक पर कार्य करती है । अत: तार प्रतिबल के प्रभाव में तानित होता है । तार के विस्तार की माप वर्नियर व्यवस्था द्वारा की जाती है जिसमें वर्नियर पैमाना किसी संकेतक के साथ तार की तली पर लगा होता है तथा मुख्य पैमाना किसी स्टैण्ड अथवा दीवार से जुड़ा होता है ।

प्रयोगों के परिणामों से यह निष्कर्ष निकलता है कि किसी दिए गए भार के लिए तार की लंबाई में वृद्धि (विस्तार) उस तार की मूल लंबाई के अनुक्रमानुपाती होती है तथा उसकी अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल के व्युत्क्रमानुपाती होती है । किसी तार की लंबाई में वृद्धि (विस्तार) उस तार पर लगे भार (अर्थात् आरोपित बल) के अनुक्रमानुपाती होता है । इस प्रकार के परिणामों के आधार पर अंग्रेज भौतिकवेत्ता थॉमस यंग ने सन् 1807 ई. में यह तर्क दिया कि लोड (भार) तथा विस्तार को अपेक्षाकृत अधिक प्राकृतिक रूप में दो राशियों, प्रतिबल तथा विकृति द्वारा संबंधित किया जा सकता है । ***किसी वस्तु के एकांक क्षेत्रफल पर अभिलंबवत् कार्यरत बल (भार) को प्रतिबल कहते हैं ।*** यदि तार को खींचने वाला भार W है, तथा यह तार की अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल A पर अभिलंबवत् कार्य करता है, तब प्रतिबल σ को इस प्रकार प्रदर्शित किया जाता है,

$$\sigma = \frac{W}{A} \qquad (9.3)$$

प्रतिबल की विमाएं प्रति एकांक क्षेत्रफल पर बल (Nm^{-2}) की होती हैं । तार की लंबाई में वृद्धि (विस्तार) प्रतिबल σ पर निर्भर करती है, यह W अथवा A पर निर्भर नहीं करती । इसी प्रकार, किसी दिए गए प्रतिबल के लिए तार की लंबाई में वृद्धि ΔL तार की मूल लंबाई L के अनुक्रमानुपाती होती है । इस प्रकार, हम एक विमाहीन भौतिक राशि, जिसे विकृति ε कहते हैं, को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं,

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \qquad (9.4)$$

विकृति की माप विकृति मापी* द्वारा यथार्थता से की जा सकती है । यंग ने यह सुझाव दिया कि हुक के नियम का वर्णन $\varepsilon \propto \sigma$ के रूप में किया जाता है, अथवा

$$\sigma \propto \varepsilon \qquad (9.5)$$

* *विकृति मापी एक साधारण और उपयोगी वैद्युत युक्ति है जिसे आसंजनशील (चिपकाने वाले) पदार्थ द्वारा क्रियात्मक पिण्ड से जोड़ा जा सकता है । यह इस सिद्धांत पर कार्य करती है कि इसका वैद्युत प्रतिरोध उसमें उत्पन्न विकृति पर निर्भर करता है ।*

अर्थात् प्रतिबल विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है । आनुपातिकता स्थिरांक Y को यंग प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं तथा समीकरण (9.5) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$\sigma = Y\varepsilon \qquad (9.6)$$

यंग प्रत्यास्थता गुणांक को तनन प्रत्यास्थता गुणांक अथवा रैखिक संपीडन प्रतिबल भी कहते हैं । विमाओं की दृष्टि से यंग प्रत्यास्थता गुणांक प्रति एकांक क्षेत्रफल पर बल होता है अतः इसका मात्रक $N m^{-2}$ है तथा इसे पास्कल (Pa) में मापा जाता है । यद्यपि किसी पिण्ड के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक का मान तनाव तथा रैखिक संपीडन के लिए लगभग समान होता है, तथापि दोनों प्रकार के प्रतिबलों के लिए किसी पदार्थ की चरम समार्थ्य काफी भिन्न हो सकती है । उदाहरण के लिए, संपीडन के लिए कंक्रीट अत्यधिक प्रबल पदार्थ है, परन्तु तनाव के लिए यह इतना दुर्बल है कि तनन को सहन करने में कंक्रीट को कभी भी उपयोग में नहीं लाया जाता ।

सामान्य रुचि के कुछ पदार्थों के प्रत्यास्थ गुण सारणी 9.1 में दिए गए हैं । ध्यान दीजिए कि धातुओं के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक अत्यधिक होता है, अतः इन पदार्थों की लंबाई में थोड़ा परिवर्तन करने के लिए विशाल बलों की आवश्यकता होती है । उदाहरणार्थ, किसी पतले 0.1 cm^2 अनुप्रस्थ काट के तांबे के तार की लंबाई में 0.1% वृद्धि करने के लिए $\sim 10^3$ N बल की आवश्यकता होती है । अधिकांश धातुओं के यंग प्रत्यास्थता गुणांक $10^{11} N m^{-2}$ परास के होते हैं । अस्थियां जो कि बहुत से पदार्थों का मिश्रण होती हैं उनका यंग प्रत्यास्थता गुणांक अपेक्षाकृत कम होता है ।

उदाहरण 9.1 किसी संरचनात्मक स्टील छड़ की त्रिज्या 10 mm तथा लंबाई 1 m है । कोई 100 kN बल F इस तार को इसकी लंबाई के अनुदिश खींचता है । छड़ में (a) प्रतिबल; (b) लंबाई में वृद्धि तथा (c) विकृति परिकलित कीजिए । दिया गया है कि संरचनात्मक स्टील का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $E = 2.0 \times 10^{11} N m^{-2}$ है ।

हल हम यह मानते हैं कि यह छड़ किसी शिकंजे (clamp) अथवा बाँक द्वारा एक सिरे पर जकड़ी हुई है । छड़ के दूसरे सिरे पर इसकी लंबाई के अनुदिश बल F आरोपित किया जाता है । तब इस छड़ पर

(a) प्रतिबल $= \dfrac{F}{A} = \dfrac{F}{\pi r^2}$

$$= \frac{100 \times 10^3 N}{3.14 \times (10^{-2} m)^2}$$

$$= 3.18 \times 10^8 N m^{-2}$$

(b) लंबाई में वृद्धि

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E}$$

$$= \frac{(3.18 \times 10^8 N m^{-2})(1 m)}{2 \times 10^{11} N m^{-2}}$$

$$= 1.59 \times 10^{-3} m$$

$$= 1.59 mm$$

(c) विकृति $= \Delta L / L$

$$= (1.59 \times 10^{-3} m)/(1 m)$$

$$= 1.59 \times 10^{-3}$$

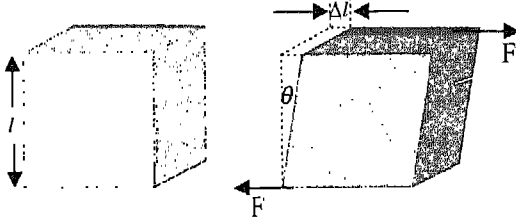
$$= 0.159\%$$

सारणी 9.1 कुछ सामान्य पदार्थों के प्रत्यास्थ गुण

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
एलुमिनियम	2710	70	110	95
तांबा	8890	120	400	200
लोहा (पिटवां)	7800-7900	190	330	170
स्टील	7860	200	400	250
कांच	2190	65	50	-
कंक्रीट	2320	30	40	-
लकड़ी	525	13	50	-
अस्थि	1900	9	170	-
पॉलीस्टीरीन	1050	3	48	-

9.6.2 अपरूपण

कोई ठोस विस्तार के अतिरिक्त अन्य प्रकार के विरूपणों का भी अनुभव करता है । चित्र 9.10(b) में दर्शाए अनुसार सिलिंडर के अक्ष के लंबवत् आरोपित किसी बलों के युगल से सिलिंडर ठीक उसी प्रकार विरूपित हो जाता है जैसे हम किसी ताश के पत्तों की गड्डी को फेंटते समय विरूपित कर देते हैं । इसी प्रकार, चित्र 9.15 में एक आयताकार ठोस दिखाया गया है

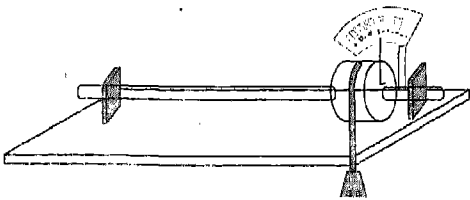
जिसके फलक प्रारंभ में आयताकार हैं । जब इस ठोस पर इसके ऊपरी तथा निचले फलकों के समान्तर, समान एवं विपरीत क्षैतिज बल आरोपित किए जाते हैं, तो इस ठोस में इस प्रकार की विकृति उत्पन्न होती है कि निचले फलक के आपेक्ष ऊपरी फलक पार्श्विक गति करता है । ऊपरी फलक का क्षैतिज विस्थापन Δl ऊर्ध्वाधर ऊंचाई l के लंबवत् है । इस प्रकार के विरूपण को **अपरूपण** कहते हैं तथा तद्नुरूपी प्रतिबल को **अपरूपण प्रतिबल** कहते हैं । इस प्रकार का प्रतिबल केवल ठोसों में ही संभव होता है । यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि इस प्रकार के विरूपण में किसी भी फलक के क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन नहीं होता ।

चित्र 9.15 कोइ अपरूपण प्रतिबल घन के किसी भी फलक के क्षेत्रफल में परिवर्तन किए बिना उसमें व्यावर्तन (ऐंठन) उत्पन्न कर देता है ।

विकृति $\Delta l/l = \tan\theta$ होती है, यहां θ, चित्र 9.15 में दर्शाए अनुसार अपरूपण कोण है । यहां पर प्रतिबल, स्पर्शरेखीय बल **F** को ठोस के क्षैतिज फलक के क्षेत्रफल A से विभाजित करने पर प्राप्त होता है । यदि यहां हुक के नियम का पालन होता है, तब

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta l}{l}$$

$$= \mathrm{G}\tan\theta \qquad (9.7)$$

यहां इस समीकरण में तद्नुरूपी प्रत्यास्थता गुणांक G है जिसे **अपरूपण गुणांक** कहते हैं । यंग प्रत्यास्थता गुणांक की भांति अपरूपण गुणांक भी प्रति एकांक क्षेत्रफल पर बल होता है, अत: यह भी पास्कल में ही मापा जाता है और इसका SI मात्रक $\mathrm{N\,m^{-2}}$ है ।

किसी पदार्थ का अपरूपण गुणांक मापने का सामान्य ढंग : उस पदार्थ की छड़ अथवा तार लेकर उस पर चित्र 9.16 में दर्शाए अनुसार ज्ञात परिमाण का बल आरोपित करके संगत व्यावर्तन कोण नापते हैं ।

चित्र 9.16 किसी पदार्थ के अपरूपण गुणांक मापने के लिए व्यवस्था ।

यह दर्शाया जा सकता है कि एक सिरे पर दृढ़तापूर्वक जकड़ी l लंबाई तथा R त्रिज्या की किसी छड़ को जब उसके दूसरे सिरे पर बल आघूर्ण τ आरोपित करके ऐंठा जाता है, तो उसमें θ घूर्णन उत्पन्न होता है जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\theta = \frac{2\tau l}{\pi R^4 G}$$

अथवा $$G = \frac{2\tau l}{\pi R^4 \theta} \qquad (9.8)$$

समीकरण (9.8) की उपपत्ति इस पाठ्य क्षेत्र से परे है । अपरूपण प्रतिबल की उन शाफ्टों के आकुंचन में महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है जो भारण (लोड) के अधीन घूर्णन करते हैं। इसके अतिरिक्त झुकाव के कारण अस्थियों के टूटने में भी इसकी भूमिका है। सारणी 9.2 में कुछ सामान्य पदार्थों के अपरूपण गुणांक दिये गए हैं ।

सारणी 9.2 : कुछ समान्य पदार्थों के अपरूपण गुणांक G

पदार्थ	G (10^9 Nm^{-2})
ऐलुमिनियम	25
तांबा	40
लोहा	50
स्टील	80
कांच	30
लकड़ी	10

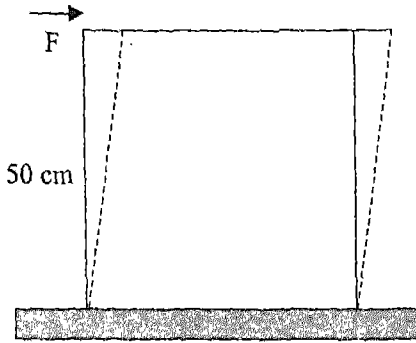
▶ ***उदाहरण 9.2*** सीसे की एक ऊर्ध्व रखी वर्गाकार पट्टिका जिसकी भुजा 50 cm तथा मोटाई 10 cm है, के ऊपरी संकरे फलक पर 9.0×10^4 N का अपरूपण बल आरोपित किया गया है । पट्टिका का निचला किनारा फर्श से रिवेट द्वारा जुड़ा है । यदि सीसे का अपरूपण गुणांक 5.6×10^9 Pa है, तो पट्टिका के ऊपरी किनारे में कितना विस्थापन होगा ?

हल चित्र 9.17 में दर्शाए अनुसार पट्टिका फर्श से जुड़ी है । इस पट्टिका के संकरे फलक के समान्तर चित्र में दर्शाए अनुसार बल आरोपित किया जाता है । जिस फलक के समान्तर बल आरोपित किया जाता है उसका क्षेत्रफल,

$$\mathrm{A = 50\,cm \times 10\,cm}$$
$$\mathrm{= 0.5\,m \times 0.1\,m}$$
$$\mathrm{= 0.05\,m^2}$$

अत: आरोपित प्रतिबल

$$= \frac{9.0\times10^4\,\mathrm{N}}{0.05\,\mathrm{m}^2}$$
$$= 1.80\times10^6\,\mathrm{Nm^{-2}}$$

विकृति $= \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{\text{प्रतिबल}}{\mathrm{G}}$

चित्र 9.17

अतः विस्थापन $\Delta l = \dfrac{\text{प्रतिबल}}{G} \times L$

$$= \frac{1.8\times10^{6}\,\text{Nm}^{-2}}{5.6\times10^{9}\,\text{Pa}}\times 0.5\,\text{m}$$

$$= \frac{1.8\times10^{6}\,\text{Nm}^{-2}}{5.6\times10^{9}\,\text{Nm}^{-2}}\times 0.5\,\text{m} \quad \left(1\,\text{Pa} = 1\,\text{N m}^{-2}\right)$$

$$= 1.6\times10^{-4}\,\text{m}$$

$$= 0.16\,\text{mm}$$

9.6.3 द्रवचालित प्रतिबल, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

चित्र 9.10(c) में, पिण्ड पर प्रतिबल तरल दाब p के तुल्य है। किसी निकाय के पृष्ठ के प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल दाब होता है जोकि पृष्ठ के हर बिंदु पर लंबवत् आरोपित होता है। समान दाब के प्रकरण में प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल हर बिंदु पर समान होता है। प्रतिबल की विमाएं भी एकांक क्षेत्रफल पर बल की विमाएं ही हैं। परन्तु प्रतिबल सदैव ही पृष्ठ के अभिलंबवत् कार्य नहीं करता। तनन प्रतिबल पृष्ठ के अभिलंबवत् आरोपित किया जाता है, जबकि अपरूपण प्रतिबल पृष्ठ के समान्तर आरोपित किया जाता है। किन्तु, दाब के व्यवहार के विपरीत, प्रतिबल प्रति एकांक क्षेत्रफल पर बल विभिन्न पृष्ठों पर परिमाण में भी भिन्न हो सकता है। दाब एक विशेष प्रकार का प्रतिबल होता है जो किसी पदार्थ के आयतन में तो परिवर्तन कर सकता है, परन्तु उसकी आकृति में परिवर्तन नहीं कर सकता। यदि किसी पदार्थ का मूल आयतन V है तथा किसी प्रतिबल के कारण आयतन में परिवर्तन ΔV है, तो आयतन विकृति को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$\varepsilon_V = \Delta V / V \qquad (9.9)$$

इस स्थिति में पिण्ड चल द्रवीय संपीडन के अधीन कहा जाता है। चल द्रवीय दाब p प्रतिबल की माप होती है।

अतः

$$p = B\frac{\Delta V}{V} \qquad (9.10)$$

यहां तद्नुरूपी प्रत्यास्थता गुणांक पदार्थ का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक कहलाता है, जिसका प्रतीक B, तथा SI मात्रक Nm^{-2} है।

किसी स्थायी निकाय के लिए चल द्रवीय प्रतिबल सदैव ही आयतन कम कर देता है। द्रव की प्रत्येक अवस्था - ठोस, द्रव तथा गैस चल द्रवीय प्रतिबल का प्रदर्शन करती है। सारणी 9.3 में समान्य रुचि के कुछ पदार्थों के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक दिए गए हैं। ध्यान दें कि ठोस न्यूनतम संपीड्य होते हैं, जबकि गैसें अत्यधिक संपीड्य होती हैं। सभी ठोसों के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $10^{11}\,\text{Nm}^{-2}$ के परास में होते हैं, जो कि जल के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक के लगभग 50 गुने बड़े हैं। ठोसों की असंपीड्यता का प्रमुख कारण उनका दृढ़ परमाण्वीय जालक अथवा पड़ोसी परमाणुओं के बीच दृढ़ युग्मन है। द्रवों तथा गैसों में अणु अपने पड़ोसी अणुओं के साथ कम दृढ़ता पूर्वक युग्मित होते हैं।

सारणी 9.3 कुछ ठोसों, द्रवों तथा गैसों के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

पदार्थ	आयतन प्रत्यास्थता गुणांक B ($10^9 \times \text{Nm}^{-2}$)
ठोस	
ऐलुमिनियम	70
तांबा	120
लोहा	80
स्टील	158
काँच	36
द्रव	
एथानॉल	0.9
पारा	25
जल	2.2
गैस	
वायु (STP पर)	1.0×10^{-4}

उदाहरण 9.3 हिंद महासागर की औसत गहराई लगभग 3000 m है। सागर की तली पर जल के भिन्नात्मक संपीडन $\Delta V/V$, का परिकलन कीजिए। जल का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $2.2 \times 10^9\,\text{N m}^{-2}$ है।

हल 3000 m ऊंचाई के जल-स्तम्भ द्वारा आरोपित दाब $= h\rho g$

$$= 3000\,\text{m} \times 1000\,\text{kg m}^{-3} \times 10\,\text{m s}^{-2}$$

$$= 3\times10^{7}\,\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$$

$$= 3\times10^{7}\,\text{Nm}^{-2} \qquad [1\,\text{N} = 1\,\text{kg m s}^{-2}]$$

जल का भिन्नात्मक संपीडन $= \frac{\Delta V}{V}$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\text{प्रतिबल}}{B} = \frac{3\times10^{7}\,\mathrm{N\,m^{-2}}}{2.2\times10^{9}\,\mathrm{N\,m^{-2}}}$$

$$= 1.36\times10^{-2} = 1.36\,\%$$

9.7 द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार के अनुप्रयोग

हमारे दैनिक जीवन में द्रव्यों के प्रत्यास्थ व्यवहार की महत्त्वपूर्ण भूमिका है। इंजीनियरी-अभिकल्पनाओं के लिए उपयोग में आने वाली सभी प्रकार की सामग्री के प्रत्यास्थ व्यवहार की यथार्थ जानकारी आवश्यक होती है। उदाहरण के लिए, किसी भवन की अभिकल्पना करते समय स्तम्भों (कॉलमों), दण्डों (बीम) तथा आधारों की विस्तृत संरचनात्मक अभिकल्पना के लिए इनके बनाने में उपयोग आने वाली समस्त भवन सामग्री के सामर्थ्य की विस्तृत जानकारी होना अत्यन्त आवश्यक है। क्या आपने कभी सोचा है कि पुलों के निर्माण में आधार आदि के रूप में काम आने वाले दण्डों की अनुप्रस्थ काट की आकृति I (अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षर आई) जैसी क्यों होती है। बालू रेत के ढेर अथवा किसी पहाड़ी की आकृति पिरामिड जैसी क्यों होती है ? इन प्रश्नों के उत्तर जटिल हैं, जिनके लिए संरचनात्मक इंजीनियरी विषय की गूढ़ जानकारी चाहिए। हम अपनी बात की व्याख्या केवल कुछ उदाहरणों की सहायता से करेंगे।

भारी-भारी बोझों को उठाने तथा उन्हें एक स्थान से दूसरे स्थान तक लाने-ले जाने के लिए उपयोग आने वाली क्रेनों में धातु के तारों से बनी मोटी रस्सी लगी होती है जिससे भारी बोझ लटकाए जाते हैं। इस रस्सी को घिरनियों तथा मोटरों द्वारा खींचा जाता है। मान लीजिए, हम एक ऐसी क्रेन बनाना चाहते हैं जिसकी बोझा उठाने की क्षमता 10 मीट्रिक टन हो। तब एक प्रश्न उठना स्वाभाविक है कि क्रेन की स्टील की रस्सी की मोटाई कितनी होनी चाहिए ? सुस्पष्ट रूप से हम यह चाहेंगे कि बोझ के कारण रस्सी में स्थायी विरूपण न हो; अत: रस्सी में विस्तार प्रत्यास्थता सीमा से अधिक नहीं होना चाहिए। सारणी 9.1 में हम यह पाते हैं कि स्टील की पराभव सामर्थ्य 300 $\times 10^{6}\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ है। अत: रस्से की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल (A) कम से कम कितना होना चाहिए इसका परिकलन नीचे दिए अनुसार किया जा सकता है,

$$A \geq W/S_y = Mg/S_y$$

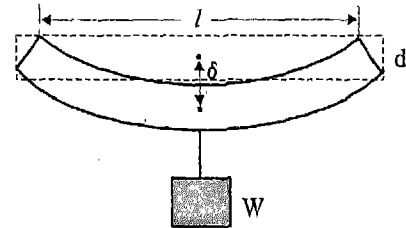
$$= \frac{10^{4}\,\mathrm{kg}\times10\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{300\times10^{6}\,\mathrm{N\,m^{-2}}}$$

$$= \frac{10^{5}\,\mathrm{N}}{3\times10^{8}\,\mathrm{N\,m^{-2}}}$$

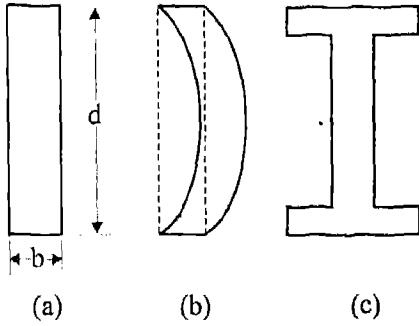
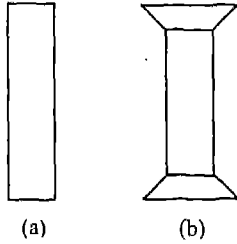
$$= 3.3\times10^{-4}\,\mathrm{m^{2}} \qquad (9.11)$$

यह क्षेत्रफल किसी वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट के रस्सी के लिए लगभग 1 cm त्रिज्या के तुल्य है। सुरक्षा की दृष्टि से यदि हम सुरक्षा कारक (~10) लें, तो आंकलित त्रिज्या लगभग 10 cm होगी। यदि आप इतनी त्रिज्या के किसी धातु के तार की कल्पना करें, तो वह एक रस्से की भांति लचीली न होकर एक धातु की सुदृढ़ छड़ होगी। यही कारण है कि रस्सी सदैव ही अपेक्षाकृत बहुत से पतले तारों को आपस में लंबी चोटी की भांति गूंथकर बनाई जाती है। ऐसा, रस्सी की सामर्थ्य, लचीलापन तथा निर्माण में सुगमता को ध्यान में रखकर किया जाता है।

किसी पुल की अभिकल्पना (डिजाइन) इस प्रकार की जाती है कि वह उस पर से गुजरने वाले वाहनों के बोझ, अपने भार तथा वायु (पवनों) के झोंकों को सहन कर सके। इसी प्रकार किसी भवन की अभिकल्पना में स्तंभों तथा दण्डों का उपयोग बहुत सामान्य है। इन दोनों ही समस्याओं में बोझ के प्रभाव में दण्ड के बंकन (bending) की प्राथमिक महत्ता है। दण्ड में अत्यधिक बंकन नहीं होना चाहिए तथा वह टूटना भी नहीं चाहिए। इसीलिए आइए अब हम चित्र 9.18 में दर्शाए अनुसार किसी ऐसे दण्ड पर विचार करते हैं जिसके दोनो सिरे आधारों पर टिके हैं तथा जिस पर बीच में कोई भार लटकाया गया है। यदि छड़ की लंबाई l, चौड़ाई b तथा मोटाई d हो तब उसके मध्य में भार W लटकाने पर उस छड़ के मध्य में उत्पन्न अवनमन δ निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त किया जाता है,

$$\delta = \frac{Wl^{3}}{4bd^{3}Y} \qquad (9.12)$$

चित्र 9.18 दोनों सिरों पर टेकों पर आधारित कोई दण्ड जिसके मध्य में भार लटकाया गया है।

इस संबंध में आप जो कुछ अब तक पढ़ चुके हैं तथा कैलकुलस का प्रयोग करके व्युत्पन्न कर सकते हैं। समीकरण 9.12 में हम यह देखते हैं कि किसी दिए गए भार W के लिए अवनमन में कमी करने के लिए हमें ऐसे द्रव्य का चुनाव करना चाहिए जिसका यंग प्रत्यास्थता गुणांक अधिक हो। अवनमन में किसी दिए गए द्रव्य के लिए मोटाई 'd' में वृद्धि करने की तुलना में चौड़ाई b में वृद्धि करना अधिक प्रभावी होता है, क्योंकि अवनमन δ, मोटाई d की त्रिघात तथा चौड़ाई b की केवल एक घात के व्युत्क्रमानुपाती है। तथापि, किसी गहन दंड (deep beam) में, चित्र 9.19 में दर्शाए अनुसार, आकुंचन की प्रवृत्ति होती है। इस चित्र में छड़ों की अनुप्रस्थ काटों की विभिन्न आकृतियां दिखाई गई हैं। छड़ में आकुंचन से बचाव के लिए चित्र 9.19(c) में दर्शाए अनुसार मध्य मार्ग के रूप में I आकृति की अनुप्रस्थ काट के बीम का निर्माण किया गया है। वह परिच्छेद (काट) भार सहन करने के अधिक पृष्ठीय क्षेत्र तथा अवनमन से बचाव के लिए काफी गहनता प्रदान करता है। इस आकृति के कारण दण्ड का भार समझौता किए बिना कम रह सकता है, फलस्वरूप लागत (मूल्य) भी काफी घट जाती है।

भवनों तथा पुलों के निर्माण में खंभों तथा स्तंभों का उपयोग भी सामान्यत: सभी स्थानों पर होता है। चित्र 9.20(a) में दर्शाया

चित्र 9.19 दण्डों के अनुप्रस्थ काट की विभिन्न आकृतियां (a) किसी छड़ का आयताकार परिच्छेद; (b) कोई पतली छड़ और उसमें आकुंचन; (c) भार सहन करने वाली छड़ों के लिए सर्वमान्य परिच्छेद ।

चित्र 9.20 खंभे अथवा स्तंभ : (a) गोलाकार सिरों वाला खंभा, (b) फैलावदार सिरों वाला खंभा ।

गया गोलाकार सिरों वाला खंभा चित्र 9.20(b) में दर्शाए गए फैलावदार सिरों वाले खंभे की तुलना में कम बोझ संभालता है ।

चट्टानों के प्रत्यास्थ गुणों का विश्लेषण करने पर इस प्रश्न का उत्तर भी दिया जा सकता है कि पृथ्वी पर पर्वतों की अधिकतम ऊंचाई सीमित ~10 km क्यों है । किसी पर्वत के आधार के विभिन्न बिंदुओं पर एकसमान संपीडन नहीं होता । अत: चट्टानों पर कुछ अपरूपण प्रतिबल आरोपित होता है, फलस्वरूप चट्टानें प्रवाहित होती हैं ।

किसी h ऊंचाई के पर्वत के आधार पर, पर्वत के भार के कारण, प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल $h\rho g$ होता है, यहां ρ पर्वत के पदार्थ का घनत्व, तथा g गुरुत्वीय त्वरण है । पर्वत की तली ऊर्ध्वाधर दिशा में इस बल का अनुभव करती है । पर्वत का ढाल स्वतंत्र होता है । अत: इस प्रकरण को पूर्णत: दाब अथवा आयतन संपीडन का प्रकरण नहीं माना जा सकता । इसमें स्वयं एक अपरूपण घटक होता है जिसका सन्निकट मान $h\rho g$ होता है । अब, किसी प्ररूपी चट्टान की प्रत्यास्थता सीमा 30×10^7 Nm^{-2} होती है । इसे अपरूपण घटक $h\rho g$ से समतुलित करने पर

$$h\rho g = 30 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$$

अथवा
$$h = \frac{30\times10^7 \text{ N m}^{-2}}{\rho g}$$

$$= \frac{30\times10^7 \text{ N m}^{-2}}{3\times10^3 \text{ kg}\times10 \text{ m s}^{-2}}$$

$$= 10 \text{ km}$$

[नोट : एवरेस्ट पर्वत की ऊंचाई भी लगभग इतनी ही है ।]

सारांश

1. सभी द्रव्य अत्यन्त सूक्ष्म पृथक्-पृथक् घटकों (परमाणुओं तथा अणुओं) से मिलकर बनते हैं जो निरन्तर गतिशील रहते हैं ।
2. परमाणु के संबंध में प्रमाण रासायनिक संयोजन के अनुभवाश्रित नियमों तथा अणु गति सिद्धांत की सफल भविष्यवाणियों से प्राप्त हुए । ब्राउनी गति परमाणु की वास्तविकता की प्रभावशली ढंग से पुष्टि करती है । इसकी मात्रात्मक विवेचना से आवोगाद्रो नियतांक का मान प्राप्त हुआ ।
3. अंतराणुक स्थितिज ऊर्जा के आकर्षी तथा प्रतिकर्षी रूप होते हैं । जैसे-जैसे दूरी R घटती है, आकर्षी बल बढ़ते हैं । किसी निश्चित दूरी R_0 पर स्थितिज ऊर्जा निम्नतम होती है । $R < R_0$ के लिए यह बल प्रतिकर्षी होता है ।
4. द्रव प्रावस्था परमाणुओं अथवा अणुओं के बीच आकर्षण बल के फलस्वरूप होती है । द्रव से ठोस प्रावस्था के संक्रमण में बल का प्रतिकर्षी भाग अपनी निर्णायक भूमिका निभाता है ।
5. कोई ठोस परमाणुओं अथवा अणुओं की एक अत्यधिक बड़ी संख्या (~ 10^{23}) का समूह होता है । इनकी निश्चित आकृति तथा आकार होता है । दैनिक जीवन में संपर्क में आने वाले ठोसों को निम्नलिखित समूहों में वर्गीकृत किया जा सकता है :
   (i) क्रिस्टलीय ठोस
   (ii) अंश क्रिस्टलीय ठोस, तथा
   (iii) कांचीय अथवा अक्रिस्टलीय ठोस
6. सर्वसम भवन-खण्डों की नियमित पुनरावृत्ति द्वारा क्रिस्टलों का निर्माण होता है । ये मूल भवन-खण्ड परमाणु अथवा अणु होते हैं । क्रिस्टल परमाणुओं का त्रिविमीय आवृत्ति विन्यास होता है जिसे जालक कहते हैं । किसी जालक में प्रत्येक परमाणु की अपने निकटतम पड़ोसी से सुनिश्चित साम्य-दूरी होती है । अंतराणुक बलों द्वारा सभी परमाणु एक दूसरे से बंधे रहते हैं ।

7. अक्रिस्टलीय अथवा कांचीय ठोसों में परमाणु द्रवों की भांति यादृच्छिक ढंग से व्यवस्थित रहते हैं परन्तु इनमें द्रवों की भांति एक अणु अन्य अणुओं के आपेक्ष गतिमान नहीं रहता। इनमें परमाण्विक अथवा आण्विक अवस्थितियां एक दूसरे के आपेक्ष स्थिर रूप से जकड़ी रहती हैं। फलस्वरूप क्रिस्टलीय ठोसों की भांति इन ठोसों की भी एक निश्चित आकृति एवं आकार होता है।
8. अंश-क्रिस्टलीय ठोसों में क्रिस्टलीय तथा अक्रिस्टलीय प्रावस्थाएं सहवर्ती होती हैं। कुछ बहुलक (पॉलीमर) इन ठोसों के उदाहरण हैं।
9. एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित अपरूपक बल को प्रतिबल कहते हैं आरोपित प्रतिबल द्वारा उत्पन्न एकांक विरूपण को विकृति कहते हैं। व्यापक रूप से प्रतिबल तीन प्रकार के होते हैं - (a) तनन प्रतिबल (खिंचाव से संबद्ध), (b) अपरूपण प्रतिबल, तथा (c) संपीड्य अथवा चल द्रवित प्रतिबल।
10. अल्प विरूपणों के लिए **प्रतिबल** $\propto$ **विकृति**। इसे हुक का नियम कहते हैं। आनुपातिकता स्थिरांक को **प्रत्यास्थता गुणांक** कहते हैं। विरूपण बल आरोपित करने पर पिण्डों की प्रतिक्रिया तथा उनके प्रत्यास्थ व्यवहार का वर्णन करने के लिए तीन प्रकार के प्रत्यास्थता गुणांकों का प्रयोग किया जाता है।

    ठोसों का एक वर्ग ऐसा भी है जो हुक के नियम का पालन नहीं करता, इसे **प्रत्यास्थलक** कहते हैं।
11. पिण्ड की तनाव अथवा संपीडन अवस्था में हुक का नियम

    $F/A = Y\Delta L/L$ द्वारा व्यक्त होता है।

    यहां $\Delta L/L$ पिण्ड की तनन अथवा संपीडन विकृति है, F उस बल का परिमाण है (जिसके कारण विकृति उत्पन्न होती है), A वह अनुप्रस्थ काट है जिस पर बल F (A के लंबवत्) आरोपित किया जाता है, तथा Y पिण्ड के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक है। F/A प्रतिबल है।
12. जब समान किंतु विपरीत दिशा के बलों का कोई युगल किसी ठोस के ऊपरी तथा निचले फलकों पर इनके समान्तर आरोपित किया जाता है तो ठोस में इस प्रकार का विरूपण होता है कि निचले फलक के आपेक्ष ऊपरी फलक पर्श्विक गति करता है। ऊपरी फलक का क्षैतिज विस्थापन Δl ऊर्ध्वाधर ऊंचाई l के लंबवत् होता है। इस प्रकार के विरूपण को अपरूपण कहते हैं तथा संगत प्रतिबल को **अपरूपण प्रतिबल** कहते हैं। इस प्रकार का प्रतिबल केवल ठोसों में ही संभव होता है।

    इस प्रकार के विरूपण में हुक के नियम को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

    $$F/A = G\Delta l/l$$

    यहां Δl पिण्ड के एक सिरे का दूसरे सिरे के आपेक्ष विस्थापन है, तथा G अपरूपण गुणांक है। F/A प्रतिबल है।
13. जब कोई पिण्ड चारों ओर के तरल द्वारा आरोपित प्रतिबल (चल द्रवित) के अधीन संपीडन में होता है तब हुक के नियम को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

    $$p = B(\Delta V/V),$$

    यहां p तरल के कारण पिण्ड पर दाब **(चल द्रवित प्रतिबल)**, $\Delta V/V$ इस दाब के कारण पिण्ड के आयतन में निरपेक्ष भिन्नात्मक परिवर्तन तथा B पिण्ड का **आयतन प्रत्यास्थता गुणांक** है।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएं	मात्रक	टिप्पणी
प्रतिबल	σ	$[ML^{-1}T^{-2}]$	Nm^{-2}	प्रतिबल $\propto$ विकृति (हुक का नियम)
विकृति	ε	विमाहीन	कोई मात्रक नहीं	
यंग प्रत्यास्थता गुणांक	Y	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$N\,m^{-2}$	लंबाई में परिवर्तन के लिए लागू (ठोसों के लिए प्रासंगिक)
अपरूपण गुणांक	G	$[ML^{-1}T^{-2}]$	Nm^{-2}	आकृति में परिवर्तन के लिए लागू (ठोसों के लिए प्रासंगिक)
आयतन प्रत्यास्थता गुणांक	B	$[ML^{-1}T^{-2}]$	Nm^{-2}	आयतन में विकृति के लिए लागू होना (ठोसों तथा गैसों के लिए प्रासंगिक)

विचारणीय विषय

1. प्रत्यास्थ सीमा से परे आरोपित प्रतिबल तथा संगत विकृति के बीच रैखिक संबंध (हुक का नियम) वैध नहीं है ।
2. विराम अवस्था में किसी पिण्ड पर आरोपित कोई केवल एकल बल ही उसमें स्थानांतरीय गति उत्पन्न करने के लिए उत्तरदायी है । किसी पिण्ड पर एक ही रेखा के अनुदिश कार्यरत परिमाण में समान परन्तु दिशा में विपरीत दो बल उसके गुरुत्व केंद्र में बिना कोई स्थानांतरीय गति किए उसमें विरूपण उत्पन्न कर देते हैं । उदाहरण के लिए, किसी तार के सिरे से कोई भार निलंबित करने पर उस तार में तनाव उत्पन्न हो जाता है तथा उस पर दो बल कार्य करते है-(i) तार पर लटकाए गए भार के कारण बल तथा (ii) छत द्वारा तार के दूसरे सिरे पर आरोपित बल । प्रतिबल आंतरिक प्रत्यानयन बल से संबंधित होता है जो तब कार्यरत होता है जब बाह्य बलों के कारण कोई विरूपण उत्पन्न होता है। किसी ऐसे तार के लिए जो अपने सिरों पर लगे दो समान एवं विपरीत बलों के कारण तनाव में है तथा प्रत्येक बल का परिमाण F है, उस पर प्रतिबल F/A होता है $2F/A$ नहीं होता, यहां पर A तार की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल है।
3. यंग प्रत्यास्थता गुणांक तथा अपरूपण गुणांक केवल ठोसों के लिए ही प्रासंगिक होते हैं, इसका कारण यह है कि केवल ठोसों की ही लंबाई तथा आकृति होती है ।
4. आयतन प्रत्यास्थता गुणांक ठोसों, द्रवों तथा गैसों के लिए प्रासंगिक होता है । यह उस स्थिति में आयतन में परिवर्तन से संबंधित होता है जब पिण्ड का प्रत्येक भाग समान प्रतिबल के प्रभाव में हो (ताकि पिण्ड की आकृति अपरिवर्तित रहे)। आयतन में अन्यथा किसी परिवर्तन का सीधे ही आयतन प्रत्यास्थता गुणांक से संबंध नहीं होता । उदाहरण के लिए अनुदैर्घ्य विकृति के अधीन किसी तार के लिए, अनुप्रस्थ विमाएं (अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या) में लघु परिवर्तन होगा, जिसका वर्णन पदार्थ के अन्य प्रत्यास्थता नियतांक (जिसे प्वासों अनुपात कहते हैं) द्वारा किया जाता है ।
5. व्यापक रूप में, किसी एक दिशा में आरोपित विरूपक बल अन्य दिशाओं में भी विकृति उत्पन्न कर सकता है । ऐसी अवस्थितियों में प्रतिबल एवं विकृति के बीच आनुपातिकता का वर्णन केवल एक प्रत्यास्थता नियतांक द्वारा नहीं किया जा सकता [उच्चतर अध्ययन में आप यह सीखेंगे कि प्रत्यास्थता गुणांक प्रदिश (टेन्सर) होते हैं]।

अभ्यास

9.1 तांबे का काला ऑक्साइड चार भिन्न विधियों द्वारा बनाया गया और निम्नलिखित प्रेक्षण नोट किए गए :

तांबा (g में)	कॉपर ऑक्साइड (g में)
5.015	6.284
8.286	10.357
18.443	23.169
12.011	15.051

इस आंकड़े से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं ?

9.2 दो पदार्थों को संयोजित करने पर प्राप्त एक से अधिक यौगिकों की संहतियों के आंकड़े नीचे दिए गए हैं । इस आंकड़े में छिपी असाधारण विशेषता को खोजने का प्रयास कीजिए ।

कार्बन (भाग संहति द्वारा)	ऑक्सीजन (भाग संहति द्वारा)	यौगिक
464.9	626.7	कार्बन मोनोऑक्साइड
789.3	2086.2	कार्बन डाइऑक्साइड
कार्बन	हाइड्रोजन	यौगिक
334.6	111.2	मेथेन
854.5	146.4	एथीलीन
तत्व	सल्फर	यौगिक
150.0	75.6	I
266.4	68.8	II

9.3 मेथेन का रासायनिक सूत्र CH_4 दिया हुआ है । अभ्यास 9.2 में दिए गए आंकड़ों के आधार पर कार्बन परमाणु की संहति तथा हाइड्रोजन परमाणु की संहति में अनुपात ज्ञात कीजिए तथा एथीलीन के लिए किसी संभावित रासायनिक सूत्र का अनुमान लगाइए ।

9.4 नीचे सारणी में दो गैसीय अभिक्रियाओं के प्रेक्षण दिए गए हैं । प्रत्येक सेट में ताप एवं दाब की शर्तें स्थिर रखी गई हैं।

A	नाइट्रोजन गैस (cm^3)	हाइड्रोजन गैस (cm^3)	अमोनिया गैस (cm^3)
	623.3	1830.0	1253.4
	349.0	1051.2	685.6
	84.7	251.9	170.7
B	**हाइड्रोजन गैस (cm^3)**	**ऑक्सीजन गैस (cm^3)**	**जलवाष्प (cm^3)**
	307.9	156.6	309.1
	435.9	217.8	432.6
	851.1	473.1	856.0

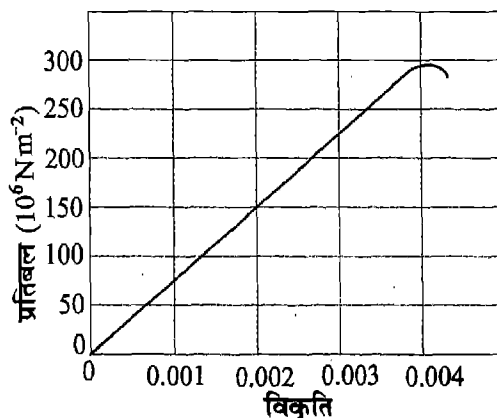
इन आंकड़ों से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं ? आवोगाद्रो की परिकल्पना तथा परमाण्वीय निरूपण के आधार पर आपने जो अनुमानित निष्कर्ष निकाला है, क्या आप उस नियम को समझ सकते हैं ?

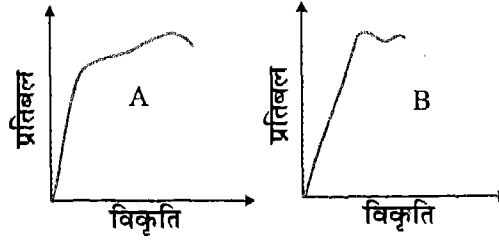
9.5 (a) आवोगाद्रो की परिकल्पना इस प्रकार है: "ताप तथा दाब की समान अवस्थाओं में सभी गैसों के समान आयतनों में अणुओं की संख्या समान होती है।" मान लीजिए हम इस परिकल्पना में 'अणु' को 'परमाणु' द्वारा प्रतिस्थापित कर देते हैं। (रासायनिक अभिक्रियाओं में हम परमाणु द्वारा ऐसे अविभाज्य सत्वों का उल्लेख करते हैं जो अणुओं से भिन्न हों तथा परमाणुओं में विखंडित हो सकें) । क्या संशोधित परिकल्पना सही होगी ? क्या यह अभ्यास 9.4 के आंकड़ों को स्पष्ट करेगा ?

(b) अभ्यास 9.4 द्वारा प्रस्तावित नाइट्रोजन, ऑक्सीजन तथा हाइड्रोजन की परमाणुकता क्या है ? (किसी अणु में परमाणुओं की संख्या को परमाणुकता कहते हैं ।)

9.6 1mm व्यास की ओलिव आयल की एक बूंद को धीरे से जब उस जल पर स्थानांतरित किया गया जिस पर लाइकोपोडियम पाउडर का छिड़काव एक परत के रूप में किया गया था तो वह बूंद जल के पृष्ठ पर 28.1 cm व्यास की वृत्तीय पतली तैल फिल्म के रूप में फैल गई। यह मानते हुए कि यह फिल्म केवल एक अणु के बराबर मोटी है, तेल के अणु के आकार का अनुमान लगाइए ।

9.7 4.7 m लंबे व $3.0 \times 10^{-5} m^2$ अनुप्रस्थ काट के स्टील के तार तथा 3.5 m लंबे व $4.0 \times 10^{-5} m^2$ अनुप्रस्थ काट के तांबे के तार पर दिए गए समान परिमाण के भारों को लटकाने पर उनकी लंबाइयों में समान वृद्धि होती है । स्टील तथा तांबे के यंग प्रत्यास्थता गुणांकों में क्या अनुपात है ?

9.8 नीचे चित्र 9.21 में किसी दिए गए पदार्थ के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र दर्शाया गया है । इस पदार्थ के लिए (a) यंग प्रत्यास्थता गुणांक, तथा (b) सन्निकट पराभव सामर्थ्य क्या है ?

चित्र 9.21

9.9 दो पदार्थों A तथा B के लिए प्रतिबल-विकृति ग्राफ चित्र 9.22 में दर्शाए गए हैं ।

चित्र 9.22

इन ग्राफ़ों को एक ही पैमाना मानकर खींचा गया है ।

(a) किसी पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक अधिक है ?

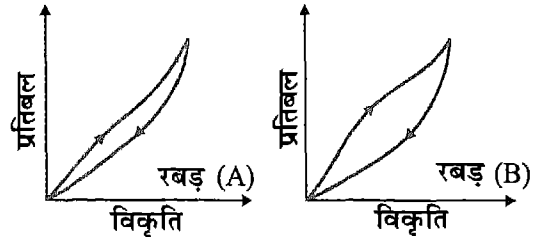
(b) कौन-सा पदार्थ अधिक तन्य है ?

(c) कौन-सा पदार्थ अधिक भंगुर है ?

(d) दोनों पदार्थों में कौन अधिक मजबूत है ?

9.10 दो विभिन्न प्रकार के रबड़ों के प्रतिबल-विकृति वक्र चित्र 9.23 के अनुसार पाए गए ।

(a) किन विशेष दशाओं में ये वक्र चित्र 9.12 में दर्शाए गए किसी धातु के तार के प्रतिबल-विकृति वक्र से भिन्न हैं ?

(b) किसी फैक्टरी में कोई भारी मशीन लगायी जानी है । मशीन के कंपनों के अवशोषण के लिए फर्श और मशीन के बीच रबड़ का ब्लॉक रखा जाता है । इस कार्य के लिए आप दोनों प्रकार के रबड़ों – A तथा B में से किसे प्राथमिकता देंगे और क्यों ?

चित्र 9.23

(c) कार-टायर बनाने के लिए आप इन दोनों रबड़ों में से किसे चुनेंगे ?

9.11 नीचे लिखे प्रत्येक प्रकथन को ध्यान से पढ़िए और कारण सहित यह बताइए कि अमुक प्रकथन सही है अथवा गलत

(a) रबड़ का प्रत्यास्थता गुणांक स्टील की तुलना में अधिक है ।

(b) किसी कुण्डली में खिंचाव का निर्धारण उसके अपरूपण गुणांक से किया जाता है ।

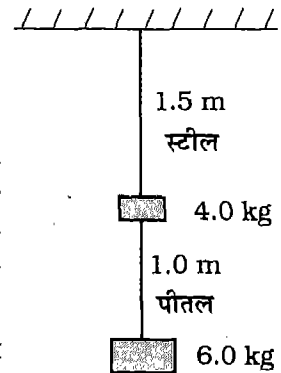
(c) जब कोई पदार्थ तनन-प्रतिबल के प्रभाव में होता है, तब प्रत्यानयन बल अन्तरापरमाणुक आकर्षण के कारण उत्पन्न होता है । इसके विपरीत जब वह संपीडन प्रतिबल के प्रभाव में होता है तब प्रत्यानयन बल अन्तरापरमाणुक प्रतिकर्षण के कारण उत्पन्न होता है ।

(d) रबड़ का टुकड़ा साधारण प्रतिबल के प्रभाव में 1000% विकृति प्रदर्शित कर सकता है; फिर भी भार हटाने पर वह अपनी मूल लंबाई ग्रहण कर लेता है । यह दर्शाता है कि रबड़ के टुकड़े में उत्पन्न प्रत्यानयन बल सही अर्थों में संरक्षी बल होते हैं ।

(e) प्रत्यास्थ बल तभी सही अर्थों में संरक्षी होते हैं जब हुक के नियम का पालन होता है ।

9.12 0.25 cm व्यास के दो तारों, जिनमें एक स्टील का और दूसरा पीतल का है, को भार बांधकर चित्र 9.24 में दर्शाए अनुसार लटकाया गया है । बिना भार लटकाए स्टील तथा तांबे के तारों की लंबाइयां क्रमशः 1.5 m व 1.0 m हैं । यदि स्टील तथा तांबे के यंग प्रत्यास्थता गुणांक क्रमशः 2.0×10^{11} Pa व 0.91×10^{11} Pa हैं तो स्टील तथा तांबे के तारों में अलग-अलग वृद्धि ज्ञात कीजिए (1 Pa = N m^{-2}) ।

चित्र 9.24

9.13 ऐलुमिनियम के किसी घन के किनारे 10 cm लंबे हैं । इस घन का एक फलक किसी ऊर्ध्वाधर दीवार से कसकर जकड़ा हुआ है तथा इस फलक के विपरीत फलक के साथ 100 kg संहति का कोई पिण्ड जुड़ा है । यदि ऐलुमिनियम का अपरूपण गुणांक 25 G Pa है तो इस फलक का ऊर्ध्वाधर विस्थापन कितना है ? (1 Pa = 1 Nm^{-2})

9.14 किसी सिलिका-कांच की छड़ का व्यास 1 cm तथा लंबाई 10 cm है। सारणी 8.1 में दिए आंकडों का उपयोग करके उस अधिकतम संहति का आकलन कीजिए जो इस छड़ से (इसको बिना तोड़े) लटकाई जा सकती है।

9.15 नीचे दिए गए आंकडों के आधार पर जल का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक परिकलित कीजिए : आरंभिक आयतन = 100.0 लीटर, दाब परिवर्तन =100.0 atm., अंतिम आयतन = 100.5 लीटर, (1 atm = 1.013 × 10^5 Pa)। जल तथा वायु (नियत ताप पर) के आयतन प्रत्यास्थता गुणांकों की तुलना कीजिए। सरल पदों में स्पष्ट कीजिए कि यह अनुपात इतना अधिक क्यों है। (1 Pa = 1 N m^{-2})

9.16 जल में किसी गहराई पर जहां दाब 80.0 atm है, जल का घनत्व क्या होगा ? जल का पृष्ठ पर घनत्व 1.03 × 10^3 kg m^{-3} है। जल की संपीड्यता 45.8 × 10^{-11} Pa^{-1} । (1 Pa = 1 N m^{-2})

अतिरिक्त अभ्यास

9.17 अभ्यास 9.3 में दिए गए रासायनिक संयोगों पर आधारित आंकड़ों का महत्त्व आंकेंगे कि ये आंकड़े विभिन्न तत्वों की परमाणु संहतियों के अधिक से अधिक श्रेष्ठ अनुपात देते हैं। यही कारण है कि परमाणु संहतियों को किसी 'संदर्भ परमाणु' के आपेक्ष परिभाषित करते हैं। आरंभ में रसायन विज्ञान में संदर्भ के रूप में हाइड्रोजन को चुना गया तथा इसकी परमाणु संहति को मात्रक संहति माना गया। इस प्रकार कहे जाने वाले रासायनिक पैमाने पर ऑक्सीजन की 16 मात्रक संहति निर्धारित की गई। अंतर्राष्ट्रीय सहमति के अनुसार एकीकृत परमाणु संहति मात्रक (u) को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है कि कार्बन के समस्थानिक ^{12}C की संहति यथार्थ रूप से 12 u के बराबर है। यद्यपि इन विभिन्न पैमानों में बहुत ही कम अंतर है, परन्तु परिशुद्ध मापन के लिए यह महत्त्वपूर्ण है।

एकीकृत परमाण्वीय पैमाने पर ^{137}Cs की संहति 136.90707 u है। इसी पैमाने पर ^1H की संहति 1.0078252 u है। हाइड्रोजन संदर्भ पैमाने के आपेक्ष ^{137}Cs की संहति क्या है ?

9.18 परमाणु संहति (मान लीजिए, एकीकृत पैमाने पर) तथ्यत: पूर्णांक क्यों नहीं होती ? विभिन्न पैमानों पर किसी तत्व की परमाणु संहति में अंतर क्यों होता है ?

9.19 (a) यदि रासायनिक संयोग पर आंकड़े केवल आपेक्षिक परमाणु संहतियां ही देते हैं, तो कोई व्यक्ति किसी परमाणु, जैसे ऑक्सीजन की निरपेक्ष संहति का पता कैसे लगाएगा ?

(b) 1 u को kg में व्यक्त कीजिए, दिया गया है कि एवोगैड्रो संख्या का प्रायोगिक मान N_A = 6.0222045 × 10^{23} mol^{-1} है।

9.20 चित्र 9.1 (पाठ में देखिए) में दो हाइड्रोजन परमाणुओं के बीच की दूरी के फलन के रूप में अंतरापरमाणुक स्थितिज ऊर्जा का आलेख दिया गया है। निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(a) यदि अंतरापरमाणुक बल वैद्युत प्रकृति के हैं, तो वे कूलॉम के नियम का पालन क्यों नहीं करते; अर्थात् बड़ी दूरियों के लिए वे (कूलॉम के नियम के अनुसार अपेक्षित $1/r^2$ के स्थान पर) $1/r^7$ की भांति क्यों परिवर्तित होते हैं ?

(b) अंतराअणुक बल के आकर्षी तथा प्रतिकर्षी भागों का भौतिक कारण क्या है ?

(c) यदि $r = R_0 = 0.74$Å पर स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम है, तो $r = 0.5$Å, 1.9Å तथा ∞ पर बल आकर्षी होंगे अथवा प्रतिकर्षी ?

9.21 STP पर 5.6 लीटर आयतन घेरने वाली हाइड्रोजन गैस के 0.05% को वियोजित करने के लिए कितनी ऊर्जा की आवश्यकता होती है ? हाइड्रोजन अणु की बंधन ऊर्जा 4.75 eV है।

9.22 किसी उदासीन H_2 अणु में अंतरापरमाणुक पृथकन 0.74Å, तथा बंधन ऊर्जा 4.75 eV है। यदि इस अणु से एक इलेक्ट्रॉन हटाया जाता है तो परिणामी आण्विक आयन H_2^+ की बंधन-ऊर्जा 2.8 eV हो जाती है। आप क्या अपेक्षा करते है : H_2^+ में दो प्रोटॉनों के बीच पृथकन 9.74Å से अधिक है अथवा कम ?

9.23 स्पष्ट कीजिए : (a) मुक्त Na^+ तथा Cl^- आयनों को उत्पन्न करने के लिए लगभग 1.3 eV ऊर्जा की आवश्यकता होती है। [इससे हमारा यह तात्पर्य है कि बड़ी दूरियों पर उदासीन Na तथा Cl परमाणुओं की अपेक्षा Na^+Cl^- विन्यास की ऊर्जा 1.3 eV अधिक होती है]। इतना ऊर्जा का आरंभिक निवेश होने पर भी सोडियम क्लोराइड अणु आयनी बंधन को प्राथमिकता देते हैं। क्यों ?

(b) एक अनुरूप प्रश्न है कि H_2 अणु सहसंयोजी बंधन को क्यों प्राथमिकता देते हैं ? Na^+Cl^- की भांति ये आयनी बंधन H^+H^- को प्राथमिकता क्यों नहीं देते ?

9.24 किसी O_2 अणु में अंतरापरमाणुक पृथकन 1.2Å है, तथा इसकी बंधन ऊर्जा लगभग 4.4 eV है। दो ऑक्सीजन अणुओं के बीच अंतराणुक स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम 2.9Å पर है। दोनों स्थितिज ऊर्जा वक्र लगभग एक जैसी आकृति के हैं। ऑक्सीजन में अंतराणुक स्थितिज ऊर्जा वक्र में आप निम्निष्ठ की कहां अपेक्षा करते हैं - 4.4 eV से अधिक पर अथवा कम पर ? अपनी अपेक्षा का पाठ में दिए गए उत्तर से मिलान कीजिए।

9.25 किन मुख्य दृष्टिकोणों से अंतराणुक बल अंतरापरमाणुक बलों से भिन्न होते हैं? किन दृष्टिकोणों से ये समान होते हैं?

9.26 यदि (i) पारे तथा (ii) जल के वाष्पन की गुप्त ऊष्माएं क्रमशः $2.72 \times 10^3 \, J \, kg^{-1}$ तथा $2.26 \times 10^6 \, J \, kg^{-1}$ हैं, तो इनकी प्रति अणु औसत अंतराणुक स्थितिज ऊर्जा आकलित कीजिए। क्या यह सोचना सही है कि यह औसत बंधन ऊर्जा उतनी ही होती है जितनी कि किसी पदार्थ के दो अणुओं को खींचकर एक दूसरे से पृथक् करने के लिए आवश्यक अर्थात् दो अणुओं के बीच निम्नतम स्थितिज ऊर्जा के ऋणात्मक मान के बराबर होती है?

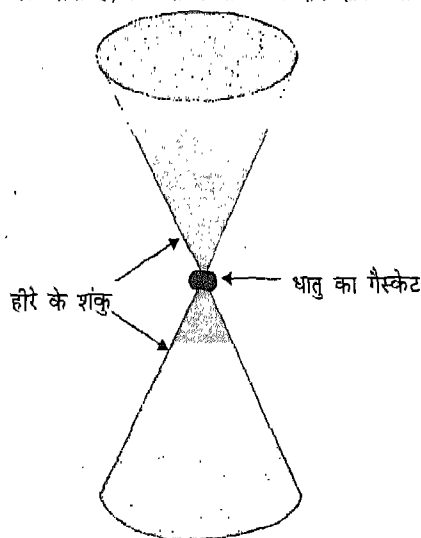
9.27 निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :

(a) यदि अंतराणुक स्थितिज ऊर्जा का निम्निष्ठ किसी पृथकन $r = r_0$ पर है, तब जहां प्रत्येक युगल का पृथकन r_0 के बराबर है, वहां क्या कारण है जो उस दिए गए पदार्थ के सभी अणुओं के संघनित अवस्था में निपात को रोकता है?

(b) गैसीय अवस्था से द्रव में संक्रमण में अंतराणुक आकर्षण निर्णायक होता है, जबकि द्रव अवस्था से ठोस में संक्रमण में कम दूरियों पर प्रतिकर्षी स्थितिज ऊर्जा निर्णायक होती है। प्रावस्था संक्रमण के स्वरूप के विषय में इस महत्वपूर्ण गुणात्मक अन्तर्दृष्टि को स्पष्ट कीजिए। (अनुभाग 9.3 का अध्ययन कीजिए)।

(c) प्रकृति में द्रव्य की किसी असामान्य प्रावस्था, जो इसके अणुओं की अत्यधिक अगोलीय आकृति के कारण होती है, का एक उदाहरण दीजिए।

9.28 स्टील के चार समरूप खोखले बेलनाकार स्तंभ 50,000 kg संहति के किसी बड़े ढांचे को संभाले हुए हैं। प्रत्येक स्तंभ की आंतरिक तथा बाह्य त्रिज्याएं क्रमशः 30 cm और 60 cm हैं। यह मानते हुए कि भार वितरण एक समान है प्रत्येक स्तंभ की संपीडन विकृति परिकलित कीजिए। स्टील का यंग प्रत्यास्थता गुणांक 2.0×10^{11} Pa है। (1 Pa = 1 Nm^{-2})

9.29 एकल हीरे के क्रिस्टलों की चित्र में दी गई आकृति की निहाइयों का उपयोग अति उच्च दाबों के प्रभाव में पदार्थों के व्यवहार की जांच के लिए किया जाता है। निहाई के संकीर्ण सिरों पर सपाट फलकों के व्यास 0.5 mm हैं। यदि निहाई के चौड़े सिरे पर 50,000 N का संपीडक बल लगा है, तो उसकी नोक पर दाब ज्ञात कीजिए।

चित्र 9.25

9.30 3.0 mm एकसमान व्यास को कोई संयोजित तार 2.2 m लंबे तांबे के तार तथा 1.6 m लंबे स्टील के तार से मिलकर बना है। यदि किसी भार के प्रभाव में तार की लंबाई में 0.7 mm वृद्धि हो जाती है, तो तार से लटका भार परिकलित कीजिए। तांबे तथा स्टील के यंग प्रत्यास्थता गुणांक क्रमशः 1.1×10^{11} Pa तथा 2.0×10^{11} Pa हैं। (1 Pa = 1 N m^{-2})

9.31 (a) अभ्यास 9.1 तथा 9.2 में आपने, 'स्थिर अनुपात का नियम' तथा 'गुणित अनुपात का नियम' की खोज की। आपके दृष्टिकोण से इन दोनों नियमों में से कौन-सा नियम परमाण्वीय परिकल्पना को पुष्ट करता है? सुस्पष्ट कीजिए।

(b) क्या आप डाल्टन की परमाण्वीय परिकल्पना को पुरातन भारतीयों एवं ग्रीस के विद्वानों के परमाण्वीय दृष्टिकोणों में संशोधन मानते हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

अध्याय 10

तरलों की यांत्रिकी

10.1 भूमिका

तरल शब्द का अर्थ है ''प्रवाह'' । द्रव्य की तीन अवस्थाओं में से दो–द्रव एवं गैस तरल हैं । तरल हमारे जीवन का अंग हैं । हमारी पृथ्वी के पृष्ठ का तीन-चौथाई भाग जल है । पृथ्वी के पृष्ठ को वायु का जीवन पोषक आवरण घेरे हुए है । हमारे ही नहीं वरन् सभी स्तनपायी जंतुओं के शरीर का अधिकांश भाग जल है । पौधों तथा जंतुओं में पोषक तत्वों का संवहन, तरलों द्वारा ही होता है । साइकिलों की गति उनके टायरों में भरी वायु तथा स्नेहक पदार्थों के कारण ही संभव हो पाती है । कारों के साथ-साथ राकेटों को भी द्रव ईंधन धकेलते हैं । हमारे वातानुकूलन और प्रशीतन संयंत्रों में भी तरल उपयोग किए जाते हैं ।

ठोसों की द्रवों एवं गैसों से भिन्न पहचान किस गुण के कारण होती है ? हम द्रवों तथा गैसों का वर्गीकरण एक ही वर्ग-तरल में क्यों करते हैं ? किसी भी तरल की अपनी कोई निश्चित आकृति नहीं होती । तरल पदार्थ जिस पात्र में भरे जाते हैं अंतत: उसी की आकृति ग्रहण कर लेते हैं । इसके अतिरिक्त कोई भी तरल अपने पृष्ठ पर आरोपित स्पर्शरेखीय बल को नहीं संभाल पाता । दूसरे शब्दों में, कोई तरल अनिश्चित समय तक उस पर आरोपित विरूपण प्रतिबल का विरोध नहीं कर सकता । विरूपण प्रतिबल लगाने पर इसमें प्रवाह उत्पन्न हो जाता है । यह प्रवाह जल की भांति तीव्र अथवा शहद या कोलतार की भांति मंद हो सकता है । इसीलिए किसी तरल का दृढ़ता-प्रत्यास्थता गुणांक नगण्य होता है । इसके विपरीत, तरलों में आयतन प्रत्यास्थता गुणांक भी होता है। ये अपने पृष्ठ के लंबवत् आरोपित बल को सहन कर सकते हैं । स्थूल रूप में, किसी तरल में सदैव ही परमाणुओं की व्यवस्था अस्त-व्यस्त रहती है । अधिकांश ठोसों (सभी में नहीं) में अणुओं की नियमित क्रिस्टलीय व्यवस्था होती है ।

यद्यपि हमने द्रवों तथा गैसों को एक ही वर्ग-तरल में सम्मिलित कर लिया है, तथापि इनमें भी भेद किया जा सकता है । द्रवों को संपीडित नहीं किया जा सकता तथा इनका अपना स्वतंत्र पृष्ठ होता है । इसके विपरीत गैसों को संपीडित किया जा सकता है, तथा वे अपने लिए उपलब्ध समस्त स्थान (आयतन) को घेर लेती हैं ।

10.2 दाब

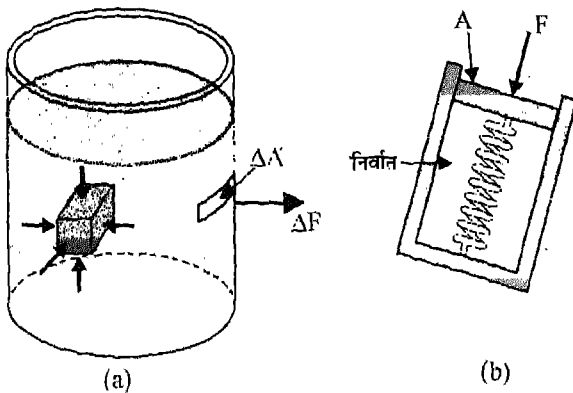
कोई नुकीली सुई जब हमारी त्वचा में दाब लगाकर चुभाई जाती है, तो वह त्वचा को बेध देती है । परंतु किसी अधिक संपर्क क्षेत्र की वस्तु (जैसे चम्मच का पिछला भाग) द्वारा उतने ही बल से दबाए जाने पर हमारी त्वचा को किसी प्रकार की कोई क्षति नहीं पहुंचती । यदि किसी व्यक्ति की छाती पर कोई हाथी अपना पैर रख दे तो उसकी पसलियां टूट जाएंगी । सरकस में, जिस व्यक्ति की छाती पर हाथी पैर रखकर गुजरता है, उसकी छाती पर पहले एक बड़ा, हलका

परंतु मजबूत लकड़ी का तख्ता रखा जाता है, जिससे उस व्यक्ति का दुर्घटना से बचाव हो जाता है । दैनिक जीवन के इस प्रकार के अनुभवों से हमें पूर्ण विश्वास हो जाता है कि बल के साथ-साथ जिस क्षेत्र पर वह बल आरोपित किया जाता है उसका क्षेत्रफल भी महत्त्वपूर्ण होता है । क्षेत्रफल यदि कम हो तो उसका संघात अधिक होता है । भौतिकी में इस संकल्पना को 'दाब' कहते हैं ।

हम पहले बता चुके हैं कि तरल विरूपण प्रतिबलों को नहीं संभाल पाते । यदि कोई पिण्ड विरामावस्था के किसी तरल में डूबा हो, तो उस पिण्ड के पृष्ठों पर केवल पृष्ठ के अभिलंबवत् ही बल आरोपित हो सकते हैं । यह तथ्य चित्र 10.1(a) में दर्शाया गया है । तरल द्वारा किसी बिंदु पर आरोपित इस अभिलंब बल को मापा जा सकता है । ऐसी ही एक दाब मापक युक्ति के आदर्श-रूप को चित्र 10.1(b) में दर्शाया गया है । इस युक्ति में एक निर्वातित चैम्बर होता है, जिससे एक कमानी जुड़ी होती है । इस कमानी का अंशांकन पहले से ही इसके पिस्टन पर लगे बल को मापने के लिए कर लिया जाता है । इस युक्ति को तरल के किसी बिंदु पर रखा जाता है । पिस्टन पर तरल द्वारा आरोपित भीतरी बल को कमानी द्वारा पिस्टन पर आरोपित बाहरी बल से संतुलित करके पिस्टन पर आरोपित बल को माप लेते हैं । यदि तरल द्वारा A क्षेत्रफल के पिस्टन पर आरोपित अभिलंब बल का परिमाण F है, तो औसत दाब P_{av} को बल तथा क्षेत्रफल के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है । अत:

$$P_{av} = \frac{F}{A} \qquad (10.1)$$

सैद्धांतिक रूप में पिस्टन के क्षेत्रफल को मनमाने ढंग से छोटा किया जा सकता है । तब सीमित अर्थों में दाब को इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \qquad (10.2)$$

चित्र 10.1 (a) बीकर के द्रव में डूबे पिण्ड अथवा उसकी दीवारों पर द्रव द्वारा आरोपित बल पिण्ड के पृष्ठ के हर बिंदु के अभिलंबवत् कार्य करता है । (b) दाब मापने के लिए युक्ति का आदर्श रूप ।

दाब एक अदिश राशि है । यहां हम आपको यह याद दिलाना चाहते हैं कि समीकरणों (10.1) तथा (10.2) के अंश में दृष्टिगोचर होने वाली राशि विचारणीय क्षेत्र के अभिलंबवत् बल का अवयव है न कि (सदिश) बल । इसकी विमाएं $[ML^{-1}T^{-2}]$ हैं । दाब का SI मात्रक $N m^{-2}$ है । फ्रांसीसी वैज्ञानिक ब्लेज़ी पास्कल (1623–1662) ने तरल दाब के क्षेत्र में अध्ययन का मार्ग प्रशस्त किया । इसीलिए उनके सम्मान में दाब के SI मात्रक का नाम पास्कल (pascal, प्रतीक Pa) रखा गया है । दाब का एक अन्य सामान्य मात्रक वायुमंडल (atmosphere, प्रतीक atm) अर्थात् समुद्र तल पर वायुमंडल द्वारा आरोपित दाब, है (1 atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa) ।

तरलों का वर्णन करने के लिए घनत्व (ρ) एक ऐसी भौतिक राशि है जिसके विषय में चर्चा करना अनिवार्य है । V आयतन घेरने वाले m संहति के किसी तरल का घनत्व

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (10.3)$$

द्रव असंपीड्य होते हैं । अत: किसी द्रव का घनत्व सभी दाबों पर लगभग अचर रहता है । इसके विपरीत, गैसें दाब में परिवर्तन के साथ घनत्व में अत्यधिक परिवर्तन दर्शाती हैं । घनत्व की विमाएं $[ML^{-3}]$ हैं तथा इसका SI मात्रक $kg\,m^{-3}$ है । यह एक धनात्मक अदिश राशि है ।

जल का 4°C (277 K) पर घनत्व $1.0 \times 10^3\ kg\,m^{-3}$ है । किसी पदार्थ का आपेक्षिक घनत्व (विशिष्ट गुरुत्व) उस पदार्थ के घनत्व तथा जल के 4°C पर घनत्व का अनुपात होता है । यह विमाहीन धनात्मक अदिश भौतिक राशि है । उदाहरण के लिए, ऐलुमिनियम का आपेक्षिक घनत्व 2.7 है । इसका घनत्व $2.7 \times 10^3\ kg\,m^{-3}$ है । सारणी 10.1 में कुछ सामान्य तरल पदार्थों के घनत्व दर्शाए गए हैं ।

सारणी 10.1 कुछ सामान्य तरलों के घनत्व । सभी मान वायुमंडलीय दाब (1.013×10^5 Pa) तथा 0°C अर्थात् मानक ताप तथा वायुमंडलीय दाब (STP) पर हैं ।

तरल	घनत्व ρ $(kg\,m^{-3})$
जल	1.00×10^3
समुद्र जल	1.03×10^3
पारा	13.6×10^3
ऐथिल एल्कोहॉल	0.806×10^3
संपूर्ण रक्त	1.06×10^3
वायु	1.29
ऑक्सीजन	1.43
हाइड्रोजन	9.0×10^{-2}
अंतरातारकीय आकाश	$\approx 10^{-20}$

▶ *उदाहरण 10.1* दो उर्वस्थियां (फीमर) जिनमें प्रत्येक की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 10 cm^2 है 40 kg संहति के मानव शरीर के ऊपरी भाग को संभालती हैं । उर्वस्थियों द्वारा सहन किए जाने वाले औसत दाब का आकलन कीजिए ।

हल उर्वस्थियों की कुल अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $A = 2 \times 10\,\text{cm}^2 = 20 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$ । उर्वस्थियों पर कार्यरत बल $F = 40\,\text{g} = 400\,\text{N}$ ($g = 10\,\text{m s}^{-2}$ लेने पर) । यह बल ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा में कार्य करता है, अत: यह उर्वस्थियों पर अभिलंबवत् लगता है । इसीलिए औसत दाब

$$P_{av} = \frac{F}{A} = 2 \times 10^5\ \text{N m}^{-2}$$ ◂

10.2.1 पास्कल का नियम

बहुत पहले फ्रांसीसी वैज्ञानिक ब्लेज़ पास्कल ने यह प्रेक्षण किया कि ***यदि हम गुरुत्व बल की उपेक्षा कर दें, तो विराम स्थिति के तरल में सभी बिंदुओं पर दाब समान होता है।*** इस तथ्य को **पास्कल का नियम** कहते हैं । इस नियम को नीचे दिए ढंग से भलीभांति समझा जा सकता है ।

चित्र 10.2(a) में विराम स्थिति के किसी तरल के अभ्यन्तर में कोई अवयव दर्शाया गया है । यह अवयव ABC-DEF एक समकोण प्रिज़्म के रूप में है । सिद्धांत रूप में यह प्रिज़्मीय अवयव आकार में बहुत छोटा है अत: गुरुत्व बल का प्रभाव नगण्य है । परंतु इस सिद्धांत को स्पष्ट करने के लिए हमने इस अवयव को बड़ा करके दर्शाया है। जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है कि तरल के कारण आरोपित बल समकोण पर कार्य करते हैं, अत: चित्र में दर्शाए अनुसार तरल द्वारा इस अवयव पर आरोपित दाबों P_a, P_b तथा P_c के तदनुरूपी बल F_a, F_b तथा F_c क्रमश: फलकों BEFC, ADFC तथा ADEB पर अभिलंबवत् आपतित होते हैं। मान लीजिए इस प्रिज़्मीय अवयव की मोटाई l है, तब

$$AD = BE = CF = l$$

चूंकि अवयव ABC-DEF शेष तरल सहित साम्यावस्था में है, अत: न्यूटन के गति के प्रथम नियम के अनुसार,

$$P_b\, AC\, l \cos\theta_1 = P_c\, AB\, l$$
$$P_b \cos\theta_1 = P_c\, AB/AC$$
$$= P_c \cos\theta_1 \quad (\Delta ABC \text{ में कोण B समकोण है})$$
$$\therefore\ P_b = P_c$$

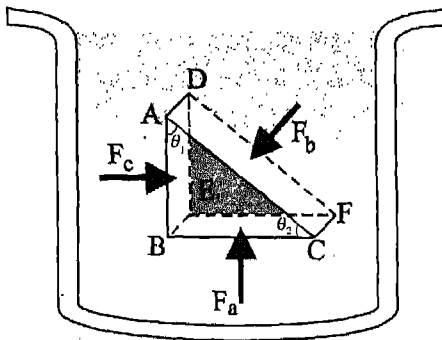
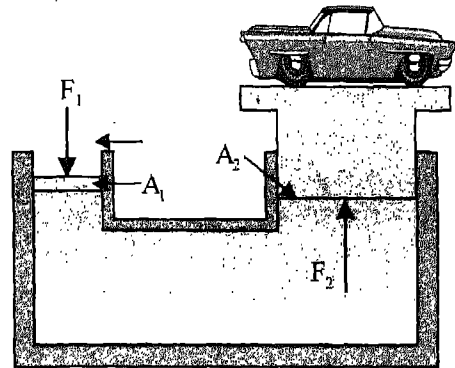
इसी प्रकार हम यह भी दर्शा सकते हैं कि

$$P_b\, AC\, l \cos\theta_2 = P_a\, BC\, l$$
$$P_b \cos\theta_2 = P_a\, BC/AC$$
$$= P_a \cos\theta_2 \quad (\Delta ABC \text{ में कोण B समकोण है})$$

अत: दो नियमों का प्रयोग करके, जिनमें पहला है–(a) **विराम स्थिति के किसी तरल द्वारा आरोपित बल किसी भी पृष्ठ के अभिलंबवत् कार्य करता है** तथा दूसरा है (b) **न्यूटन का गति का प्रथम नियम**, हमने पास्कल के नियम को निदर्शित करने में सफलता प्राप्त कर ली है।

पास्कल के नियम को कभी-कभी इस प्रकार भी अभिव्यक्त किया जाता है :

किसी परिबद्ध तरल पर आरोपित कोई दाब-परिवर्तन उस तरल के सभी बिंदुओं तथा जिस पात्र में तरल भरा है उसकी दीवारों पर बिना घटे उतना ही संचरित हो जाता है । अथवा, कोई द्रव सभी दिशाओं में समान दाब आरोपित करता है ।

इस नियम का सत्यापन चित्र 10.1(b) में दर्शाए गए किसी दाब मापक युक्ति को तरल के विभिन्न बिंदुओं पर और परिवर्ती अभिविन्यास परंतु समान ऊंचाई पर रखकर किया जा सकता है । दाब संचरण के लिए तरल आदर्श होते हैं । नीचे दिया गया उदाहरण इसे स्पष्ट करता है ।

(a)

(b)

चित्र 10.2 (a) पास्कल के नियम का परीक्षण । ABC-DEF विराम स्थिति के किसी तरल के अभ्यन्तर का कोई अवयव है । यह अवयव एक समकोण प्रिज़्म के रूप में है । यह अवयव इतना छोटा है कि गुरुत्व के प्रभाव की उपेक्षा की जा सकती है, परंतु स्पष्ट करने के लिए इसे प्रवर्धित दर्शाया गया है । (b) द्रव चालित दाबक, भारी बोझ उठाने की एक युक्ति के कार्य करने के सिद्धांत की व्याख्या का योजनाबद्ध आरेख । द्रव चालित दाबक की कार्य विधि हम पास्कल के नियम के आधार पर समझ सकते हैं ।

> उदाहरण 10.2 किसी कार लिफ्ट में संपीडित वायु 5 cm त्रिज्या के [illegible] पिस्टन पर F_1 बल आरोपित करता है। इस [illegible] 15 cm त्रिज्या के दूसरे पिस्टन [illegible] है। चित्र 10.2 में इसे दर्शाया गया है। यदि [illegible] 1350 kg है तो F_1 का मान ज्ञात कीजिए। इस कार्य को [illegible] आवश्यक दाब भी परिकलित कीजिए।

हल चूंकि दाब बिना घटे समस्त तरल में संचरित हो जाता है,

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2}F_2 = \frac{\pi(5\times5\,\text{cm}^2)}{\pi(15\times15\,\text{cm}^2)}(1350\,\text{kg}\times9.81\,\text{m s}^{-2})$$
$$= 1.5\times10^3\,\text{N}$$

यह बल उत्पन्न करने के लिए आवश्यक दाब,

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.5\times10^3\,\text{N}}{\pi(5\times10^{-2}\,\text{m})^2} = 1.9\times10^5\,\text{Pa}$$

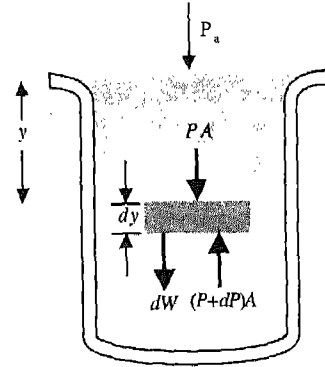
यह दाब वायुमंडलीय दाब का लगभग दो गुना है। पास्कल के नियम का ही उपयोग कारों में लगे द्रवचालित ब्रेक में किया जाता है जिसमें चालक पैर से थोड़ा-सा बल लगाकर तीव्र गति से चलती कार को रोक लेता है। ◀

10.2.2 गहराई के साथ दाब में परिवर्तन

किसी पात्र में विराम की स्थिति में भरे द्रव के बारे में विचार कीजिए (चित्र 10.3)। समान गहराई पर द्रव के सभी बिंदुओं पर दाब समान होना चाहिए, अन्यथा द्रव साम्यावस्था में नहीं रहेगा। मान लीजिए, इस पात्र में हम ऐसे किसी द्रव के भाग को चुनते हैं जो अनुप्रस्थ काट A तथा ऊंचाई dy के किसी काल्पनिक सिलिंडर में भरा है। इस सिलिंडर के ऊपरी फलक पर ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा में द्रव द्वारा आरोपित बल PA तथा निचले फलक पर ऊर्ध्वाधर-ऊपर की दिशा में द्रव द्वारा आरोपित बल $(P+dP)A$ है। सिलिंडर का भार $dW = \rho g A\,dy$। चूंकि सिलिंडर साम्यावस्था में है, इस पर आरोपित बलों का परिणामी बल शून्य होना चाहिए। अर्थात्

$$(P+dP)A - PA = \rho g A\,dy$$
$$dP/dy = \rho g \qquad (10.4)$$

अतः गहराई के साथ दाब बढ़ता है। उपरोक्त व्यंजक सभी तरलों के लिए सत्य है। अब हम ऐसी स्थितियों पर विचार करते हैं जिनमें घनत्व ρ एकसमान हो और उस पर दाब का कोई भी प्रभाव न हो। इस प्रकार हमारा शेष विश्लेषण द्रवों पर लागू होगा गैसों* के लिए नहीं।

चित्र 10.3 में दर्शाए गए पात्र का ऊपरी फलक खुला है, इसलिए द्रव के ऊपरी पृष्ठ पर वायुमंडलीय दाब P_a लगता है। हम उपरोक्त समीकरण का समाकलन करके h गहराई पर दाब ज्ञात कर सकते हैं।

चित्र 10.3 गहराई के साथ द्रव-दाब में परिवर्तन। विरामावस्था के आयतन अवयव पर कार्यरत बलों को दर्शाया गया है। द्रव के खुले पृष्ठ पर वायुमंडलीय दाब P_a लगता है।

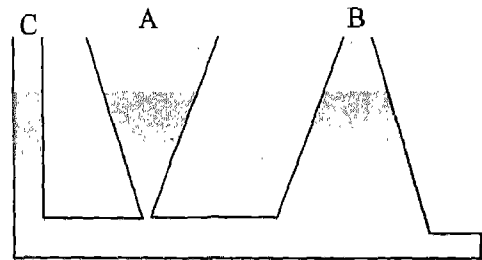
अतः

$$\int_{P_a}^{P} dp = \int_0^h \rho\, g\, dy$$
$$P = P_a + \rho g h \qquad (10.4a)$$

इस संबंध से हमें यह ज्ञात होता है कि

(i) किसी द्रव के भीतर समान गहराई के सभी बिंदुओं पर दाब समान होता है

(ii) किसी द्रव के वायुमंडल में खुले पृष्ठ के नीचे h गहराई पर निरपेक्ष दाब वायुमंडलीय दाब की अपेक्षा परिमाण में ρgh अधिक होता है।

(iii) जिस बर्तन में द्रव भरा है उसकी आकृति का दाब पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इस द्रवस्थैतिक विरोधाभास को भली भांति समझने में चित्र 10.4 का परीक्षण हमारी सहायता करेगा। इसमें A, B तथा C विभिन्न आकृतियों के पात्र हैं जिनके आधारों के क्षेत्रफल समान हैं और इनमें भरे जल के परिमाण भिन्न-भिन्न हैं। परंतु जब तक इन पात्रों में भरे जल का तल समान रहता है, इनकी तली पर दाब भी समान रहता है। यदि पात्र A व C की तलियों को किसी पाइप से जोड़ दें तो बड़े पात्र A से छोटे पात्र C में कोई जल प्रवाहित नहीं होता [अभ्यास 10.24 देखिए]।

चित्र 10.4 द्रवस्थैतिक विरोधाभास की व्याख्या। तीन पात्रों A, B तथा C में समान ऊंचाई तक जल भरा है परंतु सभी में जल का परिमाण भिन्न-भिन्न है।

* इस विश्लेषण का विस्तार गैसों के लिए हम अनुभाग 10.32 में करेंगे।

> ▶ **उदाहरण 10.3** किसी झील के पृष्ठ से 10 m गहराई पर किसी तैराक पर दाब ज्ञात कीजिए।

हल यहां $h = 10$ m; $g = 9.8$ m s^{-2} तथा $\rho = 1000$ kg m^{-3} समीकरण (10.4a) से

$$
\begin{aligned}
P &= P_a + \rho g h \\
&= 1.01 \times 10^5 \text{Pa} + 1000 \times 9.8 \times 10 \text{Pa} \\
&= 1.99 \times 10^5 \text{Pa} \\
&\approx 2 \text{atm}
\end{aligned}
$$

यह दाब खुले पृष्ठ के दाब की तुलना में 100% अधिक है। 1 km गहराई पर दाब में वृद्धि 100 atm होती है! पनडुब्बियों की संरचना इतने अधिक दाबों को सह सकने को ध्यान में रखकर की जाती है। ◀

10.2.3 वायुमंडलीय दाब तथा गेज दाब

यह पहले ही बताया जा चुका है कि समुद्र तल पर वायुमंडलीय दाब 1.013×10^5 Pa है। ऐतिहासिक तथ्यों के अनुसार वायुमंडलीय दाब की यथार्थ माप के लिए सर्वप्रथम इटली के वैज्ञानिक ई. टॉरिसिली (1608–1647) ने एक युक्ति की रचना की। एक सिरे से बंद लंबी कांच की ट्यूब लेकर उसमें पारा भरा गया और फिर उसे पारे से आंशिक भरे पात्र में चित्र 10.5(a) की भांति ऊर्ध्वाधर उल्टा खड़ा किया गया। नली में पारे से ऊपर का रिक्त स्थान लगभग निर्वातित है, अतः इस स्थान के दाब को शून्य मान सकते हैं। समीकरण (10.4a) के लिए दिए गए तर्क-विचारों के समान तर्क-विचारों के आधार पर हम निम्नलिखित संबंध प्राप्त कर सकते हैं,

$$P_a = \rho g h \qquad (10.5)$$

सारणी 10.1 में दिए गए पारे के घनत्व ($\rho = 13.6 \times 10^3$ kg m^{-3}) तथा $g = 9.8$ m s^{-2} का मान समीकरण (10.5) में भरने पर हमें $h = 0.76$ m $= 760$ mm प्राप्त होता है। सामान्यतः दाब का वर्णन cm अथवा mm (पारा अथवा Hg) के पदों में किया जाता है। 1 mm (Hg) दाब का तुल्यांकी दाब 1 torr कहलाता है।

$$1 \text{ torr} = 133 \text{ Pa}$$

औषध विज्ञान तथा शरीर क्रिया विज्ञान (फिजियोलॉजी) में दाब के मात्रक के रूप में mm (Hg) तथा टॉर (torr) का उपयोग किया जाता है। मौसम विज्ञान में दाब का सामान्य मात्रक बार (bar) लिया जाता है।

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

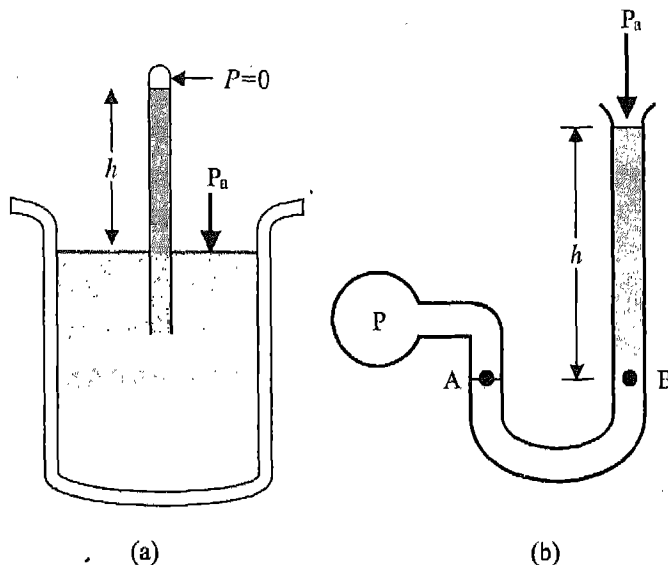
$$1 \text{ millibar} = 10^2 \text{ Pa}$$

चित्र 10.5(b) में किसी निकाय के अज्ञात दाब को मापने का एक सरल उपाय दर्शाया गया है। इस युक्ति को खुली नली दाबान्तरमापी (मैनोमीटर) कहते हैं। इस युक्ति में U-आकृति की एक ट्यूब होती है जिसमें ρ घनत्व का द्रव भरा होता है। नली का एक सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ दिया जाता है तथा दूसरा सिरा जिस निकाय का दाब ज्ञात करना है उससे जोड़ दिया जाता है। अब,

बिंदु A पर दाब (P) = बिंदु B पर दाब

समीकरण (10.4a) से, $P = P_a + \rho g h$.

दाब P को यथार्थ दाब कहते हैं। जिस दाब को हम सामान्यतः मापते हैं वह वास्तव में प्रमापी दाब अथवा गेज दाब होता है, जो $P - P_a$ के बराबर होता है।

> ▶ **उदाहरण 10.4** समुद्र तल पर वायुमंडल का घनत्व 1.29 kg/m^3 है। यह मानते हुए कि ऊंचाई के साथ घनत्व में कोई परिवर्तन नहीं होता, यह ज्ञात कीजिए कि वायुमंडल का विस्तार कितनी ऊंचाई तक है।

चित्र 10.5 दाब मापने की दो युक्तियां : (a) पारद-वायुदाब मापी (बैरोमीटर) (b) खुली-नली मैनोमीटर (दाबान्तर मापी)

हल समीकरण (10.5) के अनुसार वायुमंडलीय दाब

$$\rho g h = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$$
$$1.29 \times 9.81 \times h = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$$
$$h = 7981 \text{ m}$$
$$\approx 8 \text{ km}$$

वास्तव में, ऊंचाई के साथ वायु के घनत्व में कमी होती जाती है। ऐसा ही गुरुत्वीय त्वरण g के साथ भी होता है। वायुमंडलीय आवरण का विस्तार घटते दाब के साथ लगभग 100 km ऊंचाई तक है। हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि समुद्र-तल पर वायुमंडलीय दाब सदैव ही 760 mm (Hg) नहीं होता। इसमें 10 mm (Hg) अथवा अधिक की कमी तूफान के आगमन की सूचक होती है।

उदाहरण 10.5 : किसी कार की नियम-पुस्तिका अपने मालिक को यह निर्दिष्ट करती है कि उसके टायरों में हवा 200 kPa दाब तक भरी जाए। (a) अनुमोदित प्रमापी दाब कितना है ? (b) अनुमोदित यथार्थ दाब कितना है ? (c) यदि कार के टायरों में अपेक्षित सीमा तक वायु भरने के पश्चात् उसे किसी पहाड़ की चोटी पर चलाया जाए, जहां वायुमंडलीय दाब समुद्र तल की तुलना में 10% कम है, तब टायर के प्रमापी दाब का पाठ्यांक क्या होगा ?

हल (a) कार की नियम-पुस्तिका में दाब शब्द का उल्लेख प्रमापी दाब P_g के लिए ही किया जाता है। अत:

$$P_g = 200 \text{ kPa}$$

(b) यदि यथार्थ दाब P है, तो

$$P - P_a = P_g$$
$$P = 101 \text{ kPa} + 200 \text{ kPa}$$
$$= 301 \text{ kPa}$$

(c) पहाड़ की चोटी पर वायुमंडलीय दाब P'_a समुद्र-तल की तुलना में 10% कम है, अत:

$$P'_a = 90 \text{ kPa}$$

यह मानते हुए कि कार चलाते समय टायरों का यथार्थ दाब परिवर्तित नहीं होता, तब

$$P_g = P - P'_a$$
$$= 301 \text{ kPa} - 90 \text{ kPa} = 211 \text{ kPa}$$

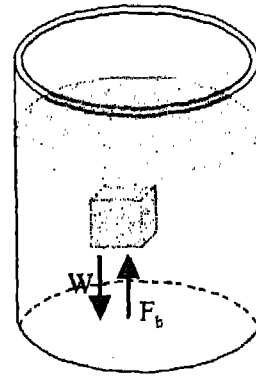
चूंकि टायर-गेज़ (प्रमापी) दाब मापता है, अत: इसका पाठ्यांक 211 kPa होगा।

10.3 उत्प्लावकता तथा आर्किमिडीज का सिद्धांत

किसी तरण ताल में एक बच्चे को उठाना अपेक्षाकृत आसान होता है जबकि भूमि पर यही कार्य कठिन लगता है। प्राचीन काल से ही नावों का उपयोग भारी बोझ के परिवहन में होता रहा है। पानी अपने ऊपर रखे गए पिण्डों को आंशिक सहारा प्रदान करता प्रतीत होता है। किसी तरल द्वारा उसमें रखे गए पिण्ड पर आरोपित ऊर्ध्वमुखी बल को **उत्प्लावन (उछाल) बल** कहते हैं। बहुत समय पहले आर्किमिडीज (287–212 ई. पू.) ने इस बल के परिमाण के विषय में एक प्रकथन दिया था जिसे आर्किमिडीज का सिद्धांत कहते हैं।

किसी तरल में पूर्णत: अथवा आंशिक डूबे हुए पिण्ड पर लगा उत्प्लावन बल उस पिण्ड द्वारा विस्थापित तरल के भार के बराबर होता है।

यह ऊर्ध्वाधर ऊर्ध्वमुखी उत्प्लावन बल, विस्थापित तरल का जो गुरुत्व केंद्र था, उस पर कार्य करता है।

हम किसी सममित पिण्ड के लिए इस उत्प्लावन बल के लिए एक व्यंजक व्युत्पन्न करके आर्किमिडीज के सिद्धांत को आसानी से सिद्ध कर सकते हैं। चित्र 10.6 में दर्शाए अनुसार किसी द्रव में पूर्णत: डूबे h भुजा के घन पर विचार कीजिए। घन के ऊपरी फलक पर दाब की तुलना में इसके निचले फलक पर दाब अधिक है तथा इस दाबान्तर का परिमाण $\rho_f g h$ है, जहां ρ_f तरल का घनत्व है।

चित्र 10.6 घन पर कार्यरत दो बाह्य बल, इसका अपना भार W तथा उत्प्लावन बल F_b हैं।

इस प्रकार घन पर उत्प्लावन बल

$$F_b = \rho_f g h A = \rho_f g V \quad (10.6)$$

सारणी 10.2 कुछ दाब (Pa में)

समुद्र तल पर वायुमंडल का दाब	1.01×10^5
प्रकुंचन रक्तदाब (प्रमापी)	1.60×10^4 [120 टॉर]
प्रयोगशाला जनित अधिकतम दाब	10^{12}
असाधारण प्रयोगशाला जनित निर्वात	10^{-12}

यहां A घन की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल तथा V उसका आयतन है। यद्यपि हमने उपरोक्त परिणाम किसी घन के लिए सिद्ध किया है तथापि परिणाम, समीकरण (10.6), चाहे पिण्ड की कोई भी आकृति हो, सभी पर समान रूप से लागू होता है। किसी पिण्ड को तरल में डुबोने पर निम्नलिखित दो प्रकरण हो सकते हैं।

(i) **पूर्णतः डूबा पिण्ड** : इस प्रकरण में पिण्ड पर कार्यरत नेट बल (चित्र 10.6 देखिए)

$$W - F_b = (\rho_s - \rho_f) V_s g \qquad (10.7)$$

यहां ρ_s ठोस पिण्ड का घनत्व तथा V_s उसका कुल आयतन है। यदि ठोस पिण्ड का घनत्व ρ_s तरल के घनत्व ρ_f से अधिक है, तो पिण्ड डूब जाएगा।

(ii) **तैरते पिण्ड** : इस प्रकरण में पिण्ड का आंशिक आयतन V_p तरल में डूबा रहता है तथा आंशिक डूबे हुए ही यह पिण्ड स्थैतिक संतुलन में होता है। इस प्रकार उत्प्लावन बल, $F_b = \rho_f V_p g$ तथा यह बल ठोस के भार को पूर्णतः संभालता है,

$$W = F_b$$

$$\rho_s V_s g = \rho_f V_p g$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} = \frac{V_p}{V_s} \qquad (10.8)$$

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं कि ऊर्ध्वाधर ऊर्ध्वमुखी उत्प्लावन बल विस्थापित तरल का जो गुरुत्व केंद्र था उस पर कार्य करता है। इस बिंदु को **उत्प्लावकता केंद्र** कहते हैं। यदि तैरने वाली वस्तु का आयतन असमान है, तो गुरुत्व केंद्र तथा उत्प्लावकता केंद्र संपाती नहीं होते। इसके फलस्वरूप तैरते पिण्ड पर बल आघूर्ण कार्य करते हैं। इसी असमानता के कारण ही जहाज लहराते हैं, डूबते-उतराते हैं, फलस्वरूप जहाजी मतली रोग होता है। ऐसे तैरते पिण्ड जिनका शीर्ष भारी होता है अस्थायी होते हैं। पिघलते समय हिमशैलों का कलाबाजी करना भी इसी के कारण होता है।

स्तनपायी जंतुओं के शरीर का घनत्व जल के घनत्व से कुछ अधिक होता है। इसीलिए हम थोड़े प्रयास से तैरने योग्य बन जाते हैं तथा डूबने से बच जाते हैं। समुद्र में तैरना अधिक आसान होने का कारण यह है कि समुद्र जल (नमकीन होने के कारण) का घनत्व शुद्ध जल के घनत्व से अधिक होता है। मध्य पूर्व में स्थल रुद्ध मृत सागर के जल का घनत्व इतना अधिक है कि कोई भी मनुष्य बिना किसी प्रयास के इसमें आसानी से तैर सकता है। मछली का औसत घनत्व भी जल के घनत्व से कुछ अधिक होता है। मछली के शरीर में एक विशेष संरचना होती है जिसे वाताशय कहते हैं। वाताशय के आकार को समायोजित करके मछली आसानी से तैरने योग्य बन जाती है। उत्प्लावन बल बहुत-सी जैविक, परिघटनाओं की व्याख्या कर सकता है। उदाहरण 10.1 में हमने एक हल्के मानव शरीर के पैरो की अस्थियों पर दाब परिकलित किया है। इस दाब को **संपीडक प्रतिबल** भी कहते हैं। गुरुत्व बल के कारण सहारा देने वाली पैरों की अस्थियों पर संपीडक प्रतिबल, व्हेल के आकार के किसी जंतु को थल पर गति करने के लिए अत्यधिक बड़ा होगा। यही कारण है कि पृथ्वी पर पाए जाने वाले आकार में सबसे बड़े जंतु स्थलचर न होकर जलचर होते हैं जिनके शरीर के समस्त निचले भाग पर उत्प्लावन बल वितरित रहता है।

▶ ***उदाहरण 10.6*** : प्लावी हिमशैल का छोर : बर्फ का घनत्व $917\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ है। बर्फ का कितना भाग जल के नीचे होता है ? समुद्र जल का घनत्व $1024\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ है। किसी हिमशैल का कितना भाग हमें दिखाई देता है, यह मानते हुए कि हिमशैल का घनत्व सामान्य बर्फ के घनत्व ($917\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$) के समान है ?

हल समीकरण (10.8) से

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{\rho_s}{\rho'_w} = \frac{917}{1000} = 0.917$$

बर्फ का 91.7% भाग जल के पृष्ठ के नीचे होता है। समुद्र में तैरते हिम शैल के प्रकरण में, हमें दिखाई देने वाले हिमशैल के भाग को ज्ञात करने के लिए हम फिर समीकरण (10.8) का उपयोग करते हैं

$$f = 1 - \frac{\rho_s}{\rho'_w} = 1 - \frac{917}{1024} = 0.105$$

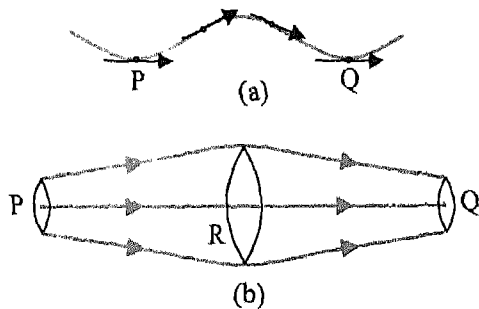
हिमशैल का लगभग 10.5% भाग हमें दिखाई देता है। बर्फ का अधिकांश भाग समुद्र के पृष्ठ के नीचे रहता है। इसीलिए मुहावरा है "प्लावी हिमशैल का छोर"। ◀

10.4 धारारेखी प्रवाह

अब तक हमने स्थिर तरलों के बारे में अध्ययन किया (**तरल स्थैतिकी**) है। तरल प्रवाह के अध्ययन को **तरल गतिकी**

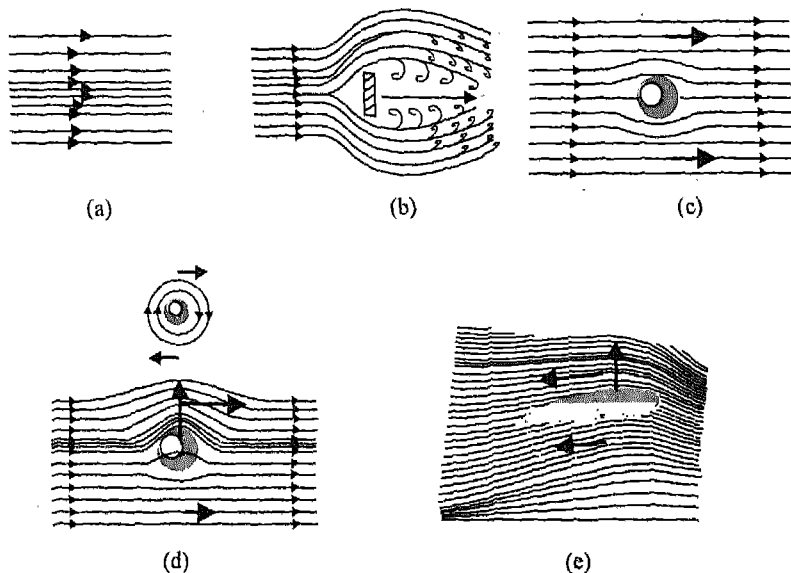
आर्किमिडीज (287-212 ई. पू.)

ग्रीस के दार्शनिक, गणितज्ञ, वैज्ञानिक तथा अभियंता थे। उन्होंने गुलेल की खोज की तथा घिरनियों एवं उत्तोलकों के संयोजन से भारी बोझों के संचालन के लिए एक तंत्र का आविष्कार किया। उनके अपने देश साइराक्यूज के राजा हीरो II ने आर्किमिडीज को सोने का ठोस मुकुट देकर यह कहा कि मुकुट को बिना तोड़े ही वह यह निर्धारित करें कि मुकुट शुद्ध सोने का बना है, अथवा उसमें कोई सस्ती धातु; जैसे-चांदी मिलाई गई है। पानी से लबालब भरे टब में लेटते समय उन्होंने अपने भार में आंशिक कमी अनुभव की, जिससे उन्हें अपनी समस्या का हल मिल गया। जिसे पाकर आर्किमिडीज इतने उत्तेजित हो गए कि, दंतकथा के अनुसार, टब से बाहर निकलकर, साइराक्यूज की गलियों में "यूरेका" - यूरेका (अर्थात् "मैंने पा लिया" - "मैंने पा लिया") चिल्लाते हुए दौड़ पड़े। उस समय वह यह भी भूल गए कि उनके शरीर पर कोई वस्त्र नहीं है।

कहते हैं । तरलों की गति का अध्ययन करने में हम तरल के प्रत्येक कण की गति का समय के फलन के रूप में अध्ययन नहीं करते । इसके विपरीत हम प्रत्येक बिंदु पर किसी तरल के गुणों का वर्णन समय के फलन के रूप में करेंगे । किसी तरल का प्रवाह अपरिवर्ती प्रवाह कहलाता है यदि तरल का प्रत्येक कण किसी मसृण पथ का अनुसरण करता है तथा कणों के पथ एक-दूसरे को नहीं काटते । इस प्रकार, अपरिवर्ती प्रवाह में किसी तरल का किसी बिंदु पर वेग समय के साथ अचर रहता है । किसी निश्चित क्रांतिक चाल से यदि चाल अधिक है तो तरल प्रवाह परिवर्ती प्रवाह बन जाता है । इस अनियमित प्रवाह को प्रक्षोभ कहते हैं । तीव्र गति से प्रवाहित किसी धारा के मार्ग में जब कोई चट्टान आ जाती है तो धारा में प्रक्षोभ दिखाई देता है । प्रक्षोभ के कारण छोटे, झागदार भंवर जैसे क्षेत्र, जिन्हें "श्वेत जल" (व्हाइट वाटर) क्षिपित्काएं कहते हैं, बन जाते हैं।

चित्र 10.7 प्रवाह रेखाओं (धारा रेखाओं) का अर्थ (a) किसी तरल का कण का प्ररूपी प्रक्षेप पथ, (b) धारा रेखी प्रवाह का क्षेत्र ।

कोई तरल अपरिवर्ती प्रवाह में जिस पथ पर गमन करता है उसे धारा-रेखा (प्रवाह-रेखा) कहते हैं । चित्र 10.7(a) में दर्शाए अनुसार किसी बिंदु पर तरल कण का वेग सदैव ही धारा-रेखा के उसी बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है । चित्र 10.7 में वक्र PQ तरल प्रवाह के एक स्थायी मानचित्र की भांति है जो यह दर्शाता है कि तरल किस प्रकार प्रवाहित होता है । धारा-रेखा मानचित्र में धारा-रेखाएं एक दूसरे के कितने निकट होनी चाहिए ? इस तथ्य को समझने के लिए तरल प्रवाह की दिशा के लम्बवत् समतलों पर विचार कीजिए । उदाहरण के लिए 10.7(b) में तीन बिंदुओं P, R तथा Q पर इसी प्रकार के लंबवत् समतल दर्शाए गए हैं । इन समतल खण्डों का चुनाव इस प्रकार किया जाता है कि इनकी सीमाएं धारा-रेखाओं के समान समूह द्वारा निर्धारित हो जाएं । दूसरे शब्दों में P, R तथा Q पर दर्शाए गए लंबवत् समतल पृष्ठों से प्रवाहित होने वाले तरल कणों की संख्या समान है । इस प्रकार यदि P, R तथा Q पर तरल कणों के वेगों के परिमाण क्रमशः v_P, v_R तथा v_Q हैं तब इन तलों के क्षेत्रफल क्रमशः A_P, A_R तथा A_Q इस प्रकार होने चाहिए ताकि

$$v_P A_P = v_R A_R = v_Q A_Q \qquad (10.9)$$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि हम धारा रेखा-मानचित्र में धारा रेखाओं का अंतरालन P, R तथा Q पर वेगों के परिमाणों के व्युत्क्रमानुपात में करें । तब हम तरल प्रवाह के लंबवत् धारा-रेखाओं की संख्या को देखकर तरल के वेग का अनुमान लगा सकते हैं । यदि मानचित्र के किसी क्षेत्र में धारा-रेखाएं बहुत ही पास-पास हैं तो वहां तरल-प्रवाह का वेग अत्यधिक है तथा इसका विलोमतः भी इसी प्रकार होता है ।

चित्र 10.8 तरल प्रवाह के लिए कुछ धारा-रेखाएं । (a) किसी नलिका में स्तरीय प्रवाह जिसमें सीमाएं विराम में हैं तथा केंद्र पर वेग अधिकतम है । (b) प्रवाह के लंबवत् रखी चपटी प्लेट से टकराता वायु-जेट, यह प्रक्षुब्ध प्रवाह का एक उदाहरण है । (c) स्थिर गोले से प्रवाहित तरल । (d) प्रचक्रमान गोले से प्रवाहित तरल के लिए धारा-रेखाएं । (e) ऐयरोफॉयल से प्रवाहित वायु ।

चित्र 10.8 में कुछ प्ररूपी प्रवाहों की धारा-रेखाएं दर्शाई गई हैं। उदाहरण के लिए, चित्र 10.8(a) में स्तरीय प्रवाह दर्शाया गया है। इसमें तरल के विभिन्न बिंदुओं पर वेगों के परिमाण भिन्न-भिन्न हो सकते हैं, परंतु उनकी दिशाएं एक दूसरे के समांतर हैं। ध्यान दीजिए, दो धारा रेखाएं परस्पर एक दूसरे को नहीं काटती, यदि ऐसा संभव होता, तो किसी बिंदु पर तरल के दो वेग होते तथा एक तरल कण किसी भी दिशा में गति करने लगता और प्रवाह धारा रेखीय नहीं होकर प्रक्षुब्ध होता। चित्र 10.8(b) में प्रक्षुब्ध प्रवाह आलेखित किया गया है।

समीकरण (10.9) को *सांतत्य-समीकरण* कहते हैं। यह उन तरलों पर लागू होती है जो असंपीड्य होते हैं। संपीड्य तरलों, जैसे गैसें, के लिए निम्नलिखित अधिक व्यापक समीकरण का उपयोग किया जाता है :

$$\rho_P v_P A_P = \rho_R v_R A_R = \rho_Q v_Q A_Q \qquad (10.10)$$

यहां ρ_P, ρ_R तथा ρ_Q बिंदु P, R तथा Q पर क्रमशः घनत्व हैं।

10.5 बर्नूली का सिद्धांत

तरल प्रवाह एक जटिल परिघटना है। आसानी के लिए, हम इस प्रवाह का वर्णन किसी आदर्श तरल के लिए करेंगे। आदर्श तरल की परिभाषा इस प्रकार की जा सकती है :

(i) इस तरल का प्रवाह स्थायी होता है, अर्थात् प्रत्येक बिंदु पर इसका वेग समय के साथ अचर रहता है।

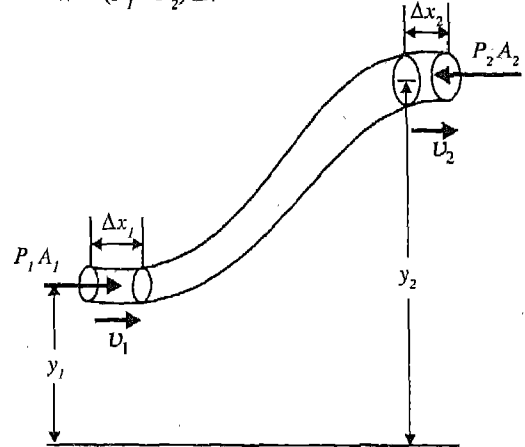
(ii) इस तरल को संपीडित नहीं किया जा सकता। यह शर्त द्रवों पर भली-भांति लागू होती है तथा कुछ परिस्थितियों में गैसों पर भी लागू होती है।

(iii) यह तरल श्यानताहीन होता है। आंतरिक घर्षण नगण्य होता है। इस तरल में आर-पार गति करने वाले पिण्ड पर कोई मंदक बल नहीं लगता। अनुभाग 10.7 में स्टोक के नियम की अपनी चर्चा में हम इस शर्त में छूट देंगे।

(iv) इस तरल का प्रवाह अघूर्णी होता है। किसी भी बिंदु के परितः तरल का कोई कोणीय संवेग नहीं होता। तरल के भीतर किसी भी यादृच्छिक बिंदु पर रखा गया कोई बहुत छोटा पहिया अपने केंद्र के परितः घूर्णन नहीं करता। ध्यान दीजिए यदि तरल प्रक्षुब्ध है तो पहिए के घूर्णन करने की संभावना अधिक होती है तब इस तरल का प्रवाह अघूर्णी नहीं होता।

जैसे ही तरल किसी परिवर्ती अनुप्रस्थ काट और ऊंचाई के पाइप में गति करता है, पाइप के अनुदिश दाब परिवर्तित होगा। स्विटजरलैंड के भौतिकविद डेनियल बर्नूली (1700-1782) ने सर्वप्रथम दाब, तरल की चाल और ऊंचाई में संबंध दर्शाने वाला व्यंजक व्युत्पन्न किया। उनका परिणाम ऊर्जा संरक्षण का ही एक निष्कर्ष है तथा ऊपर दी गई परिभाषा के अनुसार आदर्श तरलों पर लागू होता है।

चित्र 10.9 में दर्शाए अनुसार किसी परिवर्ती अनुप्रस्थ काट के पाइप से समय Δt में प्रवाहित तरल पर विचार कीजिए। दो क्षेत्र 1 व 2 पर दाब, क्षेत्रफल, चाल, Δt समय-अंतराल में विस्थापन तथा ऊंचाई क्रमशः $\{P_1, A_1, v_1, \Delta x_1, y_1\}$ तथा $\{P_2, A_2, v_2, \Delta x_2, y_2\}$ हैं। तरल के निचले सिरे पर किया गया कार्य $W_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V$। यहां ΔV तरल का वह आयतन है जो समय-अंतराल Δt में क्षेत्र 1 से प्रवाहित होता है। सांतत्य समीकरण [समीकरण (10.9)] के अनुसार समान समय-अंतराल Δt में क्षेत्र 2 से समान आयतन का तरल प्रवाहित होता है। इस प्रकार, ऊपरी सिरे पर किया गया कार्य $W_2 = -P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 \Delta V$। इस प्रकार, इन बलों द्वारा समय Δt में किया गया नेट कार्य,

$$W = (P_1 - P_2)\Delta V$$

चित्र 10.9 परिवर्ती अनुप्रस्थ काट के किसी पाइप में किसी आदर्श तरल का प्रवाह, Δx_1 लंबाई के खण्ड में भरा तरल समय Δt में Δx_2 लंबाई के खण्ड तक गति कर लेता है। इस आरेख का उपयोग हम बर्नूली-प्रमेय को व्युत्पन्न करने में करेंगे।

इस कार्य का कुछ भाग तरल की गतिज ऊर्जा परिवर्तित करने में चला जाता है, तथा शेष भाग तरल की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा परिवर्तित करने में चला जाता है। यदि Δt समय में पाइप से प्रवाहित तरल की संहति Δm है, तो इस तरल की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन,

$$\Delta K = (\Delta m)\, v_2^2/2 - (\Delta m)\, v_1^2/2$$

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन,

$$\Delta U = \Delta m\, g\, y_2 - \Delta m\, g\, y_1$$

हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय (अध्याय 6) का उपयोग तरल के इस आयतन पर कर सकते हैं, जिससे हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है,

$$(P_1 - P_2)\Delta V = (\Delta m)\, v_2^2/2 - (\Delta m) v_1^2/2 + \Delta m\, g\, y_2 - \Delta m g y_1$$

अब हम प्रत्येक पद को ΔV से विभाजित करते हैं। ध्यान दीजिए घनत्व, $\rho = (\Delta m)/\Delta V$ अतः,

$$(P_1 - P_2) = \rho\, v_2^2/2 - \rho\, v_1^2/2 + \rho\, g\, y_2 - \rho\, g\, y_1$$

इन पदों को पुनः व्यवस्थित करने पर

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, y_2 \qquad (10.11)$$

यह किसी आदर्श तरल पर अनुप्रयुक्त बर्नूली समीकरण है । सारगर्भित रूप में प्राय: इसे इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं

$$P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g y = \text{स्थिरांक} \qquad (10.12)$$

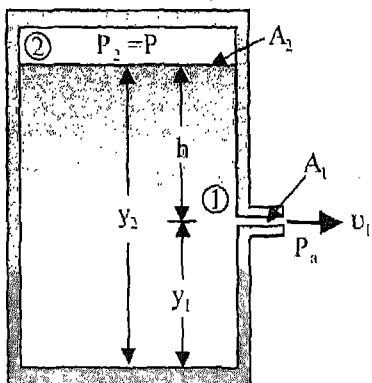
दूसरे शब्दों में, बर्नूली के सिद्धांत को इस प्रकार भी लिख सकते हैं : *जब हम किसी धारा-रेखा के अनुदिश गति करते हैं, तो दाब (P), प्रति एकांक आयतन गतिज ऊर्जा ($\rho v^2/2$) तथा प्रति एकांक आयतन गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा ($\rho g y$) का योग अचर रहता है ।*

बर्नूली समीकरण के बहुत से उपयोगी अनुप्रयोग हैं । इस समीकरण का उपयोग विस्तृत प्रकार की परिघटनाओं को स्पष्ट करने में हमारी सहायता कर सकता है । इनमें से कुछ पर अब हम विचार करेंगे ।

10.5.1 गहराई के साथ दाब में परिवर्तन

अनुभाग 10.2 में प्राप्त परिणाम [समीकरण (10.4)] को समीकरण (10.11) का सीमांत प्रकरण माना जा सकता है । विरामावस्था के तरल पर विचार कीजिए । तब $v_1 = v_2 = 0$ । यदि तरल का पृष्ठ वायुमंडलीय दाब के प्रभाव में है, तो $P_2 = P_a$ । यदि हम ऊंचाइयों में अंतर $y_2 - y_1 = h$ मानें तो समीकरण (10.11) से हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है

$$P_1 = P_a + \rho g h$$

जो तथ्यत: समीकरण (10.4) ही है ।

चित्र 10.10 टॉरिसेली-नियम । पात्र के पार्श्व से बहि:स्राव की चाल, v_1, बर्नूली समीकरण द्वारा प्राप्त होती है । यदि पात्र का शीर्ष भाग खुला है तथा वायुमंडल के संपर्क में है तब $v_1 = \sqrt{2gh}$

10.5.2 टॉरिसेली का बहि:स्राव का नियम

बहि:स्राव शब्द का अर्थ है तरल का बहिर्गमन अर्थात् तरल का बाहर की ओर प्रवाहित होना । टॉरिसेली ने यह पता लगाया कि किसी खुली टंकी से तरल के बहि:स्राव की चाल को एक सूत्र द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जो मुक्त रूप से गिरते पिण्ड की चाल के लिए सूत्र के समरूप होता है । ρ घनत्व के द्रव से भरी किसी ऐसी टंकी पर विचार कीजिए जिसके पार्श्व में टंकी की तली से y_1 ऊंचाई पर एक छोटा छिद्र है (देखिए चित्र 10.10) । द्रव के ऊपर, जिसका पृष्ठ y_2 ऊंचाई पर है, वायु है जिसका दाब P है । सांतत्य समीकरण [समीकरण (10.9)] से हमें यह संबंध प्राप्त होता है

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

यदि टंकी की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A_2 छिद्र की अनुप्रस्थ काट A_1 की तुलना में काफी अधिक है ($A_2 >> A_1$), तब हम शीर्ष भाग पर तरल को सन्निकटत: विराम में मान सकते हैं, अर्थात् $v_2 = 0$ । तब बिंदु 1 तथा 2 पर बर्नूली का समीकरण लागू करते हुए तथा यह लेते हुए कि छिद्र पर दाब P_1 वायुमंडलीय दाब के बराबर है, अर्थात् $P_1 = P_a$, समीकरण (10.11) से हमें यह संबंध प्राप्त होता है,

$$P_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

$y_2 - y_1 = h$ लेने पर,

$$v_1 = \sqrt{2gh + \frac{2(P-P_a)}{\rho}} \qquad (10.13)$$

जब $P >> P_a$ है तथा $2gh$ की उपेक्षा की जा सकती है, तब बहि:स्राव की चाल का निर्धारण पात्र-दाब द्वारा किया जाता है । ऐसी ही स्थिति राकेट-नोदन में होती है । इसके विपरीत यदि टंकी का ऊपरी भाग खुला होने के कारण वायुमंडल के संपर्क में है, तो $P = P_a$ तथा

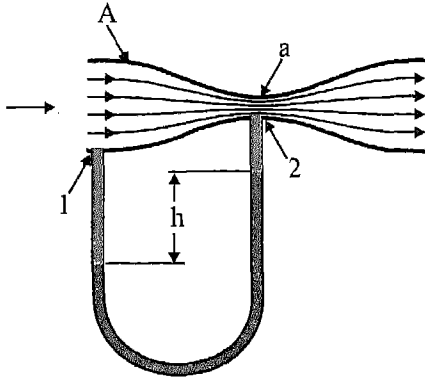
$$v_1 = \sqrt{2gh} \qquad (10.14)$$

यह किसी मुक्त रूप से गिरते पिण्ड की चाल है । समीकरण (10.14) को **टॉरिसेली-नियम** कहते हैं ।

10.5.3 वैंटुरीमापी

हम सभी को पूरी तरह भरे सिनेमा हाल से बाहर निकलने का अनुभव है । निकास द्वार पर हम यह पाते हैं कि वहां मुनष्यों की भीड़ एकत्र है तथा लोगों की गति में लगभग ठहराव है । निकास द्वार के तुरंत बाहर व्यक्तियों की स्वतंत्र तीव्र गति है तथा वहां भीड़ का दाब भी काफी कम है । बर्नूली के सिद्धांत पर आधारित वैंटुरीमापी भी लगभग इसी प्रकार कार्य करता है ।

वैंटुरीमापी (जिसे वैंटुरी नली अथवा प्रवाह मापी भी कहते हैं) का उपयोग किसी असंपीड्य तरल में प्रवाह-वेगों को मापने में किया जाता है । इसे चित्र 10.11 में दर्शाया गया है ।

वैंटुरीमापी में एक मैनोमीटर लगा होता है जिसमें ρ_m घनत्व का कोई द्रव भरा होता है तथा यह किसी क्षैतिज नली के दो बिंदुओं से जुड़ा होता है । इस युक्ति द्वारा नली की चौड़ी गर्दन जिसका क्षेत्रफल A है (बिंदु 1) से प्रवाहित द्रव की चाल v_1 मापनी होती है । बर्नूली समीकरण [समीकरण (10.11)] तथा

चित्र 10.11 वैंटुरीमापी का व्यवस्था आरेख ।

सातत्य-समीकरण [समीकरण (10.9)] से

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{A^2}{a^2}$$

अथवा,

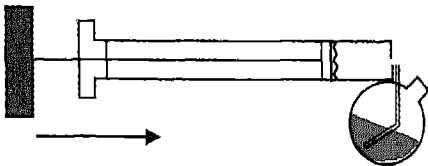
$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\, v_1^2\left[\frac{A^2}{a^2} - 1\right] \qquad (10.15)$$

मैनोमीटर की दो भुजाओं की ऊंचाइयों में अंतर का संबंध दाब में अंतर से होता है, अतः

$$P_1 - P_2 = \rho_m g h = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\frac{A^2}{a^2} - 1\right]$$

इससे चाल प्राप्त होती है

$$v_1 = \sqrt{2\rho_m gh/\rho}\left[\frac{A^2}{a^2} - 1\right]^{-1/2} \qquad (10.16)$$

यह चाल चौड़े प्रवेश द्वार पर कम होती है तथा संकरी गर्दन पर अधिक होती है । वैंटुरीमापी के सिद्धांत के बहुत से अनुप्रयोग हैं । किसी कार अथवा दो पहिया वाहन (स्कूटर, मोटर साइकिल आदि) में एक वैंटुरी वाहिका होती है जिससे वायु प्रवाहित होती है । संकरी गर्दन पर दाब कम होता है तथा ईंधन वाष्प भीतर की ओर चूस लिए जाते हैं ताकि दहन के लिए आवश्यक वायु तथा ईंधन का उचित मिश्रण प्रदान किया जा सके । सामान्य स्प्रेगन (देखिए चित्र 10.12) तथा इत्र छिड़कने में प्रयुक्त होने वाले कणित्र भी इस सिद्धांत पर कार्य करते हैं।

चित्र 10.12 स्प्रेगन : पिस्टन उच्च चाल पर वायु निकालता है जिसके फलस्वरूप पात्र की गर्दन पर दाब कम हो जाता है ।

▶ ***उदाहरण 10.7* रक्त वेग :** किसी मूर्च्छित कुत्ते की बड़ी धमनी में रक्त का प्रवाह किसी वैंटुरीमापी से होकर परिवर्तित किया गया है । इस युक्ति के चौड़े भाग की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल धमनी की अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल, $A = 8\ \text{mm}^2$ के बराबर है । युक्ति के संकरे भाग का क्षेत्रफल $a = 4\ \text{mm}^2$ है । धमनी में दाब-ह्रास 24 Pa है । धमनी में रक्त के प्रवाह की चाल क्या है ?

हल सारणी 10.1 के अनुसार हम रक्त का घनत्व $1.06 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}$ लेते हैं । क्षेत्रफलों का अनुपात $A/a = 2$ । समीकरण (10.15) का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 24}{1060 \times (2^2 - 1)}} = 0.125\ \text{m s}^{-1}$$ ◀

10.5.4 संवहन तंत्र का फड़फड़ाना (flutter) तथा हार्ट अटैक

ऐसे व्यक्ति जिनको गंभीर हृदय रोग है, उनकी धमनियों की भीतरी दीवारों पर प्लाक (plaque) का जमाव होने के कारण धमनियां भीतर से संकीर्ण हो जाती हैं । इन संकरी धमनियों से रक्त को प्रवाहित कराने के लिए हृदय को अधिक कार्य करना पड़ता है । इस क्षेत्र में रक्त के प्रवाह की चाल बढ़ जाती है । बर्नूली के सिद्धांत के अनुसार, यहां भीतरी दाब घट जाता है तथा बाह्य दाब के कारण धमनी दब जाती है । हृदय इस बंद धमनी को खोलने के लिए रक्त को धक्का देता है । जैसे ही रक्त इसे खोलकर बाहर की ओर तीव्र गति से प्रवाहित होता है, आंतरिक दाब पुनः गिर जाता है तथा धमनी पुनः दब जाती है । यह परिघटना संवहन तंत्र का फड़फड़ाना (vascular flutter) कहलाती है तथा इसे स्टेथॉस्कोप द्वारा सुना जा सकता है । इसके कारण प्लाक एक स्थान से हटकर हृदय की ओर जाने वाली किसी छोटी वाहिका के मार्ग को रोक सकता है । इसके परिणामस्वरूप हार्ट अटैक हो जाता है ।

10.5.5 फिरकी गेंद फेंकना ('वक्र गेंद')

बहुत से खेलों; जैसे–क्रिकेट, टैनिस, बेसबाल अथवा गोल्फ में हम यह देखते हैं कि कोई प्रचक्रमान गेंद वायु में गति करते समय अपने परवलीय पथ से विचलित हो जाती है । इस विचलन को अंशतः बर्नूली के सिद्धांत द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है ।

चित्र 10.8(c) में हमने किसी तरल माध्यम के आपेक्ष गतिमान किसी गेंद के चारों ओर धारा रेखाएं दर्शाई हैं । यदि रैखिक गति के साथ-साथ गेंद अपने केंद्र से गुजरने वाले अक्ष के चारों ओर और कागज के तल के लंबवत् प्रचक्रमान गति करती है, तब यह अपने प्रचक्रण के साथ अपने संपर्क के कुछ तरल को भी अपने साथ गति कराती है । दूसरे शब्दों में, यहां तरल का कुछ श्यानता कर्षण होता है । यदि हम गेंद के साथ प्रचक्रण करते तरल वेगों के इस वितरण को चित्र 10.8(c) में दर्शाई वेगों की मूल पार्श्विका में जोड़ दें तो हमें चित्र 10.8(d)

में दर्शाया गया धारा-रेखाओं का पैटर्न प्राप्त होता है । स्पष्ट रूप से, बर्नूली के सिद्धांत के अनुसार वहां पर एक अतिरिक्त ऊर्ध्वमुखी प्रणोद उत्पन्न होता है । अतः प्रचक्रण करती हुई फेंकी गई गेंद अपने परवलयाकार मार्ग के आपेक्ष ऊपर की ओर गति करेगी । यदि प्रचक्रण का अक्ष कागज के तल में तथा गेंद की गति के लंबवत् है, तब गेंद की गति पार्श्वीय होगी । तेज गेंदबाजी में गेंद के झूलने की उत्पत्ति यही है । बेसबाल में इस प्रकार की उड़ान को *वक्र बाल* (curve ball) कहते हैं । इस प्रभाव के कारण धीमी गेंदबाजी में परवलीय पथ से कुछ विचलन होता है परंतु यह सुस्पष्ट देखने योग्य नहीं होता । परंतु जब यह गेंद मैदान में जमीन से टकराती है तब बल आघूर्ण से यह प्रभाव अधिक महत्वपूर्ण होता है ।

पार्श्वीय दाब का अंतर, जो गेंद के वक्रित मार्ग का कारण है और जो अधिक दाब की दिशा में उत्तल होता है, *मैग्नस प्रभाव* (Magnus effect) कहलाता है । उन्नीसवीं शताब्दी के मध्य में एच. जी. मैग्नस (1802–1870) नामक वैज्ञानिक ने इस प्रभाव की खोज की । पृष्ठ जितना अधिक खुरदरा होता है उतनी ही अधिक मोटाई की वायु की परत प्रचक्रण करती गेंद द्वारा अपने साथ घसीटी जाती है, तथा उतना ही अधिक स्पष्ट यह प्रभाव दिखाई पड़ता है । ऐसे तेज गेंदबाज ज्ञात हैं जो धोखा देने के लिए रेजर-ब्लेड से गेंद के पृष्ठ के बहुत छोटे भागों को काट देते थे । गोल्फ की गेंदों पर गड्ढे बना देते हैं ताकि उन्हें 'वायुगतिक' उत्थान दिया जा सके ।

10.5.6 वायुगतिकी

चित्र 10.8(e) में एक ऐयरोफॉयल दर्शाया गया है जिसे ठोस आकार दिया गया है ताकि जब वह वायु में होकर क्षैतिजतः गति करे तो उस पर एक ऊर्ध्वमुखी ऊर्ध्वाधर बल आरोपित हो । यही बल किसी वायुयान को उड़ाता है । किसी वायुयान के पंखों की अनुप्रस्थ काट चित्र 10.8(e) में दर्शाए गए ऐयरोफॉयल के समान प्रतीत होती है । ऐयरोफॉयल की विशेष आकृति के कारण वेग से पीछे की ओर जाती वायु की चाल ऐयरोफॉयल के शीर्षभाग पर पेंदी की तुलना में कहीं अधिक हो जाती है । बर्नूली के सिद्धांत के अनुसार इसके कारण पंखों पर ऊर्ध्वमुखी बल उत्पन्न होता है जो वायुयान के भार को संतुलित करता है । निम्नलिखित उदाहरण इसकी व्याख्या करेगा ।

▶ ***उदाहरण 10.8*** किसी पूर्णतः भारित बोइंग एयर क्राफ्ट की संहति 3.3×10^5 kg है । इसका कुल पंख-क्षेत्रफल 500 m² है । यह एक निश्चित ऊंचाई पर 960 km h⁻¹ चाल से उड़ रहा है । (a) पंख के ऊपरी तथा निचले पृष्ठों के बीच दाबान्तर आकलित कीजिए । (b) निचले पृष्ठ की तुलना में ऊपरी पृष्ठ पर वायु की चाल में आंशिक वृद्धि आकलित कीजिए । [वायु का घनत्व $\rho = 1.2$ kg m⁻³]

हल (a) बोइंग 747 के भार को दाबान्तर के कारण ऊर्ध्वमुखी बल द्वारा संतुलित किया जाता है । इस प्रकार,

$$\Delta P.A = 3.3 \times 10^5 \times 9.81 \text{ N}$$

$$\Delta P = \frac{3.3 \times 10^5 \times 9.81 \text{ N}}{500 \text{ m}^2} = 6.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-2}$$

(b) समीकरण (10.11) में हम वायुयान के ऊपरी पृष्ठ तथा निचले पृष्ठ की ऊंचाइयों के थोड़े अंतर की उपेक्षा कर देते हैं । तब इसके बीच दाबान्तर

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

यहां v_2 वायु की ऊपरी पृष्ठ के ऊपर चाल तथा v_1 वायु की निचले पृष्ठ के नीचे चाल हैं ।

$$v_2 - v_1 = \frac{2\Delta P}{\rho(v_2 + v_1)}$$

औसत चाल $v_{av} = (v_2 + v_1)/2 = 960 \text{ km h}^{-1} = 267 \text{ m s}^{-1}$ लेने पर

$$(v_2 - v_1)/v_{av} = \frac{\Delta P}{\rho v_{av}^2}$$

$$\approx 0.08$$

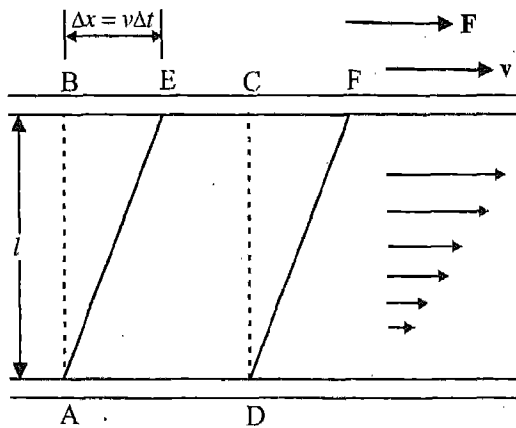
पंखों के ऊपर वायु की चाल पंखों के नीचे वायु की चाल की तुलना में केवल 8% अधिक होनी चाहिए । ◀

10.6 श्यानता तथा स्टोक का नियम

सभी तरल आदर्श तरल नहीं होते । अधिकांश तरल अपरूपण गति में कुछ न कुछ प्रतिरोध अवश्य डालते हैं । तरल गति में इस प्रतिरोध को आन्तरिक घर्षण के रूप में देखा जा सकता है

डेनियल बर्नूली (1700-1782)

स्विटज़रलैंड के एक वैज्ञानिक तथा गणितज्ञ थे जिन्होंने लिओनार्ड आयलर के साथ मिलकर गणित का फ्रेंच अकादमी पुरस्कार दस बार जीतने का कीर्तिमान स्थापित किया । उन्होंने चिकित्सा शास्त्र का भी अध्ययन किया तथा कुछ समय के लिए वे बेस्ले, स्विटज़रलैंड में शरीर रचना विज्ञान तथा वनस्पति शास्त्र के प्रोफेसर के पद पर भी रहे । उनका अत्यधिक सुविख्यात कार्य द्रवगतिकी, एक विषय जिसे उन्होंने स्वयं एकल सिद्धांत : ऊर्जा संरक्षण से विकसित किया, के क्षेत्र में है । उनके कार्यों में कैलकुलस, प्रायिकता, कंपायमान डोरी का सिद्धांत, तथा अनुप्रयुक्त गणित सम्मिलित हैं । उन्हें गणितीय भौतिकी का संस्थापक कहा जाता है ।

तथा इस प्रतिरोध को श्यानता कहते हैं । द्रवों के प्रकरण में, द्रव की संलग्न परतों के बीच एक दूसरे के ऊपर सरकते समय घर्षण बल के कारण श्यानता उत्पन्न होती है । कोई द्रव कितना श्यान है, इसे निम्नलिखित प्रयोग द्वारा भलीभांति समझा जा सकता है । यदि कांच की दो समांतर प्लेटों को तेल की परत द्वारा पृथक् किया जाए तथा निचली प्लेट को स्थिर रखा जाए, तो निचली प्लेट के सापेक्ष ऊपरी परत को सरकाना आसान होता है । यह व्यवस्था चित्र 10.13 में दर्शाई गई है । इसके विपरीत, यदि तेल की परत के स्थान पर शहद की परत ली जाए, तो ऊपरी प्लेट को सरकाना कठिन होता है । इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि तेल की तुलना में शहद की श्यानता अधिक है । ध्यान दीजिए, जैसे-जैसे हम निचली स्थिर प्लेट से ऊपरी प्लेट की ओर जाते हैं द्रव की क्रमागत परतों के वेगों में 0 से v तक वृद्धि होती है, यहां v ऊपरी प्लेट की गति का वेग है ।

चित्र 10.13 दो समांतर कांच की प्लेटों के बीच में रखे द्रव की एक परत । इनमें कांच की निचली प्लेट स्थिर है तथा ऊपरी प्लेट दाईं ओर v वेग से गतिमान है ।

चित्र 10.13 में किसी द्रव की दो संलग्न परतों, जो अवरूपण प्रतिबल के प्रभाव में हैं, में सापेक्ष गति उत्पन्न की गई है । मान लीजिए कांच की ऊपरी प्लेट बाह्य बल **F** के प्रभाव में अचर वेग v से गतिमान है । इस गति के कारण, द्रव का एक भाग अपनी मूल आकृति ABCD से किसी लघु समय-अंतराल Δt के पश्चात् AEFD मे अवरूपित हो जाता है । इस समय-अंतराल में, द्रव में एक अवरूपण विकृति $\Delta x/l$ उत्पन्न हो जाती है । हम अवरूपण विकृति में परिवर्तन की दर (विकृति दर) को इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$\text{विकृति दर} = \frac{\text{अवरूपण विकृति}}{\Delta t} = \frac{\Delta x/l}{\Delta x} = \frac{v}{l} \qquad (10.17)$$

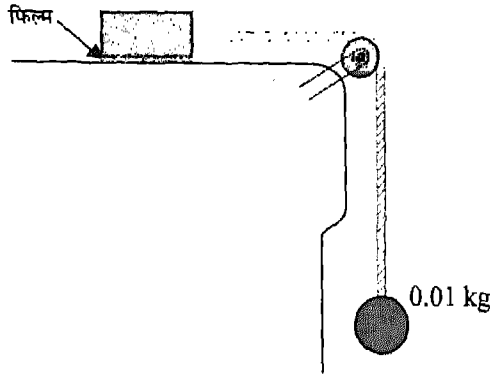
किसी द्रव के श्यानता गुणांक, η (उच्चारण 'ईटा') की परिभाषा अवरूपण प्रतिबल तथा विकृति दर के रूप में की जाती है,

$$\eta = \frac{F/A}{v/l} = \frac{F\,l}{v\,A} \qquad (10.18)$$

श्यानता का SI मात्रक प्वाजय (P*l*) है । इसका उल्लेख सामान्यतया N s m^{-2} के रूप में अथवा Pa s (पास्कल सेकंड) के रूप में भी किया जाता है । सारणी 10.3 में कुछ सामान्य तरलों के श्यानता गुणांक दिए गए हैं । हम रक्त तथा जल के विषय में दो तथ्यों को बताते हैं, जो आपके लिए रोचक हो सकते हैं । सारणी 10.3 में इंगित सूचना के आधार पर जल की तुलना में रक्त अधिक गाढ़ा (अधिक श्यान) है । साथ ही रक्त की आपेक्षिक श्यानता ($\eta/\eta_{\text{जल}}$) ताप-परिसर 0°C से 37°C के बीच अचर रहती है । किसी द्रव की श्यानता ताप बढ़ने पर घटती है, जबकि गैसों की श्यानता ताप बढ़ने पर बढ़ती है ।

सारणी 10.3 कुछ तरलों की श्यानता

तरल	ताप (°C)	श्यानता (mPl)
जल	20	1.0
	100	0.3
संपूर्ण रक्त	37	2.7
मशीन का तेल	16	113
	38	34
ग्लिसरीन	20	830
शहद	-	200
वायु	0	0.017
	40	0.019

▸ *उदाहरण 10.9* 0.10 m^2 क्षेत्रफल की कोई धातु की प्लेट किसी डोरी की सहायता से जो एक आदर्श घिरनी (जिसे संहति रहित, तथा घर्षण रहित माना गया है) के ऊपर से होकर जाती है, 0.01 kg संहति से चित्र 10.14 की भांति जुड़ी है । कोई द्रव जिसकी फिल्म 0.3 mm मोटाई की है, मेज तथा प्लेट के बीच रखी हुई है । मुक्त किए जाने पर प्लेट 0.085 m s^{-1} की अचर चाल से दाईं ओर गति करने लगती है । द्रव का श्यानता गुणांक ज्ञात कीजिए ।

चित्र 10.14 किसी द्रव के श्यानता गुणांक की माप (उदाहरण 10.9 देखिए) ।

हल डोरी में तनाव के कारण धातु की प्लेट दाईं ओर गति करती है । डोरी में यह तनाव T परिमाण में डोरी से निलंबित 0.01 kg के पिण्ड के भार के बराबर है । अत: अवरूपण बल

$$F = T = mg = 0.01 \times 9.80 \text{ N} = 9.8 \times 10^{-2} \text{N}$$

ध्यान दीजिए, यहां हमने निलंबित पिण्ड का त्वरण शून्य लिया है । यह परिकल्पना करते हुए कि वेग प्रवणता एकसमान है तथा समीकरण (10.18) का उपयोग करने पर

$$\eta = \frac{Fl}{vA} = \frac{(0.3\times10^{-3})\times(9.8\times10^{-2})}{(0.10)\times(0.085)}$$

$$= 3.45\times10^{-3} \text{ Pa s}$$

10.6.1 स्टोक का नियम

एक सामान्य स्थिति, जिसमें तरल की श्यानता की महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है, किसी तरल में एक गोले की गति है । इसके सामान्य उदाहरण वायु में दोलन करता हुआ लोलक, स्वतंत्रता पूर्वक गिरती वर्षा की बूंद तथा किसी धूल-कण का जल में धीरे-धीरे नीचे गिरना है । η श्यानता के किसी तरल में $\mathbf{v}$ वेग से गतिमान a त्रिज्या के किसी गोले पर लगने वाले श्यान कर्षण बल $\mathbf{F}$ का स्पष्ट प्रतिपादन एक अंग्रेज वैज्ञानिक सर जार्ज जी. स्टोक (1819-1903) ने किया जो इस प्रकार है,

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta a\mathbf{v} \qquad (10.19)$$

समीकरण (10.19) को **स्टोक का नियम** कहते हैं ।

हम स्टोक के नियम को व्युत्पन्न नहीं करेंगे । परंतु हम इसके लिए आंशिक औचित्य प्रदान कर सकते हैं । इस परिघटना में लंबाई का पैमाना केवल गोले की त्रिज्या a है । तब हम समीकरण (10.17) से विकृति-दर $\propto v/a$ ले सकते हैं । अवरूपण विकृति का सन्निकट मान $F/\pi a^2$ लिया जा सकता है। श्यानता गुणांक की परिभाषा [समीकरण (10.18)] का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है, $F \simeq \pi\eta a v$ जो श्यान बल का परिमाण प्रदान करता है । यहां हम यह बलपूर्वक कहते हैं कि हमने स्टोक के नियम को देखने में विश्वसनीय बना दिया, परंतु हमने इसे किसी भी प्रकार से व्युत्पन्न नहीं किया है । यथार्थ आंकिक गुणक 6 को हम प्राप्त नहीं कर सके ।

स्टोक का नियम किसी ऐसे बल का एक रोचक उदाहरण है जो वेग के समानुपाती है । इस बल का एक निष्कर्ष नीचे दिया गया है । किसी श्यान तरल में गिरता हुआ गोला गुरुत्व बल के कारण आरंभ में त्वरित होता है । जैसे-जैसे गोले का वेग बढ़ता जाता है, मंदक श्यान बल भी बढ़ता जाता है । अंत में जब गोले पर लगा गुरुत्व के कारण बल श्यान बल से अधिक नहीं रह जाता, अर्थात् जब गुरुत्व बल और श्यान कर्षण बल परिमाण में समान हो जाते हैं, तब गोले में कोई त्वरण नहीं होता, और गोला किसी अचर वेग से, जिसे **सीमान्त वेग** कहते हैं, तरल में गिरता है ।

सीमांत वेग को हम v_t द्वारा प्रदर्शित करते हैं तथा निम्न तरह से प्राप्त करते हैं :

$$6\pi\eta a v_t = \frac{4}{3}\pi a^3(\rho - \sigma)g$$

जहां ρ तथा σ क्रमशः गोले तथा तरल के द्रव्यमान घनत्व हैं।

$$v_t = \frac{(4\pi/3)a^3(\rho-\sigma)g}{6\pi\eta a}$$

$$= \frac{2a^2(\rho-\sigma)g}{9\eta} \qquad (10.20)$$

अत:, अंतिम वेग गोले के आकार (अर्थात् त्रिज्या) के वर्ग के अनुक्रमानुपाती तथा माध्यम की श्यानता के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।

10.7 रेनॉल्ड अंक

स्तरीय प्रवाह [चित्र 10.8(a)] का स्थायित्व श्यान बलों द्वारा संपोषित किया जाता है । तथापि यह प्रेक्षण किया गया है कि यदि प्रवाह की दर अधिक है तो स्तरीय अथवा स्थायी प्रवाह भंग हो जाता है । उच्च प्रवाह दरों पर प्रवाह में अनियमितता, अस्थायी गति, **प्रक्षुब्ध (विक्षुब्ध) प्रवाह** आरंभ हो जाते हैं । तीव्र गति से प्रवाहित किसी तरल के मार्ग में कोई बाधा रख देने पर प्रवाह विक्षुब्ध हो जाता है जिसे चित्र 10.8(b) में देखा जा सकता है । हमारे चारों ओर विक्षुब्ध प्रवाह के बहुत से उदाहरण हैं । मानसून के दिनों में कपासी वर्षी मेघ का बनना अथवा जलती लकड़ियों के ढेर से धुएं का ऊपर उठना प्रक्षुब्ध (विक्षुब्ध) प्रवाह दर्शा सकता है । तारों का टिमटिमाना वायुमंडलीय विक्षोभ का ही परिणाम है । महासागरों में जलधाराएं प्राय: विक्षुब्ध होती हैं । कारों, वायुयानों तथा नौकाओं द्वारा छोड़े गए जल तथा वायु में विक्षोभ होता है ।

ऑस्बोर्न रेनॉल्ड (1842-1912) ने यह प्रेक्षण किया कि निम्न दरों पर प्रवाहित होने वाले श्यान तरलों के लिए प्रक्षुब्ध (विक्षुब्ध) प्रवाह की संभावना कम होती है । उन्होंने एक

विमाहीन अंक की परिभाषा दी जिसके मान से हमें एक सन्निकट बोध होता है कि प्रवाह विक्षुब्ध होगा अथवा नहीं। इस अंक को **रेनॉल्ड अंक** कहते हैं। रेनॉल्ड अंक, R_e, को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है,

$$R_e = \frac{\rho v d}{\eta} \tag{10.21}$$

यहां ρ तरल का घनत्व तथा v तरल के प्रवाह की चाल है। प्राचल d तरल प्रवाह के मार्ग में उत्पन्न बाधा अथवा सीमा की प्ररूपी विमा है। गोलाकार बाधा के लिए हम d का मान गोले का व्यास ले सकते हैं। नलिका से प्रवाहित तरल के प्रकरण में d नलिका का व्यास होता है। प्रयोग यह दर्शाते हैं कि यदि R_e का मान 1000 से कम है तो प्रवाह स्तरीय (अविक्षुब्ध) होता है। यदि यह मान 1000 तथा 2000 के बीच है तो प्रवाह अस्थायी हो जाता है। यदि R_e का मान 2000 से अधिक है तो प्रवाह प्राय: प्रक्षुब्ध (विक्षुब्ध) होता है।

रेनॉल्ड अंक का वह यथार्थ मान जिस पर विक्षुब्ध प्रवाह आरंभ हो जाता है **क्रांतिक रेनॉल्ड अंक** कहलाता है। इसे प्रयोग द्वारा ज्ञात किया जाता है। यह पाया गया है कि ज्यामितीय रूप में समान प्रवाह, R_e के समान मान पर विक्षुब्ध हो जाते हैं। उदाहरण के लिए तेल तथा जल के घनत्व तथा श्यानता भिन्न-भिन्न हैं। परंतु, यदि हम दो सर्वसम आकृतियों तथा अनुप्रस्थ काट की नलियों में पंप द्वारा तेल तथा जल प्रवाहित कराएं तो R_e के लगभग समान मानों पर प्रवाह विक्षुब्ध हो जाता है। इस तथ्य से हमें जहाजों, पनडुब्बियों, रेस में उपयोग होने वाली कारों तथा वायुयानों की अभिकल्पना करने तथा प्रकृति में तरल प्रवाह के अभिलक्षणों के अध्ययन के लिए लघुस्तरीय प्रयोगशाला मॉडल आरंभ करने के अवसर प्राप्त होते हैं।

भौतिक रूप से रेनॉल्ड अंक जड़त्वीय बल* प्रति एकांक क्षेत्रफल तथा श्यान बल प्रति एकांक क्षेत्रफल का अनुपात होता है। यदि किसी तरल के प्रवाह में d व्यास की गोलीय बाधा द्वारा रुकावट पैदा होती है तो समीकरण (10.11) ($P_1 \approx P_2 \approx 0$ तथा $y_1 = y_2$ लेकर) के आधार पर यह तर्क दिया जा सकता है कि जड़त्वीय बल प्रति एकांक क्षेत्रफल $\propto \rho v^2$। स्टोक के नियम से मिलते-जुलते विचारों द्वारा, श्यान बल प्रति एकांक क्षेत्रफल $\propto \frac{\eta v}{d}$। इन दोनों बलों का अनुपात रेनॉल्ड अंक होता है,

$$R_e = \frac{\rho v^2}{\eta v/d} = \frac{\rho v d}{\eta} \tag{10.22}$$

विक्षोभ के कारण ऊर्जा-क्षय प्राय: ऊष्मा के रूप में होता है। रेस के लिए उपयोग होने वाली कारें तथा वायुयान इतनी यथार्थतापूर्वक निर्मित की जाती हैं कि विक्षोभ न्यूनतम हो जाए। इस प्रकार के वाहनों की अभिकल्पना में प्रयोग तथा जांच एवं भूल विधि सम्मिलित होती है। इसके विपरीत विक्षोभ (घर्षण की भांति) सदैव ही अवांछनीय नहीं होता। विक्षोभ मिश्रण प्रोत्साहित करता है तथा संहति, संवेग तथा ऊर्जा के स्थानांतरण की दर में वृद्धि कर देता है। रसोईघरों में उपयोग होने वाले मिक्सर के ब्लेड विक्षुब्ध प्रवाह प्रेरित करते हैं तथा गाढ़ा मिल्क शेक बनाने के साथ-साथ अण्डे का समांगी (एकसमान) संरचना का घोल प्रदान करते हैं। गल्फ स्ट्रीम एक बृहत कोष्ण महासागरीय जल धारा होती है जो मेक्सिको की खाड़ी से निकलकर ब्रिटिश उपद्वीप पर समाप्त होती है। यदि इसका प्रवाह विशुद्ध रूप से स्तरीय होता, तब इंग्लैंड बहुत अधिक ठंडा क्षेत्र होता।

> **उदाहरण 10.10.** 1.25 cm व्यास की किसी जल टोंटी से प्रवाहित होने वाले जल की दर 3 L/min है। जल का श्यानता गुणांक 10^{-3} Pa s है। प्रवाह का अभिलक्षण बताइए।

हल मान लीजिए प्रवाह की चाल v है तथा टोंटी का व्यास $d = 1.25$ cm है। टोंटी से प्रति सेकंड बाहर निकलने वाले जल का आयतन,

$$Q = v \times \pi\, d^2/4$$

$$v = 4\,Q/\pi\, d^2$$

तब हम रेनॉल्ड अंक का अनुमान इस प्रकार लगा सकते हैं,

$$R_e = 4\,\rho Q/\pi\, d\eta$$

$$= 4 \times 10^3 \times Q/(3.14 \times 1.25 \times 10^{-2} \times 10^{-3})$$

$$= 1.109 \times 10^8\, Q$$

क्योंकि $Q = 3$ L/min $= 50\ \text{cm}^3/\text{s} = 5 \times 10^{-5}\ \text{m}^3\text{s}^{-1}$, अत: हमें प्राप्त होता है

$$R_e = 5100$$

अत: प्रवाह प्रक्षुब्ध होगा। स्तरीय प्रवाह से प्रक्षुब्ध प्रवाह के पारगमन को निर्धारित करने के लिए आप अपने वाश बेसिन पर एक प्रयोग कर सकते हैं। ◀

10.8 पृष्ठ तनाव

पृष्ठ तनाव की परिघटना का संबंध द्रवों से होता है, गैसों से नहीं। द्रवों की अपनी कोई निश्चित आकृति नहीं होती, परंतु उनका अपना एक निश्चित आयतन होता है। जब हम किसी दिए गए आयतन के द्रव को किसी बड़े पात्र में उड़ेलें, तो उस पात्र में एक स्वतंत्र पृष्ठ होगा जो उस तरल को वायु से पृथक् करेगा। पृष्ठ के निकट द्रव का अणु द्रव के भीतर के किसी अणु की अपेक्षा केवल द्रव के कुछ अणुओं (सतह के एक तरफ केवल वायु है) द्वारा ही आकर्षित होता है। इस कारण पृष्ठ पर के अणुओं की आकर्षी स्थितिज ऊर्जा द्रव के भीतर के अणुओं की आकर्षी स्थितिज ऊर्जा की तुलना में कम होगी।

* यह गतिमान तरल के जड़त्व (संहति) के कारण बल से संबधित होता है। इसे अध्याय 5 में वर्णन किए गए त्वरित निकायों के लिए छद्म/जड़त्वीय बल की भ्रांति नहीं होनी चाहिए।

इस कारण किसी द्रव (अथवा इस दृष्टि से सामान्यत: ठोस सहित कोई भी वस्तु) के लिए पृष्ठ होना ऊर्जा की दृष्टि से अनुकूल नहीं है । इस तथ्य के रोचक परिणाम हैं जिनमें से कई से आपका साक्षात्कार दैनिक जीवन में होता है । इनमें से यहां हम कुछ का वर्णन करते हैं । उदाहरण के लिए, तेल तथा जल आपस में नहीं मिलते । जल आपको और मुझे गीला कर देता है परंतु बतख को गीला नहीं करता । पारा कांच से नहीं चिपकता किंतु जल चिपक जाता है । गुरुत्व बल की उपस्थिति में भी तेल रुई की बत्ती से ऊपर चढ़ जाता है । ये तथा आधुनिक जीवन की बहुत-सी सामान्य प्रक्रियाएं; जैसे--कपड़े धोने में अपमार्जकों का उपयोग ऊपर वर्णित तथ्य अर्थात् द्रवों की पृष्ठ ऊर्जा पर आधारित हैं । इस अनुभाग में हम इन परिघटनाओं को स्पष्ट करने का प्रयास करेंगे ।

10.8.1 पृष्ठीय ऊर्जा

कोई द्रव अपने अणुओं के बीच आकर्षण के कारण एक साथ ठहरा रहता है । द्रव के भीतर कोई अणु अपने चारों ओर के अन्य अणुओं से घिरा रहता है [चित्र 10.15(a)] । इनकी दूरियां इस प्रकार होती हैं कि यह अधिकांश को अपनी ओर आकर्षित करता है । इस अणु की कुल स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक होती है तथा इस ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा का परिमाण इस बात पर निर्भर करता है कि इस चुने हुए अणु के चारों ओर अणु किस प्रकार व्यवस्थित हैं । द्रव के भीतर किसी अणु में अतिरिक्त आकर्षी स्थितिज ऊर्जा होती है, यह बात इस तथ्य से स्पष्ट होती है कि इस प्रकार के अणुओं के किसी संचयन (द्रव) को लेने तथा उन्हें एक-दूसरे से दूर बिखेरने (गैस अथवा उसी पदार्थ की वाष्प) के लिए ऊर्जा खर्च करनी पड़ती है । इस प्रकिया को वाष्पन कहते हैं तथा यह ऊर्जा जिसे वाष्पन की ऊष्मा कहते हैं, परिमाण में काफी अधिक होती है । जल के लिए इसका मान 40 k J/mol है । किसी द्रव के अणु पर लगने वाले बल किस प्रकार के होते हैं ? क्योंकि किसी द्रव के अणु के चारों ओर अणु होते हैं, अत: ऐसे अणु पर औसतन नेट बल शून्य होता है । तथापि द्रव में यादृच्छिक बल होते हैं जो कभी प्रतिकर्षी तो कभी आकर्षी होते हैं । (इन्हीं यादृच्छिक बलों के कारण द्रवों में ब्राउनी गति होती है ।)

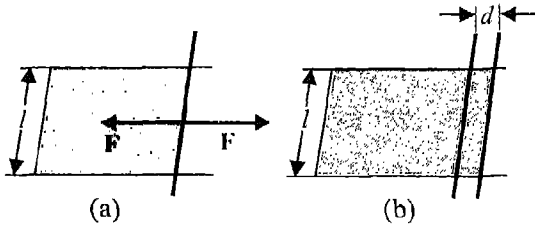
अब द्रव के पृष्ठ के समीप किसी अणु पर विचार कीजिए [चित्र 10.15(b)] । द्रव के भीतर के अणु की तुलना में केवल संख्या में आधे अणु ही, जो सब एक ही ओर हैं, इस अणु को घेरते हैं । इन अणुओं के कारण कुछ ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा होती है । परंतु स्पष्ट रूप से यह ऊर्जा द्रव के भीतर के अणु से अपेक्षाकृत कम होती है । द्रव के पृष्ठ के अणु की ऊर्जा द्रव के भीतरी अणुओं की ऊर्जा की लगभग आधी होती है । इसका अर्थ यह हुआ कि ऊर्जा की दृष्टि से किसी द्रव का पृष्ठ (द्रव-वायु) होना अनुकूल नहीं है। अत: कोई द्रव, बाह्य स्थितियों की अनुमति के अनुसार, अपने पृष्ठ के क्षेत्रफल को कम से कम करने का प्रयास करता है । पृष्ठ के क्षेत्रफल में वृद्धि करने के लिए ऊर्जा खर्च करनी पड़ती है । अधिकांश पृष्ठीय परिघटनाओं को हम इसी तथ्य के पदों में समझ सकते हैं । किसी अणु को पृष्ठ पर रखने में कितनी ऊर्जा खर्च होती है ? जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है, यह लगभग उस ऊर्जा की आधी होगी जो उस अणु को द्रव से पूर्ण रूप से अलग करने के लिए चाहिए, अर्थात् वाष्पन की ऊष्मा की आधी ऊर्जा चाहिए ।

क्या पृष्ठ के अणु पर कोई नेट आकर्षण बल कार्य करता है ? प्रत्यक्ष रूप से नहीं, अन्यथा यह अणु, कार्यरत आकर्षण बल की दिशा में त्वरित होता, तथा पृष्ठ का निपात हो जाता । ऐसा कैसे संभव है कि द्रव के पृष्ठ के अणु पर कोई नेट बल कार्य नहीं करता जबकि पृष्ठ के अणु के केवल एक ही ओर द्रव के अणु हैं तथा दूसरी ओर बहुत ही कम अणु हैं ? इसका विश्वसनीय स्पष्टीकरण यह है कि अणुओं के बीच परस्पर उनकी दूरी के अनुसार आकर्षी तथा प्रतिकर्षी दोनों प्रकार के बल लगते हैं । यदि अणु बहुत पास-पास आ जाते हैं तो उनमें परस्पर प्रतिकर्षण होता है । दूरी अधिक होने पर उनमें आकर्षण होता है । क्योंकि दोनों ही दूरी के परिसरों के अणु पृष्ठ के एक ओर प्रत्येक दिशा में वितरित हैं, पृष्ठ के लंबवत् एक परिणामी आकर्षी बल होता है तथा पृष्ठ के लंबवत् एक परिणामी प्रतिकर्षी बल भी कार्य करता है [चित्र 10.15(c) देखिए] । साम्यावस्था के लिए ये दोनों बल परिमाण में समान होते हैं ।

चित्र 10.15 किसी द्रव में पृष्ठ पर अणुओं का व्यवस्था आरेख तथा बलों का संतुलन (a) किसी द्रव के भीतर अणु । किसी अणु पर अन्य अणुओं के कारण बलों को दर्शाया गया है । तीरों की दिशाएं आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण को दर्शाती हैं । (b) द्रव के पृष्ठ के अणु के लिए इसी प्रकार । (c) आकर्षी (A) तथा प्रतिकर्षी (R) बलों का संतुलन ।

अंत में आप यह जानना चाहेंगे कि पृष्ठ क्या होता है । क्योंकि किसी द्रव में अणु इधर-उधर निरंतर गति करते रहते हैं अत: पूर्णत: सुस्पष्ट पृष्ठ का होना संभव नहीं है । जब हम चित्र 10.15(c) में दर्शाई गई दिशा में कुछ आण्विक आकार की दूरी में जाते हैं, द्रव के अणुओं का घनत्व $z=0$ के आसपास तेजी से घटकर शून्य हो जाता है ।

10.8.2 पृष्ठ तनाव

इस तथ्य का कि किसी द्रव के पृष्ठ के साथ अतिरिक्त ऊर्जा संबद्ध होती है, यह अर्थ है कि यदि हम अन्य सभी बातों, जैसे आयतन आदि को स्थिर रखते हुए और अधिक पृष्ठ उत्पन्न करना चाहें, तो हमें और अधिक ऊर्जा खर्च करनी होगी । इस तथ्य को ठीक प्रकार समझने के लिए द्रव की एक ऐसी क्षैतिज फिल्म का विचार कीजिए जो किसी ऐसी छड़ पर समाप्त होती है जो दो समांतर निर्देशकों पर सरकने के लिए स्वतंत्र है (चित्र 10.16) । इसका अर्थ यह है कि (संतुलन में) द्रव के कारण छड़ पर एक बल (F) कार्य करता है जो कि परिमाण में छड़ पर लगाए गए बल के समान तथा दिशा में विपरीत है । यह बल द्रव के पृष्ठ तनाव के अनुक्रमानुपाती होता है । अब हम इस बल तथा द्रव के पृष्ठ की अतिरिक्त ऊर्जा में संबंध स्थापित करेंगे ।

चित्र 10.16 किसी फिल्म को तानना । (a) संतुलन में कोई फिल्म । (b) किसी अतिरिक्त दूरी तक तानित फिल्म

मान लीजिए साम्यावस्था में हम चित्र में दर्शाए अनुसार छड़ को किसी छोटी दूरी d तक गति कराते हैं । तब आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य है $\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}=Fd$ । ऊर्जा संरक्षण के अनुसार यह अब फिल्म में विद्यमान अतिरिक्त ऊर्जा है । माना कि फिल्म की प्रति एकांक क्षेत्रफल पृष्ठ ऊर्जा S है और अतिरिक्त क्षेत्रफल $2dl$ है (चित्र 10.16) । किसी फिल्म के दो पार्श्व होते हैं जिनके बीच में द्रव होता है, अत: किसी फिल्म के दो पृष्ठ होते हैं इसलिए अतिरिक्त ऊर्जा होगी,

$$S(2dl)=Fd \qquad (10.23)$$

अथवा

$$F/2l=S \qquad (10.24)$$

राशि ($F/2l$) अथवा S पृष्ठ तनाव का परिमाण है । स्पष्टत: यह द्रव के अंतरापृष्ठ के प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा है, तथा यह द्रव एवं अन्य किसी वस्तु (वायु, ठोस तथा अन्य द्रव) के बीच के **अंतरापृष्ठ** का एक गुण है ।

उपरोक्त चर्चा के आधार पर हमें निम्नलिखित तथ्यों का पता चलता है :

(i) पृष्ठ तनाव द्रव तथा अन्य किसी पदार्थ के बीच के अंतरापृष्ठ के तल में प्रति एकांक लंबाई पर कार्यरत बल (अथवा प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा) है; यह द्रव के भीतर के अणुओं की तुलना में अंतरापृष्ठ के अणुओं की अतिरिक्त ऊर्जा है ।

(ii) पृष्ठ तनाव इस अंतरापृष्ठ को घेरने वाली किसी सीमा रेखा के लंबवत् भीतर की ओर अर्थात् द्रव की ओर कार्य करता है; इस प्रकार पृष्ठ तनाव अंतरापृष्ठ क्षेत्र को कम करने का प्रयास करता है ।

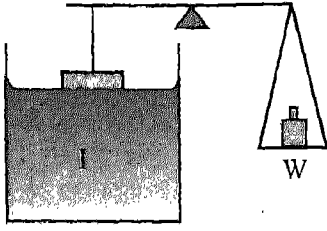
(iii) अंतरापृष्ठ की सीमा के अतिरिक्त उसके किसी भी बिंदु पर हम एक रेखा खींच सकते हैं तथा अंतरापृष्ठ के तल पर इस रेखा की प्रति एकांक लंबाई पर रेखा के लंबवत् परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत पृष्ठ तनाव बलों S की कल्पना कर सकते हैं । यह रेखा साम्यावस्था में है और अधिक सुस्पष्ट करने के लिए, पृष्ठ पर परमाणुओं अथवा अणुओं की एक रेखा की कल्पना कीजिए । इस रेखा के बाईं ओर के परमाणु इस परमाणुओं की रेखा को अपनी ओर खींचते हैं तथा जो इस रेखा के दाईं ओर हैं वह इसे अपनी ओर खींचते हैं । तनाव की स्थिति में यह परमाणुओं की रेखा साम्यावस्था में होती है ।

(iv) सारणी 10.4 में विभिन्न द्रवों के पृष्ठ तनाव दिए गए हैं । श्यानता की भांति पृष्ठ तनाव का मान भी ताप पर निर्भर करता है । किसी द्रव का पृष्ठ तनाव प्राय: ताप बढ़ने पर कम हो जाता है ।

यदि यह रेखा वास्तव में अंतरापृष्ठ की अंतिम सीमा दर्शाती है, जैसा कि चित्र 10.16(a) तथा (b) में दिखाया गया है, तब इस पर केवल S प्रति एकांक लंबाई बल भीतर की ओर कार्य करेगा ।

सारणी 10.4 दिए गए तापों पर कुछ द्रवों के पृष्ठ तनाव तथा वाष्पन ऊष्मा

द्रव	ताप [illegible]	पृष्ठ तनाव [illegible]	वा.ऊ. [illegible]
हीलियम	−270	0.000239	0.115
ऑक्सीजन	−183	0.0132	7.1
ऐथानॉल	20	0.0227	40.6
जल	20	0.0727	44.16
पारा (मरकरी)	20	0.4355	63.2

पृष्ठ तनाव का बल पूर्णत: वास्तविक है और इसे चित्र 10.17 में वर्णित उपकरण द्वारा सीधे ही माप सकते हैं । यह उपकरण वास्तव में चित्र 10.16 में दर्शाए गए उपकरण का ऊर्ध्वाधर स्वरूप ही है । एक चपटी ऊर्ध्वाधर कांच की प्लेट जिसके नीचे किसी द्रव से भरा एक पात्र रखा होता है, किसी तुला की एक भुजा की भांति कार्य करती है । प्लेट के निचले क्षैतिज किनारे को द्रव से थोड़ा ऊपर रखकर, तुला के दूसरी ओर बाट रखकर, संतुलित कर लेते हैं । द्रव से भरे पात्र को थोड़ा ऊपर उठाते हैं ताकि यह कांच की प्लेट के क्षैतिज किनारों को छूने भर लगे तथा पृष्ठ तनाव के कारण प्लेट को थोड़ा नीचे की ओर खींचे । अब दूसरी ओर फिर कुछ बाट रखते जाते हैं जब तक कि प्लेट द्रव से अलग न हो जाए ।

चित्र 10.17 पृष्ठ तनाव मापना ।

मान लीजिए आवश्यक अतिरिक्त भार W है । तब समीकरण (10.24) तथा वहां की गई चर्चा से द्रव-वायु अंतरापृष्ठ का पृष्ठ तनाव,

$$S_{la} = (W/2l) = (m g/2 l) \qquad (10.25)$$

यहां m अतिरिक्त बाट की संहति तथा l कांच की प्लेट के निचले किनारे की लंबाई है । पादाक्षर la इस तथ्य को स्पष्ट करता है कि यहां **द्रव-वायु** अंतरापृष्ठ तनाव सम्मिलित है ।

10.8.3 बूंद तथा बुलबुले

पृष्ठ तनाव का एक महत्त्व यह भी है कि यदि गुरुत्व बल के प्रभाव की उपेक्षा की जा सके तो द्रव की मुक्त बूंदें तथा बुलबुले गोलाकार होते हैं । आपने इस तथ्य को अवश्य देखा होगा विशेषकर स्पष्ट रूप से उच्च वेग वाले स्प्रे अथवा जेट से तुरंत बनने वाली छोटी बूंदों में, अथवा अपने बचपन के समय बनाए साबुन के बुलबुलों में । बूंदें तथा बुलबुले गोल ही क्यों होते हैं ? साबुन के बुलबुलों में स्थायित्व कैसे बना रहता है ?

जैसा कि हम बार-बार चर्चा कर रहे हैं कि किसी द्रव-वायु अंतरापृष्ठ को बनाने के लिए ऊर्जा चाहिए । अत: किसी दिए गए आयतन के लिए सर्वाधिक स्थायी पृष्ठ वही है जिसका पृष्ठ क्षेत्रफल सबसे कम हो । गोले में यह गुण होता है । हम इस तथ्य को यहां सत्यापित नहीं कर सकते, परंतु आप स्वयं यह जांच कर सकते हैं कि इस संदर्भ में गोला कम से कम एक घन की तुलना में बेहतर है । अत:, यदि गुरुत्व बल तथा अन्य बल (उदाहरणार्थ वायु-प्रतिरोध) निष्प्रभावी हों, तो द्रव की बूंदें गोल होती हैं ।

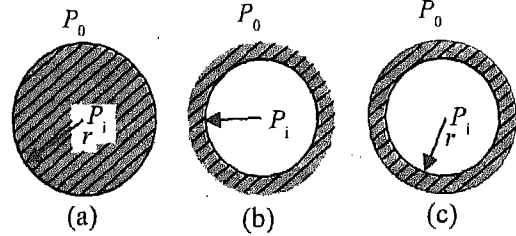
गोल बूंद का भी कुछ न कुछ पृष्ठ क्षेत्रफल अवश्य होता है । इस तथ्य का महत्त्व यह है कि बूंद के भीतर का दाब बूंद के बाहर के दाब से अधिक होता है । मान लीजिए r त्रिज्या की कोई गोल बूंद साम्यावस्था में है । यदि इस बूंद की त्रिज्या में Δr वृद्धि की जाए, तो बूंद में अतिरिक्त पृष्ठ ऊर्जा होगी,

$$[4\pi (r + \Delta r)^2 - 4\pi r^2] S_{la} = 8\pi r \Delta r S_{la} \qquad (10.26)$$

यदि बूंद साम्यावस्था में है तो खर्च की गई यह ऊर्जा बूंद के भीतर तथा बाहर के दाबांतर $(P_i - P_o)$ के प्रभाव में प्रसार के कारण बूंद द्वारा प्राप्त की गई ऊर्जा द्वारा संतुलित होती है । यहां किया गया कार्य है

$$W = (P_i - P_o) 4 \pi r^2 \Delta r \qquad (10.27)$$

अत:, $(P_i - P_o) = (2 S_{la}/r)$ (10.28)

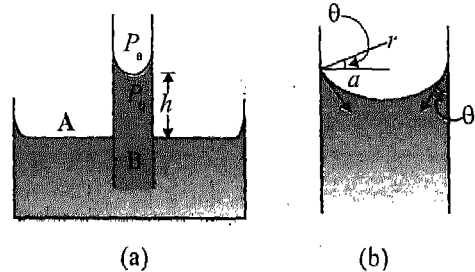
व्यापक रूप में, किसी द्रव-गैस अंतरापृष्ठ के लिए, उत्तल पार्श्व की ओर दाब का मान अवतल पार्श्व की ओर के दाब के मान से अधिक होता है । उदाहरण के लिए, यदि किसी द्रव के भीतर कोई वायु का बुलबुला है, तो यह वायु का बुलबुला अधिक दाब पर होगा [चित्र 10.18(b)] ।

चित्र 10.18 r त्रिज्या की बूंद, गुहिका तथा बुलबुला ।

किसी बुलबुले (चित्र 10.18) की बनावट किसी बूंद अथवा किसी गुहिका से भिन्न होती है । बुलबुले में दो अंतरापृष्ठ होते हैं । उपरोक्त तर्क के आधार किसी बुलबुले के लिए

$$(P_i - P_o) = (4 S_{la}/r) \qquad (10.29)$$

कदाचित् यही कारण है कि बचपन में आपको साबुन के बुलबुले बनाते समय यदि बहुत तेजी से नहीं तो कुछ न कुछ तेजी से अवश्य ही फूंकना पड़ा होगा । बुलबुले के भीतर कुछ अतिरिक्त दाब की आवश्यकता होती है ।

10.8.4 केशिकीय उन्नयन

किसी वक्रित द्रव-वायु अंतरापृष्ठ के दोनों ओर दाब में अंतर होने के परिणामस्वरूप एक सुप्रसिद्ध प्रभाव किसी पतली नली में गुरुत्व के विरुद्ध जल का ऊपर उठना (उन्नयन) है । लैटिन भाषा में शब्द Capilla का अर्थ है केश अर्थात् बाल । इसी शब्द से व्युत्पन्न हुआ एक अन्य शब्द Capillary tube जिसका अर्थ है केशनली अथवा केशिका । यदि कोई नली केश की भांति पतली हो तो उस नली में जल अत्यधिक ऊंचाई तक ऊपर उठेगा । इसी तथ्य को देखने के लिए किसी ऐसी वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट (त्रिज्या a) की ऊर्ध्वाधर केशनली पर विचार करते हैं जिसका एक सिरा जल से भरे किसी खुले बर्तन में डूबा है (चित्र 10.19) ।

चित्र 10.19 केशिकीय उन्नयन (a) जल से भरे खुले बर्तन में डूबी किसी पतली नली का संक्षिप्त आरेख । (b) अंतरापृष्ठ के निकट का आवर्धित आरेख ।

जो कुछ हमने ऊपर [समीकरण (10.27)] तथा चित्र 10.18(b) में कहा है, उससे

$$(P_i - P_o) = (2S/r) = 2S/(a \sec\theta)$$
$$= (2S/a)\cos\theta \qquad (10.30)$$

इस प्रकार, नली के भीतर नवचंद्रक (वायु-जल अंतरापृष्ठ) पर जल का दाब वायुमण्डलीय दाब से कम है । चित्र 10.19(a) में दो बिंदुओं A तथा B पर विचार कीजिए । इन दोनों पर समान दाब होना चाहिए, अर्थात्

$$P_o + h\rho g = P_i = P_A \qquad (10.31)$$

यहां ρ जल का घनत्व है तथा h को केशिकीय उन्नयन कहते हैं [चित्र 10.19(a)] । समीकरण (10.30) तथा (10.31) का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$h\rho g = (P_i - P_o) = (2S\cos\theta/a) \qquad (10.32)$$

यहां की गई इस विवेचना, तथा समीकरणों (10.30) तथा (10.31) से यह स्पष्ट हो जाता है कि केशिकीय उन्नयन का कारण पृष्ठ तनाव ही है । यदि केशनली की त्रिज्या a कम है तो केशिकीय उन्नयन h अधिक होता है । अत्यधिक पतली केशनलियों के लिए केशिकीय उन्नयन का प्ररूपी मान कुछ सेंटीमीटर की कोटि का होता है । उदाहरणार्थ, यदि $a = 0.05$ cm, तो सारणी 10.4 से जल के लिए पृष्ठ तनाव का मान लेने पर हम यह पाते हैं कि

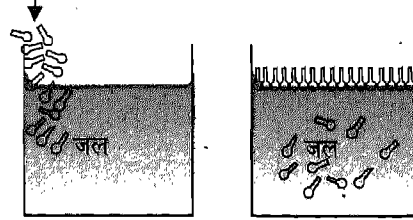
$$h = 2S/(\rho g a)$$
$$= 2\times(0.073)\,(\text{N/m})/\{(10^3\,\text{kg/m}^3)(9.8\,\text{m/s}^2)(5\times10^{-4}\,\text{m})\}$$
$$= 2.98\times10^{-2}\,\text{m} = 2.98\,\text{cm}$$

ध्यान दीजिए, यदि द्रव-नव चंद्रक (मेनिस्कस) उत्तल है, जैसा कि पारे में होता है, अर्थात् यदि $\cos\theta$ ऋणात्मक है, तो समीकरण (10.32) से यह स्पष्ट है कि केशनली में द्रव का तल नीचे गिर जाता है अर्थात् केशिकीय अपनयन होता है ।

10.8.5 अपमार्जक तथा पृष्ठ तनाव

हम अपने ग्रीज़ तथा तेल के दाग-धब्बे लगे गंदे सूती अथवा रेशों से बने कपड़ों को जल में अपमार्जक अथवा साबुन घोलकर, इसमें कपड़ों को डुबोकर तथा हिलाकर साफ करते हैं। इस प्रक्रिया को भली भांति समझने के लिए आइए अपमार्जक की कार्यप्रणाली पर विचार करते हैं ।

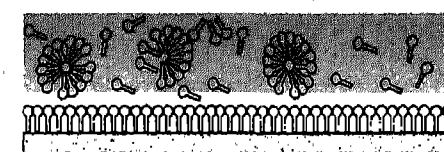
जल से धोने पर ग्रीज़ अथवा तेल के दाग दूर नहीं होते । इसका कारण यह है कि जल ग्रीज़ लगी धूल को गीला नहीं करता; अर्थात् इन दोनों के बीच संपर्क पृष्ठ का क्षेत्रफल बहुत कम होता है । यदि जल ग्रीज़ को गीला कर सकता होता, तो जल का प्रवाह ग्रीज़ को कुछ हटा सकता था । कुछ इसी प्रकार की चीज़ अपमार्जक द्वारा प्राप्त की जा सकती है । अपमार्जकों के अणु 'हेयरपिन' की आकृति के होते हैं, जिनका एक सिरा जल से आकर्षित रहता है तथा दूसरा सिरा ग्रीज़, तेल अथवा मोम से, और इस प्रकार ये अणु जल-तेल अंतरापृष्ठ बनाने का प्रयास करते हैं । इसके परिणाम को चित्र 10.20 में चित्रों के क्रम के रूप में दर्शाया गया है ।

अपनी भाषा में, इसे हम इस प्रकार कहेंगे कि अपमार्जक, जिसके अणु एक सिरे पर जल को तथा दूसरे सिरे पर मान लीजिए तेल को आकर्षित करते हैं, मिलाने पर पृष्ठ तनाव (जल-तेल अंतरापृष्ठ) S अत्यधिक कम हो जाता है । इस

साबुन-अणु जिसका शीर्ष जल से आकर्षित है ।

कठौती के साथ ग्रीज़ लगे धूल के कण।

जल डाला जाता है : गंदगी नहीं हटती ।

अपमार्जक मिलाया जाता है, इससे इसके अणुओं के निष्क्रिय मोमी सिरे, जहां जल तथा गंदगी दोनों मिलते हैं उस सीमा की ओर आकर्षित हो जाते हैं।

निष्क्रिय सिरे धूल (गंदगी) को घेर लेते हैं और कठौती की गंदगी को अब बहते जल द्वारा हटाया जा सकता है ।

अपमार्जक अणुओं से घिरी गंदगी निलंबित रहती है ।

चित्र 10.20 अपमार्जक की कार्य प्रणाली - 'अपमार्जक अणु क्या करते हैं' के पदों में।

प्रकार के अंतरापृष्ठ बनाना ऊर्जा की दृष्टि से भी अनुकूल हो सकता है जिनमें अपमार्जक से घिरे गंदगी के गोले फिर जल से घिरे हों। पृष्ठ क्रियाशील अपमार्जकों अथवा पृष्ठ सक्रियकों के उपयोग द्वारा इस प्रकार की प्रक्रिया न केवल सफाई के लिए वरन् तेल तथा खनिज अयस्कों की प्रतिप्राप्ति में भी महत्वपूर्ण होती है।

▶ ***उदाहरण 10.11*** 2.0 mm व्यास की किसी केशनली का निचला सिरा बीकर में भरे जल के पृष्ठ से 8.0 cm नीचे तक डुबोया गया है। नली के जल में डूबे सिरे पर अर्धगोलीय बुलबुला फुलाने के लिए नली के भीतर आवश्यक दाब ज्ञात कीजिए। प्रयोग के ताप पर जल का पृष्ठ तनाव 7.30×10^{-2} N m^{-1} है। जल का घनत्व = 1000 kg m^{-3}, 1 वायुमण्डलीय दाब = 1.01×10^5 Pa तथा $g = 9.80$ m s^{-2}। दाब आधिक्य भी परिकलित कीजिए।

हल किसी द्रव के भीतर गैस के बुलबुले के अंदर दाब आधिक्य $= 2S/r$, यहां S द्रव-गैस अंतरापृष्ठ का पृष्ठतनाव तथा r बुलबुले की त्रिज्या है। यहां ध्यान दीजिए, इस प्रश्न में केवल एक ही द्रव पृष्ठ है। [किसी गैस में द्रव की बूंद के लिए दो द्रव अंतरापृष्ठ होते हैं, अतः उस प्रकरण में दाब आधिक्य के लिए सूत्र, दाब आधिक्य $= \frac{4S}{r}$ लागू होता है]। अब, बुलबुले के बाहर दाब = वायुमंडलीय दाब + 8 cm जल स्तंभ का दाब अर्थात्

$$P_o = (1.01 \times 10^5 + 0.08 \times 1000 \times 9.80)\ \text{Pa}$$
$$= 1.01784 \times 10^5\ \text{Pa}$$

अतः बुलबुले के भीतर दाब

$$P_i = P_o + 2S/r$$
$$= 1.01784 \times 10^5 + (2 \times 7.3 \times 10^{-2}/10^{-3})\ \text{Pa}$$
$$= (1.01784 + 0.00146) \times 10^5\ \text{Pa}$$
$$= 1.02 \times 10^5\ \text{Pa}$$

क्योंकि बुलबुला अर्ध-गोलीय है, अतः यहां केशनली की त्रिज्या को ही बुलबुले की त्रिज्या माना गया है। उत्तर का निकटन तीन सार्थक अंकों तक किया गया है। बुलबुले के भीतर दाब आधिक्य 146 Pa है। ◀

सारांश

1. कोई तरल एक ऐसा पदार्थ होता है जो अनिश्चित समय तक किसी स्थिर अवरूपण प्रतिबल को सहन नहीं कर सकता। यह अंततः जिस पात्र में भरा होता है उसी की आकृति ग्रहण कर लेता है। 'तरल' पद का उपयोग द्रवों तथा गैसों दोनों के लिए किया जाता है।
2. द्रव असंपीड्य होता है तथा उसका अपना स्वतंत्र पृष्ठ होता है। गैस संपीड्य होती है, उत्तरोत्तर दाब घटाने पर यह फैलकर समस्त उपलब्ध आयतन (स्थान) को भर देती है।
3. यदि किसी तरल द्वारा किसी क्षेत्रफल A पर आरोपित अभिलंबवत् बल F है, तो **औसत दाब** P_{av} को बल तथा क्षेत्रफल के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है

$$P_{av} = \frac{F}{A}$$

4. दाब का मात्रक पास्कल (Pa या pascal) है। यह N m^{-2} के समान है। दाब के अन्य सामान्य मात्रक इस प्रकार हैं

1 वायुमंडलीय दाब (1 atm)	=	1.01×10^5 Pa
1 bar	=	10^5 Pa
1 torr	=	133 Pa = 0.133 k Pa
1 mm (Hg)	=	1 टोर = 133 Pa

5. किसी तरल के भीतर दाब गहराई h के साथ इस व्यंजक के अनुसार परिवर्तित होता है
$P = P_a + \rho g h$
यहां ρ तरल का घनत्व है जिसे एकसमान माना गया है।
6. **पास्कल के नियम** के अनुसार किसी परिबद्ध तरल पर आरोपित दाब में कोई परिवर्तन उस तरल के सभी बिंदुओं तथा जिस पात्र में तरल भरा है उसकी दीवारों पर बिना घटे संचरित हो जाता है।
7. **आर्किमिडीज के सिद्धांत** के अनुसार उत्प्लावन बल परिमाण में पिण्ड द्वारा विस्थापित तरल के भार के बराबर होता है। किसी ρ_f घनत्व के तरल में डूबे V_s आयतन तथा ρ_s घनत्व के पिण्ड पर तरल द्वारा आरोपित उत्प्लावन बल का परिमाण F_b इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$F_b = \rho_f\, g\, V_s$$

यदि पिण्ड आंशिक रूप से डूबा है तथा डूबे भाग का आयतन V_p है, तब $\frac{\rho_s}{\rho_f} = \frac{V_p}{V_s}$

8. तरल की गतिकी को यह मानकर समझा जा सकता है कि वह तरल आदर्श है । आदर्श तरल श्यानताहीन, असंपीड्य तथा इसका प्रवाह स्थायी (प्रक्षुब्ध नहीं) तथा अघूर्णी होता है । बिंदु (9) तथा (10) किसी आदर्श तरल पर लागू होते हैं।
9. **सांतत्य समीकरण** के अनुसार किन्हीं दो बिंदुओं P तथा R पर अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल A तथा इसके अभिलंबवत् वेग (v) का गुणनफल अचर रहता है ।

$$v_P A_P = v_R A_R = \text{स्थिरांक}$$

10. **बर्नूली सिद्धांत** के अनुसार जब हम किसी धारारेखा के अनुदिश गमन करते हैं, तो दाब P, प्रति एकांक आयतन गतिज ऊर्जा ($\rho v^2/2$) तथा प्रति एकांक आयतन स्थितिज ऊर्जा ($\rho g y$) का योग का अचर रहता है ।

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{स्थिरांक}$$

11. किसी तरल का **श्यानता-गुणांक** अवरूपण प्रतिबल तथा अवरूपण विकृति की समय-दर के अनुपात की माप होता है ।

$$\eta = \frac{F/A}{v/l} = \frac{Fl}{vA}$$

यहां प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं जो पाठ्य समाग्री में दिए गए हैं ।

12. स्टोक के नियम के अनुसार η श्यानता के किसी तरल में v वेग से गतिमान a त्रिज्या के गोले पर तरल द्वारा आरोपित श्यानकर्षण बल **F** इस प्रकार निरूपित किया जाता है : $\mathbf{F} = -6\pi\eta a \mathbf{v}$
13. किसी तरल के प्रक्षुब्ध प्रवाह का आरंभ एक विमाहीन प्राचल द्वारा, जिसे **रेनॉल्ड अंक** (R_e) कहते हैं, निर्धारित किया जाता है :

$$R_e = \frac{\rho v d}{\eta}$$

यहां d तरल प्रवाह से संबद्ध कोई प्ररूपी लंबाई है तथा अन्य प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।

14. किसी द्रव का पृष्ठ तनाव प्रति एकांक लंबाई पर आरोपित बल (अथवा प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा) होता है जो द्रव तथा सीमान्त पृष्ठ के बीच अंतरापृष्ठ के तल में कार्य करता है । यह वह अतिरिक्त ऊर्जा है जो अभ्यंतर (आंतरिक) के अणुओं की अपेक्षा अंतरापृष्ठ के अणुओं में अधिक होती है ।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएं	मात्रक	टिप्पणी
दाब	P	$[M L^{-1} T^{-2}]$	पास्कल (Pa)	$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5$ Pa
घनत्व	ρ	$[M L^{-3}]$	kg m^{-3}	अदिश राशि
विशिष्ट घनत्व या आपेक्षिक घनत्व	–	–	–	$\rho_{पदार्थ}/\rho_{जल}$, अदिश राशि
श्यानता गुणांक	η	$[M L^{-1} T^{-1}]$	Pa s ; प्वाजय (Pl)	अदिश राशि
रेनॉल्ड अंक	R_e	–	–	$R_e = \frac{\rho v d}{\eta}$, अदिश राशि
पृष्ठ तनाव	S	$[M T^{-2}]$	N m^{-1}	अदिश

विचारणीय विषय

1. दाब एक **अदिश राशि** है । दाब की परिभाषा "प्रति एकांक क्षेत्र पर आरोपित बल" से हमारे मन में ऐसी धारणा बनती है कि दाब सदिश राशि है जो कि वास्तव में असत्य है । परिभाषा के अंश में जिस 'बल' का प्रयोग किया गया है वह वास्तव में *बल* का वह **घटक** है जो पृष्ठ के **क्षेत्रफल** पर **अभिलंबवत्** आरोपित होता है । तरलों का वर्णन करते समय कण तथा दृढ़ पिंड यांत्रिकी से संकल्पनात्मक बदलाव की आवश्यकता होती है । यहां हमारी रुचि द्रव्य के उन गुणधर्मों

में हैं जो एक बिंदु से दूसरे बिंदु में परिवर्तित हो जाते हैं न कि द्रव्य के किसी विशिष्ट अंश से संबद्ध गुणधर्मों में । ठोसों में जो भूमिका बल की है उसे तरलों में दाब द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है । इसी प्रकार, ठोसों में संहति की भूमिका को तरलों में घनत्व द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है ।

2. हमें यह कदापि नहीं सोचना चाहिए कि तरल केवल ठोसों, जैसे किसी पात्र की दीवारें अथवा तरल में डूबा ठोस पदार्थ, पर ही दाब डालते हैं । वास्तव में तरल में हर बिंदु पर दाब होता है । तरल का कोई अवयव [जैसा कि चित्र 10.2(a) में दर्शाया गया है] उसके विभिन्न फलकों पर समान दाब आरोपित होने के कारण साम्यावस्था में होता है ।
3. दाब के लिए व्यंजक
$$P = P_a + \rho g h$$
तभी सत्य होता है, जब तरल असंपीड्य हो । व्यावहारिक रूप से कहें तो यह द्रवों पर, जो अधिकतर असंपीड्य हैं, लागू होता है और इसीलिए ऊंचाई के साथ ρ एक अचर होता है ।
4. गेज दाब (या प्रमापी दाब) वास्तविक दाब तथा वायुमंडलीय दाब का अंतर होता है
$$P - P_a = P_g$$
बहुत-सी दाब मापक युक्तियां गेज दाब ही मापती हैं । इनमें टायरों के दाब गेज तथा रक्त चाप गेज (स्फिग्मोमैनोमीटर) सम्मिलित हैं ।
5. किसी तरल में तैरते किसी पिण्ड के भार को, उस पर तरल द्वारा आरोपित, ऊर्ध्वमुखी उत्प्लावन बल संतुलित करता है। यदि पिण्ड का संहति घनत्व एकसमान नहीं है, तो इन दोनों बलों (पिण्ड का भार तथा पिण्ड पर आरोपित उत्प्लावन बल) के अनुप्रयुक्त बिंदु समान होना आवश्यक नहीं है । पिण्ड का भार उसके गुरुत्व केंद्र पर कार्य करता है जबकि उत्प्लावन बल पिण्ड द्वारा प्रतिस्थापित तरल-आयतन के गुरुत्व केंद्र पर कार्य करता है ।
6. धारा रेखा किसी तरल प्रवाह का मानचित्र होती है । स्थायी प्रवाह में दो धारा रेखाएं एक दूसरे को नहीं काटतीं । यदि ऐसा होता, तो जिस बिंदु पर दो धारा रेखाएं एक दूसरे को काटतीं वहां तरल-कण के दो संभव वेग होते ।
7. जिन तरलों में श्यान कर्षण होता है उन पर बर्नूली-सिद्धांत लागू नहीं होता । इस प्रकरण में इस क्षयकारी श्यान बल द्वारा किया गया कार्य भी गणना में लिया जाना चाहिए तथा P_2 (चित्र 10.9) का मान समीकरण (10.11) में दिए गए मान से कम होगा ।
8. ताप बढ़ने पर द्रव के परमाणु और अधिक गतिशील हो जाते हैं तथा श्यानता गुणांक η का मान घट जाता है । किसी गैस में ताप बढ़ने पर उसके परमाणुओं की यादृच्छिक गति बढ़ जाती है और η भी बढ़ जाता है ।
9. किसी प्रक्षोभ के आरंभ के लिए क्रांतिक रेनॉल्ड अंक सदैव ही 2000 के आस पास नहीं होता । इसका परिसर कहीं भी 1000 से 10000 के बीच हो सकता है, जो प्रवाह की ज्यामिति पर निर्भर करता है । अधिकांश प्रकरणों में $R_e < 1000$ स्तरीय प्रभाव को, तथा $1000 < R_e < 2000$ अस्थाई प्रवाह को व्यक्त करता है, तथा $R_e > 2000$ प्रक्षुब्ध प्रवाह को परिलक्षित करता है ।
10. पृष्ठ तनाव दो पदार्थों, जिनमें से एक का तरल होना आवश्यक है, को पृथक् करने वाले अंतरापृष्ठ का संयुक्त गुण होता है। यह किसी अकेले तरल का अपना निजी गुण नहीं है ।

अभ्यास

10.1 स्पष्ट कीजिए ऐसा क्यों होता है :

(i) हीलियम से भरा कोई गुब्बारा अनिश्चित रूप से वायु में ऊपर नहीं उठता जाता, वरन् एक निश्चित ऊंचाई पर जाकर रुक जाता है (वायु के प्रवाह को नगण्य मानिए) ।

(ii) किसी व्यक्ति को अपने पानी में डूबे अंगों को ऊपर उठाने (गति कराने) के लिए, वायु में गति कराने की अपेक्षा, कम बल लगाने की आवश्यकता होती है।

(iii) मस्तिष्क की अपेक्षा मानव का पैरों पर रक्त दाब (रक्त चाप) से अधिक होता है।

(iv) 6 km ऊंचाई पर वायुमंडलीय दाब समुद्र तल पर वायुमंडलीय दाब का लगभग आधा हो जाता है, यद्यपि वायुमंडल का विस्तार 100 km से भी अधिक ऊंचाई तक है।

(v) यद्यपि बल एक सदिश राशि है तथा दाब प्रति एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला बल होता है, तथापि द्रव स्थैतिक दाब एक अदिश राशि है।

10.2 ऐसा क्यों है, स्पष्ट कीजिए :

(i) पारे का कांच के साथ स्पर्श कोण अधिक-कोण होता है जब जल का कांच के साथ स्पर्श कोण न्यून-कोण है।

(ii) कांच के स्वच्छ समतल पृष्ठ पर जल फैलने का प्रयत्न करता है जबकि पारा उसी पृष्ठ पर बूंदें बनाने का प्रयास करता है। (दूसरे शब्दों में, जल कांच को गीला कर देता है जबकि पारा ऐसा नहीं करता।)

(iii) किसी द्रव का पृष्ठ तनाव पृष्ठ के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता।

(iv) अपमार्जकों के स्पर्श कोणों का मान कम होना चाहिए।

(v) यदि किसी भी बाह्य बल का प्रभाव न हो, तो द्रव-बूंद की आकृति सदैव गोल होती है।

10.3 प्रत्येक प्रकथन के साथ संलग्न सूची में से शब्द छांटकर उस प्रकथन के रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए :

(i) व्यापक रूप में द्रवों का पृष्ठ तनाव ताप बढ़ने पर .... है। (बढ़ता/घटता)

(ii) गैसों की श्यानता ताप बढ़ने पर .... है, जबकि द्रवों की श्यानता ताप बढ़ने पर .... है। (बढ़ती/घटती)

(iii) दृढ़ता प्रत्यास्थता गुणांक वाले ठोसों के लिए अवरूपण प्रतिबल .... के अनुक्रमानुपाती होता है, जबकि द्रवों के लिए यह .... के अनुक्रमानुपाती होता है। (अवरूपण विकृति/अवरूपण विकृति की दर)

(iv) किसी तरल के स्थायी प्रवाह में किसी संकीर्णन पर प्रवाह की चाल में वृद्धि में .... का अनुसरण होता है, जबकि उस स्थान पर दाब घटने में .... का अनुसरण होता है। (संहति का संरक्षण/बर्नूली सिद्धांत)

(v) किसी वायु-सुरंग में किसी वायुयान के मॉडल में प्रक्षोभ की चाल वास्तविक वायुयान के प्रक्षोभ के लिए क्रांतिक चाल की तुलना में .... होती है। (अधिक/कम)

10.4 निम्नलिखित के कारण स्पष्ट कीजिए :

(i) किसी कागज की पट्टी को क्षैतिज रखने के लिए आपको उस कागज पर ऊपर की ओर हवा फूंकनी चाहिए, नीचे की ओर नहीं।

(ii) जब हम किसी जल-टोंटी को अपनी अंगुलियों द्वारा बंद करने का प्रयास करते हैं, तो अंगुलियों के बीच की खाली जगह से तीव्र जल धाराएं फूट निकलती हैं।

(iii) इंजेक्शन लगाते समय डॉक्टर के अंगूठे द्वारा आरोपित दाब की अपेक्षा सुई का आकार दवाई की बहि:प्रवाही धारा को अधिक अच्छा नियंत्रित करता है।

(iv) किसी पात्र के बारीक छिद्र से निकलने वाला तरल उस पात्र पर पीछे की ओर प्रणोद आरोपित करता है।

(v) कोई प्रचक्रमान क्रिकेट की गेंद वायु में अपने परवलीय प्रक्षेप पथ से विचलित हो जाती है।

10.5 ऊंची एड़ी के जूते पहने 50 kg संहति की कोई बालिका अपने शरीर को 1.0 cm व्यास की एक ही वृत्ताकार एड़ी पर संतुलित किए हुए है। क्षैतिज फर्श पर एड़ी द्वारा आरोपित दाब ज्ञात कीजिए।

10.6 टॉरिसिली के वायुदाब मापी में पारे का उपयोग किया गया। पास्कल ने ऐसा ही वायुदाब मापी 984 $kg\,m^{-3}$ घनत्व की फ्रेंच शराब का उपयोग करके बनाया। सामान्य वायुमंडलीय-दाब के लिए शराब-स्तंभ की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

10.7 समुद्र तट से दूर कोई ऊर्ध्वाधर संरचना 10^9 Pa के प्रतिबल को सहन करने के लिए बनाई गई है। क्या यह संरचना किसी महासागर के भीतर किसी तेल कूप के शिखर पर रखे जाने के लिए उपयुक्त है ? महासागर की गहराई लगभग 3 km है। समुद्री धाराओं की उपेक्षा कीजिए।

10.8 किसी द्रवचालित आटोमोबाइल लिफ्ट की संरचना अधिकतम 3000 kg संहति की कारों को उठाने के लिए की गई है। बोझ को उठाने वाले पिस्टन की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 425 cm^2 है। छोटे पिस्टन को कितना अधिकतम दाब सहन करना होगा ?

10.9 किसी U-नली की दोनों भुजाओं में भरे जल तथा मेथेलेटिड स्पिरिट को पारा एक दूसरे से पृथक् करता है। जब जल तथा पारे के स्तंभ क्रमशः 10 cm तथा 12.5 cm ऊंचे हैं, तो दोनों भुजाओं में पारे का स्तर समान है। स्पिरिट का आपेक्षिक घनत्व ज्ञात कीजिए।

10.10 यदि प्रश्न 10.9 की समस्या में, U नली की दोनों भुजाओं में इन्हीं दोनों द्रवों को और उड़ेल कर दोनों द्रवों के स्तंभों की ऊंचाई 15 cm और बढ़ा दी जाएं, तो दोनों भुजाओं में पारे के स्तरों में क्या अंतर होगा। (पारे का आपेक्षिक घनत्व = 13.6)।

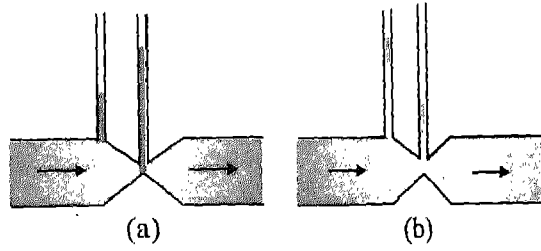
10.11 क्या बर्नूली समीकरण का उपयोग किसी नदी में खड़ी चट्टान के ऊपर से होने वाले जल-प्रवाह के वर्णन के लिए किया जा सकता है ? स्पष्ट कीजिए।

10.12 बर्नूली समीकरण के अनुप्रयोग में यदि निरपेक्ष दाब के स्थान पर प्रमापी दाब (गेज दाब) का प्रयोग करें तो क्या इससे कोई अंतर पड़ेगा ? स्पष्ट कीजिए।

10.13 किसी 1.5 m लम्बी 1.0 cm त्रिज्या की क्षैतिज नली से ग्लिसरीन का स्थायी प्रवाह हो रहा है। यदि नली के एक सिरे पर प्रति सेकंड एकत्र होने वाली ग्लिसरीन का परिमाण $4.0 \times 10^{-3}\,kg\,s^{-1}$ है, तो नली के दोनों सिरों के बीच दाबान्तर ज्ञात कीजिए। (ग्लिसरीन का घनत्व = $1.3 \times 10^3\,kg\,m^{-3}$ तथा ग्लिसरीन की श्यानता = 0.83 Pa s)

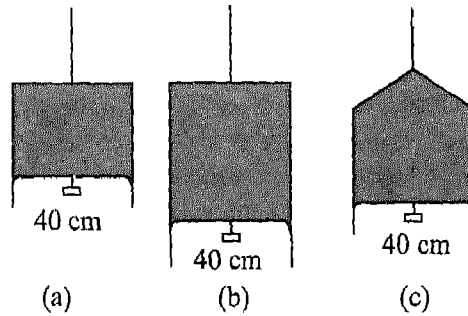
[आप यह भी जांच करना चाहेंगे कि क्या इस नली में स्तरीय प्रवाह की परिकल्पना सही है।]

10.14 किसी आदर्श वायुयान के परीक्षण प्रयोग में वायु-सुरंग के भीतर पंखों के ऊपर और नीचे के पृष्ठों पर वायु-प्रवाह की गतियां क्रमशः 70 $m\,s^{-1}$ तथा 63 $m\,s^{-1}$ हैं। यदि पंख का क्षेत्रफल 2.5 m^2 है, तो उस पर आरोपित उत्थापक बल परिकलित कीजिए। वायु का घनत्व 1.3 $kg\,m^{-3}$ लीजिए।

10.15 चित्र 10.21(a) तथा (b) में किसी द्रव (श्यानताहीन) के स्थायी प्रवाह का उल्लेख करते हैं। इन दोनों चित्रों में से कौन सही नहीं है ? कारण स्पष्ट कीजिए।

चित्र 10.21

10.16 किसी स्प्रे पंप की बेलनाकार नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $8.0\ cm^2$ है। इस नली के एक सिरे पर 1.0 mm व्यास के 40 सूक्ष्म छिद्र हैं। यदि इस नली के भीतर द्रव के प्रवाहित होने की दर $1.5\ m\ min^{-1}$ है, तो छिद्रों से होकर जाने वाले द्रव की निष्कासन-चाल ज्ञात कीजिए।

10.17 U-आकार के किसी तार को साबुन के विलयन में डुबो कर बाहर निकाला गया जिससे उस पर एक पतली साबुन की झिल्ली बन गई। इस तार के दूसरे सिरे पर झिल्ली के संपर्क में एक फिसलने वाला हल्का तार लगा है जो 1.5×10^{-2} N भार (जिसमें इसका अपना भार भी सम्मिलित है) को संभालता है। फिसलने वाले तार की लंबाई 30 cm है। साबुन की झिल्ली का पृष्ठ तनाव कितना है?

10.18 निम्नांकित चित्र 10.22(a) किसी पतली द्रव-झिल्ली को 4.5×10^{-2} N का छोटा भार संभाले दर्शाया गया है। चित्र (b) तथा (c) में बनी इसी द्रव की झिल्लियां इसी ताप पर कितना भार संभाल सकती हैं? अपने उत्तर को प्राकृतिक नियमों के अनुसार स्पष्ट कीजिए।

चित्र 10.22

10.19 3.00 mm त्रिज्या की किसी पारे की बूंद के भीतर कमरे के ताप पर दाब क्या है? 20 °C ताप पर पारे का पृष्ठ तनाव $4.65 \times 10^{-1}\ N\ m^{-1}$ है। यदि वायुमंडलीय दाब 1.01×10^5 Pa है, तो पारे की बूंद के भीतर दाब-अधिक्य भी ज्ञात कीजिए।

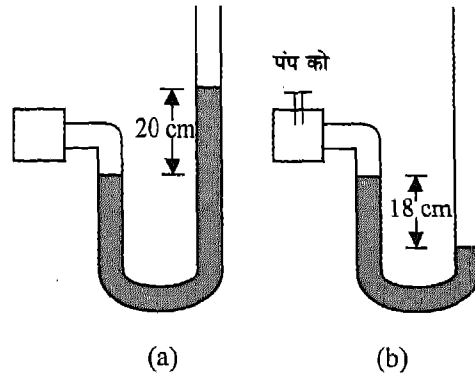
10.20 5.00 mm त्रिज्या के किसी साबुन के विलयन के बुलबुले के भीतर दाब-आधिक्य क्या है। 20 °C ताप पर साबुन के विलयन का पृष्ठ तनाव $2.50 \times 10^{-2}\ N\ m^{-1}$ है। यदि इसी विमा का कोई वायु का बुलबुला 1.20 आपेक्षिक घनत्व के साबुन के विलयन से भरे किसी पात्र में 40.0 cm गहराई पर बनता, तो इस बुलबुले के भीतर क्या दाब होता, ज्ञात कीजिए। (1 वायुमंडलीय दाब = 1.01×10^5 Pa)।

अतिरिक्त प्रश्न

10.21 $1.0\ m^2$ क्षेत्रफल के वर्गाकार आधार वाले किसी टैंक को बीच में ऊर्ध्वाधर विभाजक दीवार द्वारा दो भागों में बांटा गया है। विभाजक दीवार में नीचे $20\ cm^2$ क्षेत्रफल का कब्जेदार दरवाजा है। टैंक का एक भाग जल से भरा है तथा दूसरा भाग 1.7 आपेक्षिक घनत्व के अम्ल से भरा है। दोनों भाग 4.0 m ऊंचाई तक भरे गए हैं। दरवाजे को बंद रखने के आवश्यक बल परिकलित कीजिए।

10.22 चित्र 10.23(a) में दर्शाए अनुसार कोई मैनोमीटर किसी बर्तन में भरी गैस के दाब का पाठ्यांक लेता है। पंप द्वारा कुछ गैस बाहर निकालने के पश्चात् मैनोमीटर चित्र 10.23(b) में दर्शाए अनुसार पाठ्यांक लेता है। मैनोमीटर में पारा भरा है तथा वायुमंडलीय दाब का मान 76 cm (Hg) है।

(i) प्रकरणों (a) तथा (b) में बर्तन में भरी गैस के निरपेक्ष दाब तथा प्रमापी दाब cm (Hg) के मात्रक में लिखिए।

(ii) यदि मैनोमीटर की दाहिनी भुजा में 13.6 cm ऊंचाई तक जल (पारे के साथ अभिमिश्रणीय) उड़ेल दिया जाए तो प्रकरण (b) में स्तर में क्या परिवर्तन होगा ? (गैस के आयतन में हुए थोड़े परिवर्तन की उपेक्षा कीजिए ।)

चित्र 10.23

10.23 कमानीदार तुला पर जल से भरी बाल्टी लटकाने पर कमानीदार तुला का पाठ्यांक 10 kg है। कमानीदार तुला का पाठ्यांक तब क्या होगा जब–

(i) 1.5 kg संहति का बर्फ का घन बाल्टी में रखा जाएगा ?

(ii) किसी अन्य डोरी से निलंबित 7.8 kg संहति के लोहे के टुकड़े का आधा भाग बाल्टी में भरे जल में डुबोया जाएगा ? (लोहे का आपेक्षिक घनत्व = 7.8)

10.24 दो पात्रों के आधारों के क्षेत्रफल समान हैं परंतु आकृतियां भिन्न-भिन्न हैं। पहले पात्र में दूसरे पात्र की अपेक्षा किसी ऊंचाई तक भरने पर दो गुना जल आता है। क्या दोनों प्रकरणों में पात्रों के आधारों पर आरोपित बल समान हैं। यदि ऐसा है तो भार मापने की मशीन पर रखे एक ही ऊंचाई तक जल से भरे दोनों पात्रों के पाठ्यांक भिन्न-भिन्न क्यों होते हैं ?

10.25 रक्त-आधान के समय किसी शिरा में, जहां दाब 2000 Pa है, एक सुई धँसाई जाती है । रक्त के पात्र को किस ऊंचाई पर रखा जाना चाहिए ताकि शिरा में रक्त ठीक-ठीक प्रवेश कर सके । (संपूर्ण रक्त का घनत्व सारणी 10.1 में दिया गया है।)

10.26 बर्नूली समीकरण व्युत्पन्न करने में हमने नली में भरे तरल पर किए गए कार्य को तरल की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं में परिवर्तन के बराबर माना था । (a) यदि क्षयकारी बल उपस्थित है, तब नली के अनुदिश तरल में गति करने पर दाब में परिवर्तन किस प्रकार होता है ? (b) क्या तरल का वेग बढ़ने पर क्षयकारी बल अधिक महत्त्वपूर्ण हो जाते हैं ? गुणात्मक रूप में चर्चा कीजिए ।

10.27 यदि किसी धमनी में रक्त का प्रवाह स्तरीय ही बनाए रखना है तो 2×10^{-3} m त्रिज्या की किसी धमनी में रक्त-प्रवाह की अधिकतम चाल क्या होनी चाहिए ? (b) तदनुरूपी प्रवाह-दर क्या है ? (रक्त की श्यानता 2.084×10^{-3} Pa s लीजिए) ।

10.28 कोई वायुयान किसी निश्चित ऊंचाई पर किसी नियत चाल से आकाश में उड़ रहा है । तथा इसके दोनों पंखों में प्रत्येक का क्षेत्रफल 25 m^2 है । यदि वायु की चाल पंख के निचले पृष्ठ पर 180 km h^{-1} तथा ऊपरी पृष्ठ पर 234 km h^{-1} है, तो वायुयान की संहति ज्ञात कीजिए। (वायु का घनत्व 1 kg m^{-3} लीजिए ।)

10.29 मिलिकन तेल बूंद प्रयोग में, 2.0×10^{-5} m त्रिज्या तथा 1.2×10^3 kg m^{-3} घनत्व की किसी बूंद की सीमांत (अंतिम) चाल क्या है। प्रयोग के ताप पर वायु की श्यानता 1.8×10^{-5} Pa s लीजिए । इस चाल पर बूंद पर श्यान बल कितना है ? वायु के कारण बूंद पर उत्प्लावन बल की उपेक्षा कीजिए ।

10.30 सोडा कांच के साथ पारे का स्पर्श कोण 140° है । यदि पारे से भरी द्रोणिका में 1.00 mm त्रिज्या की कांच की किसी नली का एक सिरा डुबोया जाता है, तो पारे के बाहरी पृष्ठ के स्तर की तुलना में नली के भीतर पारे का स्तर कितना नीचे चला जाता है ? (पारे का घनत्व = 13.6×10^3 kg m^{-3})

10.31 3.0 mm तथा 6.0 mm व्यास की दो संकीर्ण नलियों को एक साथ जोड़कर दोनों सिरों से खुली एक U-आकार की नली बनाई जाती है । यदि इस नली में जल भरा है, तो इस नली की दोनों भुजाओं में भरे जल के स्तरों में क्या अंतर है । प्रयोग के ताप पर जल का पृष्ठ तनाव 7.3×10^{-2} N m^{-1} है । स्पर्श कोण शून्य लीजिए तथा जल का घनत्व 1.0×10^3 kg m^{-3} लीजिए । ($g = 9.8$ m s^{-2})

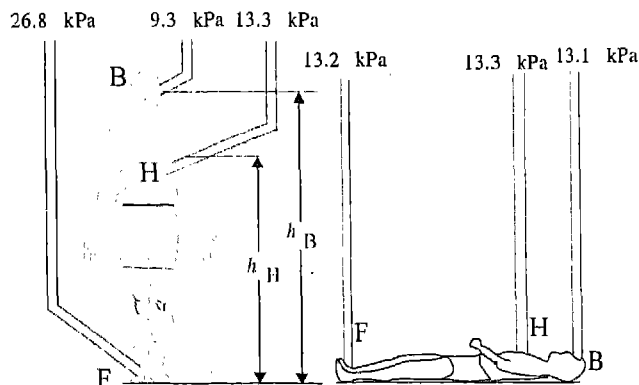
परिकलित्र/कंप्यूटर-आधारित प्रश्न

10.32 (a) यह ज्ञात है कि वायु का घनत्व ρ, ऊंचाई y (मीटरों में) के साथ इस संबंध के अनुसार घटता है :

$$\rho = \rho_0 e^{-y/y_0}$$

यहां समुद्र तल पर वायु का घनत्व $\rho_0 = 1.25 \text{ kg m}^{-3}$ तथा y_0 एक नियतांक है । घनत्व में इस परिवर्तन को वायुमंडल का नियम कहते हैं । यह संकल्पना करते हुए कि वायुमंडल का ताप नियत रहता है (समतापी अवस्था), इस नियम को प्राप्त कीजिए । यह भी मानिए कि g का मान नियत रहता है । (b) 1425 m^3 आयतन का हीलियम से भरा कोई बड़ा गुब्बारा 400 kg के किसी पेलोड को उठाने के काम में लाया जाता है । यह मानते हुए कि ऊपर उठते समय गुब्बारे की त्रिज्या नियत रहती है, गुब्बारा कितनी अधिकतम ऊंचाई तक ऊपर उठेगा ? [$y_0 = 8000 \text{ m}$ तथा $\rho_{He} = 0.18 \text{ kg m}^{-3}$ लीजिए ।]

परिशिष्ट 10.1 : रक्त दाब (रक्त चाप) क्या है ?

विकास मूलक इतिहास में एक ऐसा समय भी आया जब जंतुओं ने अपना अधिकांश समय खड़े रहकर बिताना आरंभ कर दिया । इससे उनके परिसंचरण तंत्रों का कार्य बढ़ गया । इससे उनके शिरा तंत्र, जो निचले अग्रांगों से रक्त को वापस हृदय तक पहुंचाते हैं, में परिवर्तन हुए । आप जानते ही हैं कि शिराएं रक्त वाहिकाएं होती हैं जिनसे होकर रक्त वापस हृदय तक पहुंचता है । मानव तथा जिराफ जैसे जंतुओं ने अपना अनुकूलन करके गुरुत्व बल के विपरीत अपने शरीर के विभिन्न भागों तक रक्त को ऊपर पहुंचाने की समस्या को हल कर लिया है । परंतु, कुछ जीवों; जैसे–सांप, चूहा, तथा खरगोश को यदि ऊपरिमुखी रखें तो वे मर जाएंगे । इसका कारण यह है कि इन जीवों के शिरा-तंत्रों में रक्त को, गुरुत्व बल के विपरीत, हृदय तक वापस भेजने की सामर्थ्य नहीं होती, फलस्वरूप रक्त के निचले अग्रांगों में ही रहने के कारण ये जीव मर जाते हैं ।

चित्र 10.24 मानव शरीर के विभिन्न भागों की धमनियों में खड़े होते समय तथा लेटते समय गेज दाबों का आरेखीय दृश्य । यहां किसी एक हृदय-चक्र के औसत दाब दर्शाए गए हैं ।

चित्र 10.24 में किसी मानव शरीर के विभिन्न बिंदुओं की धमनियों पर प्रेक्षित औसत दाब दर्शाए गए हैं । क्योंकि श्यानता के प्रभाव कम हैं, अतः इन दाबों को समझने के लिए बर्नूली समीकरण (10.12),

$$P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g y = \text{स्थिरांक}$$

का उपयोग किया जा सकता है । क्योंकि तीनों धमनियों में रक्त के प्रवाह के वेग कम ($\approx 0.1\ \mathrm{m\ s^{-1}}$) तथा लगभग अचर हैं, अतः हम बर्नूली की उपरोक्त समीकरण में गतिज ऊर्जा के पद $\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)$ की उपेक्षा कर सकते हैं । इसीलिए मस्तिष्क, हृदय तथा पाद (पैर) के गेज दाबों (प्रमापी दाबों) क्रमशः P_B, P_H तथा P_F में परस्पर संबंध को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$P_F = P_H + \rho g h_H = P_B + \rho g h_B \tag{10.33}$$

यहां ρ रक्त का घनत्व है ।

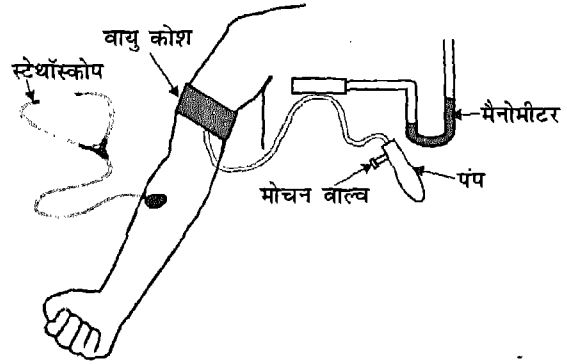
हृदय तथा मस्तिष्क की ऊंचाइयों के प्ररूपी मान $h_H = 1.3$ m तथा $h_B = 1.7$ m होते हैं । $\rho = 1.06 \times 10^3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$ लेने पर हमें पाद का प्रमापी दाब $P_F = 26.8$ kPa (किलो पास्कल) तथा मस्तिष्क का प्रमापी दाब $P_B = 9.3$ kPa प्राप्त होता है, जबकि हमें यह ज्ञात है कि हृदय का प्रमापी दाब $P_H = 13.3$ kPa है । इस प्रकार, जब कोई व्यक्ति खड़ा होता है तब उसके शरीर के निचले भाग तथा ऊपरी भाग के दाबों में इतना अंतर होता है । परंतु लेटी हुई स्थिति में ये दाब लगभग बराबर होते हैं । जैसा कि इसी अध्याय में पहले चर्चा की जा चुकी है कि औषध तथा शरीर विज्ञान में सामान्य उपयोग में टोर (torr) तथा mm (Hg) को दाब के मात्रक के रूप में काम में लाया जाता है । 1 mm (Hg) = 1 torr = 0.133 kPa । इस प्रकार, हृदय पर औसत दाब $P_H = 13.3$ kPa = 100 mm (Hg) ।

मानव शरीर प्रकृति का अद्भुत चमत्कार है । इसके निचले अग्रांगों में वाल्व होते हैं, जो उस समय खुलते हैं जब रक्त हृदय की ओर प्रवाहित होता है, तथा उस समय बंद हो जाते हैं, जब रक्त नीचे की ओर प्रवाहित होने का प्रयास करता है । श्वसन क्रिया तथा चलते समय कंकाल पेशियों में लचक से संबद्ध पंपन क्रिया द्वारा भी आंशिक तौर पर कुछ न कुछ रक्त वापस लौट जाता है । इससे यह स्पष्ट होता है कि "सावधान" की स्थिति में खड़े रहने के लिए बाध्य कोई सिपाही हृदय में पर्याप्त मात्रा में रक्त के वापस न पहुंच पाने के कारण शिथिल (मूर्च्छित-सा) क्यों हो जाता है । यदि उसे एक बार लेटने की अनुमति प्रदान कर दी जाए, तो दाब समान हो जाता है और वह पुनः होश में आ जाता है ।

मनुष्यों के रक्त चाप को मापने के लिए प्रायः एक उपकरण का उपयोग किया जाता है जिसे नाड़ी दाबान्तर मापी (स्फिग्मॉमैनोमीटर) कहते हैं । यह एक तीव्र, पीड़ाहीन तथा अनाक्रामक तकनीक होती है जिससे डॉक्टर को रोगी के स्वास्थ्य के बारे में विश्वसनीय धारणा प्राप्त होती है । चित्र 10.24 में रक्त चॉप मापने की प्रक्रिया दर्शायी गई है । इस प्रक्रिया में ऊपरी भुजा का उपयोग करने के दो कारण हैं । पहला कारण यह है कि इसका स्तर हृदय के स्तर के समान होता है, जिसके कारण यहां पर ली गई दाब की माप हृदय पर दाब के लगभग बराबर होती है । दूसरा

कारण यह है कि ऊपरी भुजा में केवल एक ही अस्थि होती है जिसके कारण यहां की धमनी (जिसे बाहुधमनी कहते हैं) को संपीडित करना सरल होता है ।

हम सभी ने कलाई पर अंगुलियों को रखकर नाड़ी-दर (*स्पंदन-दर*) मापी है । प्रत्येक स्पंद एक सेकंड से कुछ कम समय लेता है । प्रत्येक स्पंदन में जैसे ही हृदय द्वारा रक्त पंप किया जाता है (*प्रकुंचन दाब*), तब हृदय तथा परिसंचरण तंत्र में दाब अधिकतम होता है तथा जब हृदय शिथिल होता है (अनुशिथिलन दाब), तब यह दाब न्यूनतम होता है । स्फिग्मॉमैनोमीटर वह युक्ति है जो इन दो चरम दाबों को मापती है । ***इसके कार्य करने का सिद्धांत यह है कि बाहु धमनी (ऊपरी भुजा) में प्रवाहित होने वाले रक्त के प्रवाह को उचित संपीडन द्वारा स्तरीय प्रवाह से प्रक्षुब्ध प्रवाह में परिवर्तित किया जा सकता है । प्रक्षुब्ध प्रवाह क्षयकारी होता है, तथा इसकी ध्वनि को स्टेथॉस्कोप द्वारा ढूंढ़ा जा सकता है ।***

ऊपरी भुजा के चारों ओर लिपटे वायु कोश के भीतर की वायु का गेज दाब किसी मैनोमीटर अथवा डायल दाब गेज (चित्र 10.25) की सहायता से मापा जाता है । सर्वप्रथम कोश का भीतरी दाब उस सीमा तक बढ़ाया जाता है कि बाहु धमनी बंद हो जाए । तत्पश्चात् कोश में वायु दाब धीरे-धीरे घटाया जाता है तथा कोश के तुरंत नीचे स्टेथॉस्कोप को रखकर बाहु धमनी से आने वाले कोलाहल (शोर) को सुनते हैं । जब दाब **प्रकुंचन** (शिखर) दाब से तुरंत नीचे होता है तो धमनी बहुत थोड़ी-सी खुलती है। इस अल्पकालीन अवधि में अत्यधिक संकुचित धमनी में रक्त के प्रवाह का वेग उच्च तथा प्रक्षुब्ध होने के कारण कोलाहलपूर्ण होता है । स्टेथॉस्कोप द्वारा यही परिणाम कोलाहल निकासी ध्वनि के रूप में सुनाई देता है । जब कोश में वायु दाब और कम किया जाता है तब हृदय-चक्र के अधिकांश भाग के लिए धमनी खुली रहती है । तथापि धड़कन की **अनुशिथिलन** (न्यूनतम दाब) प्रावस्था की अवधि में यह बंद रहती है । इस प्रकार, निकासी ध्वनि की अवधि अपेक्षाकृत बड़ी होती है । जब कोश में दाब अनुशिथिलन दाब के बराबर हो जाता है तो हृदय-चक्र की समस्त अवधि में धमनी खुली रहती है । यद्यपि, अब भी प्रवाह प्रक्षुब्ध तथा कोलाहलपूर्ण होता है । परंतु, अब निकासी ध्वनि के स्थान पर स्टेथॉस्कोप में हम एक स्थायी, सतत् कोलाहल सुनते हैं ।

चित्र 10.25 स्फिग्मॉमैनोमीटर तथा स्टेथॉस्कोप का उपयोग करके रक्त-चाप मापना ।

किसी रोगी का रक्त चाप प्रकुंचन दाब तथा अनुशिथिलन दाब के अनुपात के रूप में प्रस्तुत किया जाता है । किसी शांत स्वस्थ वयस्क के लिए यह प्ररूपी मान 120/80 mm (Hg) या (120/80 टॉर) होते हैं । यदि रक्त चाप 140/90 mm (Hg) से अधिक है तो उसे डॉक्टरी देखरेख तथा परामर्श चाहिए । उच्च रक्त चाप हृदय, गुर्दों (वृक्क) तथा शरीर के अन्य अंगों को गंभीर क्षति पहुंचा सकता है अतः इसे नियंत्रित किया जाना आवश्यक होता है ।

अध्याय 11

गैसों का अणुगति सिद्धांत

11.1 भूमिका

द्रव्य के संघटन का एक अत्यधिक महत्त्वपूर्ण तथ्य यह है कि इसके परमाणु निरंतर गतिशील रहते हैं। ठोस में ये परमाणु अपनी साम्यावस्था के परित: कंपन करते हैं, जबकि गैस में वे इधर-उधर गतिशील रहने के लिए स्वतंत्र होते हैं। द्रव के अणु न तो ठोस के अणुओं की भांति व्यवरुद्ध होते हैं और न ही गैस के अणुओं की भांति बिलकुल स्वतंत्र ही। द्रव्य की तीनों अवस्थाओं में से गैसों के आण्विक चित्रण को समझना सबसे सरल है। यही कारण है कि भौतिकी के इतिहास में इसका विकास पहले हुआ और यह 'गैसों के अणुगति सिद्धांत' के नाम से जाना जाता है। उन्नीसवीं शताब्दी में विकसित यह सिद्धांत असाधारण तौर पर सफल रहा। इसके द्वारा गैस के ताप एवं दाब की आण्विक व्याख्या हुई जो गैस-नियम एवं एवोगैद्रो परिकल्पना से पूर्ण सामंजस्य रखती है। इस सिद्धांत ने बहुत-सी गैसों की विशिष्ट ऊष्माओं की भी सही प्रागुक्ति की। इसके अतिरिक्त, अणुगति सिद्धांत ने गैसों के मापन योग्य गुणधर्मों; जैसे-श्यानता तथा विसरण को आण्विक प्राचलों से संबद्ध किया जिससे आण्विक आकारों तथा द्रव्यमानों का आकलन किया गया। यही सिद्धांत इस अध्याय का मुख्य विषय है। किसी पदार्थ में अणुओं की निरंतर गति की एक बिलकुल सीधी अभिव्यक्ति ब्राउनी गति की परिघटना है जिसका संक्षेप में वर्णन हम इस अध्याय के अंत में करेंगे।

11.2 आदर्श गैसें

ठोसों और द्रवों की अपेक्षा गैसों के गुणों को समझना सरल है। यह मुख्यत: इस कारण होता है कि गैस के अणु एक-दूसरे से काफी दूर-दूर होते हैं और उनके बीच परस्पर अन्योन्य क्रियाएं नगण्य होती हैं सिवाय तब जब दो अणु परस्पर टकराते हैं। गैसें कम दाब व उनके द्रवित होने (या ठोस में परिवर्तित होने) के तापों की अपेक्षाकृत अत्यधिक ताप पर, दाब, आयतन तथा ताप में सन्निकटत: निम्न संबंध का पालन करती हैं :

$$PV = \mu RT \quad (11.1)$$

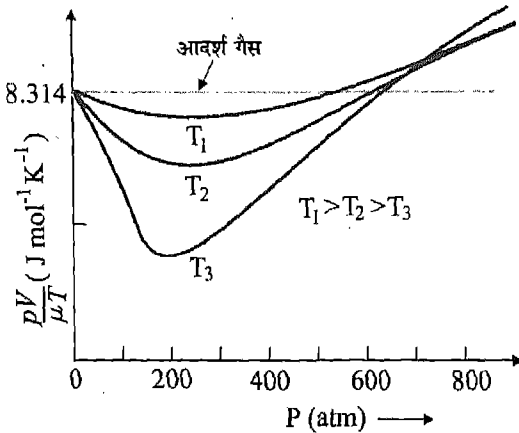
जहां μ गैस के दिए गए परिमाण में मोलों की संख्या है और R सार्वत्रिक गैस-नियतांक है । ताप T परम ताप है । परम ताप के लिए केल्विन मापक्रम में, $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$

अब

$$\mu = \frac{M}{M_0} = \frac{N}{N_A} \qquad (11.2)$$

जहां M गैस का द्रव्यमान है जिसमें अणुओं की संख्या N है । M_0 अणु-द्रव्यमान और N_A एवोगैद्रो संख्या है । समीकरण (11.2) का प्रयोग करके समीकरण (11.1) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$PV = k_B NT \text{ अथवा } P = k_B nT \qquad (11.3)$$

$$\text{जहां } k_B = \frac{R}{N_A} \qquad (11.4)$$

चित्र 11.1 कम दाब तथा उच्च ताप पर वास्तविक गैसें आदर्श गैसों की भाँति व्यवहार करती हैं ।

और n संख्या घनत्व है अर्थात् इकाई आयतन में अणुओं की संख्या । k_B प्रकृति का मूल नियतांक है जिसे बोल्ट्ज़मान नियतांक कहते हैं । इसका SI मात्रकों में मान $1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ है । समीकरण (11.1) को दूसरे रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

$$P = \frac{\rho}{M_0} RT \qquad (11.5)$$

जहां ρ गैस का द्रव्यमान घनत्व है ।

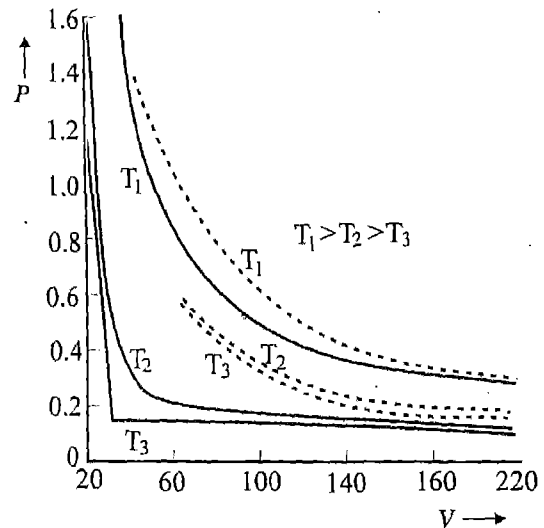
गैस जो सभी दाबों व तापों पर समीकरण (11.1) का पूर्णतः पालन करती है आदर्श गैस कहलाती है । अतः आदर्श गैस किसी गैस का सरल सैद्धांतिक प्रारूप है । कोई भी वास्तविक गैस आदर्श नहीं है । चित्र 11.1 दर्शाता है कि तीन वास्तविक गैसों का व्यवहार आदर्श गैस के व्यवहार से भिन्न है । ध्यान दें कि सभी गैसों का व्यवहार निम्न दाब व उच्च ताप पर आदर्श गैस के व्यवहार की ओर उपगमन करता है ।

आदर्श गैस समीकरण में सभी प्रचलित गैस नियम निहित हैं । यदि समीकरण (11.1) में μ और T को नियत कर दिया जाए तो

$$PV = \text{स्थिरांक} \qquad (11.6)$$

अर्थात् स्थिर ताप पर किसी गैस की निश्चित मात्रा का दाब उसके आयतन के व्युत्क्रमानुपाती होता है । यही बॉयल का प्रसिद्ध नियम है । चित्र 11.2 बॉयल द्वारा पूर्वानुमानित सैद्धांतिक वक्र और प्रयोगात्मक P-V वक्र का तुलनात्मक अध्ययन निरूपित करता है । एक बार और आप देखते हैं कि उच्च ताप और निम्न दाब पर (दिए गए द्रव्यमान के अधिक आयतन के लिए) तालमेल अच्छा है । अब यदि दाब नियत कर दिया जाए तो समीकरण (11.1) दर्शाती है कि $V \propto T$ अर्थात् नियत दाब पर किसी गैस के निश्चित द्रव्यमान का आयतन उसके परम ताप के अनुक्रमानुपाती होता है (चार्ल्स का नियम) । चित्र 11.3 देखिए । एवोगैद्रो की परिकल्पना भी आदर्श गैस नियम में निहित है । चूंकि k_B एक नियतांक है अतः समीकरण (11.3) से हमें प्राप्त होता है

$$\frac{P_1V_1}{N_1T_1} = \frac{P_2V_2}{N_2T_2} \qquad (11.7)$$

इस प्रकार समान ताप तथा दाब पर यदि $V_1 = V_2$ तो $N_1 = N_2$

चित्र 11.2 भाप के लिए तीन तापों पर बॉयल के नियम (बिंदुकित रेखाएं) की तुलना में प्रायोगिक P-V वक्र (ठोस रेखाएं) । दाब P का मान 22 atm की इकाइयों में है और आयतन V का मान 0.09L की इकाइयों में है ।

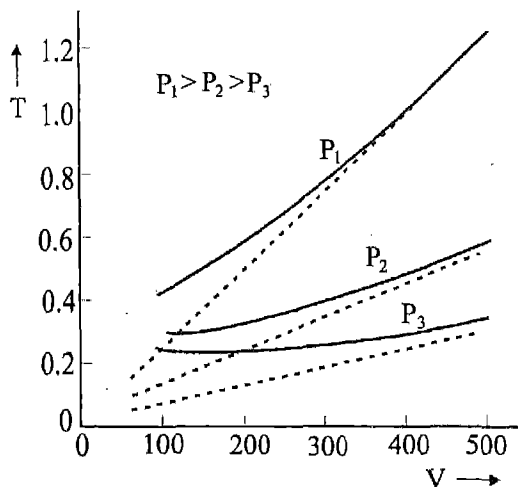
अंततः हम एक V आयतन के बर्तन में ताप T तथा दाब P पर भरे आदर्श अक्रिय गैसों के मिश्रण का विचार करते हैं जिसमें μ_1 मोल गैस 1 का, μ_2 मोल गैस 2 का, आदि है । यहां पाया जाता है कि मिश्रण की अवस्था निम्न समीकरण के अनुसार है :

$$PV = (\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots) RT \qquad (11.8)$$

अर्थात्

$$P=\frac{\mu_1 RT}{V}+\frac{\mu_2 RT}{V}+.........$$

$$=P_1+P_2+.......... \quad (11.9)$$

स्पष्ट है कि $P_1=\frac{\mu_1 RT}{V}$ वह दाब है जो गैस 1 आयतन और ताप की समान शर्तों के अधीन आरोपित करेगी, यदि दूसरी गैसें उपस्थित न हों । यह **गैस का आंशिक** दाब कहलाता है । इस प्रकार आदर्श गैसों के मिश्रण का कुल दाब उनके आंशिक दाब के योग के बराबर होता है । यही **डाल्टन का आंशिक दाब का नियम** है ।

चित्र 11.3 *तीन दाबों पर CO_2 के प्रयोगात्मक T-V वक्रों (ठोस रेखाओं) की चार्ल्स के नियम (बिंदुकित रेखाओं) से तुलना । ताप 300 K की इकाइयों में है और आयतन 0.13 लीटर की इकाइयों में है ।*

> ***उदाहरण 11.1*** जल का घनत्व $10^3\, kg\, m^{-3}$ है । 100 °C और 1 वायुमंडलीय दाब पर जल की वाष्प का घनत्व 0.6 $kg\, m^{-3}$ है । आण्विक आयतन (अर्थात् सभी अणुओं के आयतनों का योग) का जलवाष्प द्वारा घेरे गए कुल आयतन के अंश का ऊपर दी गई ताप तथा दाब की शर्तों के अंतर्गत मोटा आकलन (लगभग) कीजिए ।

हल द्रव (या ठोस) अवस्था में जल के अणु पर्याप्त सघन रूप से भरे होते हैं । अत: पानी के अणुओं का घनत्व मोटे तौर पर स्थूल जल के घनत्व 1000 $kg\, m^{-3}$ के बराबर माना जा सकता है । जल के एक अणु के आयतन का आकलन करने के लिए, जल के एक अणु के द्रव्यमान का ज्ञान आवश्यक है । जैसा कि हम जानते हैं जल के एक मोल का द्रव्यमान लगभग $2+16=18\, g=0.018\, kg$ होता है चूंकि 1 मोल में लगभग 6×10^{23} अणु (एवोगैड्रो संख्या) होते हैं अत: जल के एक अणु का द्रव्यमान $=\frac{0.018}{6\times10^{23}}\, kg=3\times10^{-26}\, kg$ होगा । अत: जल के एक अणु के आयतन का आकलन (लगभग) इस प्रकार है :

जल के एक अणु का आयतन

$$=3\times10^{-26}\, kg/1000\, kg\, m^{-3}$$

$$=3\times10^{-29}\, m^3$$

हमें दिया गया है कि 0.6 kg जलवाष्प दिए हुए ताप तथा दाब पर 1 m^3 आयतन घेरती है । अत: 0.6 kg जल में अणुओं की संख्या $\frac{0.6\, kg}{3\times10^{-26}}=2\times10^{25}$ होगी और इन सभी अणुओं का आयतन (आण्विक आयतन) $2\times10^{25}\times3\times10^{-29}=6\times10^{-4}\, m^3$ होगा । अत: आण्विक आयतन का जलवाष्प द्वारा घेरे गए कुल आयतन से अनुपात $\frac{6\times10^{-4}\, m^3}{1\, m^3}=6\times10^{-4}$ होगा । ◀

> ***उदाहरण 11.2*** एक बर्तन में दो अक्रिय गैसें निऑन (एक परमाणुक) और ऑक्सीजन (द्विपरमाणुक) जो एक दूसरे से अभिक्रिया नहीं करती हैं, रखी गई हैं । इनके आंशिक दाब का अनुपात 3 : 2 है । बर्तन में निऑन और ऑक्सीजन के (*i*) अणुओं की संख्या, और (*ii*) द्रव्यमान घनत्व का अनुपात ज्ञात कीजिए । Ne का परमाणु द्रव्यमान 20.2 u तथा O_2 का अणु द्रव्यमान 32.0 u है ।

हल मिश्रण में किसी गैस का आंशिक दाब गैस के उस दाब के बराबर होता है जो उसी आयतन और ताप पर सिर्फ उस गैस को बर्तन में रखने पर लगता है । (अक्रियाशील गैसों के मिश्रण का कुल दाब घटक गैसों के दाब के योग के बराबर होता है) । प्रत्येक गैस, (आदर्श गैस मान्य) गैस के नियमों का पालन करती है । क्योंकि V व T दोनों गैसों के लिए समान हैं अत:

$$P_1V=\mu_1 RT \text{ और } P_2V=\mu_2 RT \text{ अर्थात् } \frac{P_1}{P_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

यहां 1 और 2 क्रमश: निऑन और ऑक्सीजन को प्रदर्शित करते हैं ।

$$\text{चूंकि } \frac{P_1}{P_2}=\frac{3}{2} \text{ (दिया है)}$$

$$\therefore \frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{3}{2}$$

(*i*) परिभाषा से

$$\mu_1=\left(\frac{N_1}{N_A}\right) \text{ और } \mu_2=\left(\frac{N_2}{N_A}\right)$$

जहां N_1, N_2 गैस 1 व 2 में अणुओं की संख्या है और N_A एवोगैड्रो संख्या है ।

$$\text{इसलिए } \left(\frac{N_1}{N_2}\right)=\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{3}{2}$$

(*ii*) इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$\mu_1 = \left(\frac{m_1}{M_1}\right); \mu_2 = \left(\frac{m_2}{M_2}\right)$$

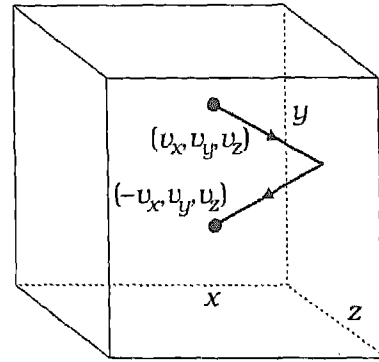
जहां m_1 और m_2 गैस 1 और 2 के द्रव्यमान हैं और M_1 और M_2 उनके आण्विक द्रव्यमान हैं (m_1 और M_1 तथा m_2 और M_2 को एक ही मात्रक में प्रदर्शित करना चाहिए) । यदि ρ_1 और ρ_2 गैस 1 और 2 के क्रमशः घनत्व हों, तो

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1/V}{m_2/V} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1 \times M_1}{\mu_2 \times M_2} = \frac{3 \times 20.2}{2 \times 32.0} = 0.947$$

11.3 आदर्श गैस का अणुगति सिद्धांत

गैसों का अणुगति सिद्धांत द्रव्य के आण्विक चित्र पर आधारित है । गैस का सामान्य द्रव्यमान निरंतर यादृच्छिक गति करने वाले बहुत सारे अणुओं (आदर्श रूप में एवोगैड्रो संख्या की कोटि) का समूह होता है । सामान्य दाब एवं ताप पर किसी गैस में अणुओं के बीच की औसत दूरी, अणु के आकार (2Å) की दस गुनी या उससे अधिक होती है । अतः अणुओं के बीच अन्योन्यक्रिया नगण्य होती है, और हम कल्पना कर सकते हैं कि वे न्यूटन के गति के प्रथम नियमानुसार स्वतंत्र रूप से ऋजुरेखीय पथों पर गति करते हैं । किंतु यदा-कदा वे एक-दूसरे के समीप आ जाते हैं और अंतराणुक बलों का अनुभव करते हैं जिसके कारण उनके वेग परिवर्तित हो जाते हैं । सरलतम प्रारूप के अनुसार गैस के अणु छोटे ठोस गोलों की तरह व्यवहार करते हैं और ये छोटे गोले निरंतर एक-दूसरे से या बर्तन की दीवार से टकराते रहते हैं जिसके कारण उनके वेग परिवर्तित होते रहते हैं । ऐसे संघट्टों को प्रत्यास्थ संघट्ट कहा जाता है । इस चित्र का संक्षेपण निम्न सरल अभिधारणाओं के रूप में करते हैं :

1. गैस के अणु निरंतर यादृच्छिक गति करते हुए एक-दूसरे से तथा बर्तन की दीवारों से संघट्ट करते हैं ।
2. अणु की विमा, अणुओं के बीच की औसत दूरी की तुलना में नगण्य होती है ।
3. अणु बिना किसी, आंतरिक संरचना के पूर्णतः दृढ़ गोले होते हैं । अणुओं के मध्य या अणुओं और दीवार के मध्य किसी प्रकार का आकर्षण या प्रतिकर्षण बल नहीं लगता है । इसलिए गैस की कुल आंतरिक ऊर्जा गतिज ऊर्जा होती है ।
4. स्वयं अणुओं के मध्य अथवा अणुओं और दीवार के मध्य होने वाले सभी संघट्ट प्रत्यास्थ होते हैं । दो संघट्टों के मध्य कोई भी अणु ऋजुरेखीय पथ पर एकसमान वेग से गति करता है । एक संघट्ट में लगा समय संघट्टों के मध्य मुक्त पथ तय करने में लगे समय की तुलना में नगण्य होता है ।

ध्यान दीजिए कि ये अभिधारणाएं स्वतंत्र नहीं हैं । उदाहरणार्थ, आखिरी अभिधारणा, अभिधारणा (2) और (3) पर आधारित है । ये सभी अभिधारणाएं आदर्श गैस के लिए पूर्णतः सत्य हैं लेकिन वास्तविक गैस के लिए अनुमानित रूप से सही हैं । किसी भी वास्तविक गैस में हर ताप तथा दाब पर अंतरा-अणुक बलों को नगण्य नहीं माना जा सकता है अन्यथा गैस का द्रव या ठोस में प्रावस्था संक्रमण (परिवर्तन) कभी नहीं होगा । वास्तव में आदर्श गैस का अंतरा-अणुक बलों की अनुपस्थिति में सभी दशाओं में कोई प्रावस्था संक्रमण नहीं होता है। उपरोक्त अभिधारणाओं के आधार पर आदर्श गैस के दाब का आकलन किया जा सकता है ।

चित्र 11.4 गैस के अणु का बर्तन की दीवार से प्रत्यास्थ संघट्ट ।

माना कि एक गैस l भुजा वाले घनाकार बर्तन में भरी हुई है । चित्र 11.4 के अनुसार अक्षों को घन की भुजाओं के समांतर लीजिए । v_x, v_y, v_z वेग से चलता हुआ एक अणु $A(=l^2)$ क्षेत्रफल की समतल दीवार से टकराता है । चूंकि संघट्ट प्रत्यास्थ है, अणु दीवार से टकराकर उसी वेग से वापस लौटता है । संघट्ट में इसके वेग के y और z घटक नहीं बदलते हैं परंतु वेग के x घटक का चिह्न परिवर्तित हो जाता है अर्थात् संघट्ट के बाद अणु के वेग के घटक क्रमशः $-v_x, v_y, v_z$ हो जाते हैं । अतः अणु के संवेग में परिवर्तन बराबर है $-mv_x-(mv_x) = -2mv_x$ । संवेग परिवर्तन के नियमानुसार, एक संघट्ट में दीवार को हस्तांतरित होने वाला संवेग $= 2mv_x$ ।

दीवार पर आरोपित बल (और दाब) के आकलन के लिए, हमें दीवार को प्रति इकाई समय में हस्तांतरित संवेग के परिकलन करने की आवश्यकता है । कोई अणु जिसके वेग का x घटक v_x है, एक सूक्ष्म समयान्तराल Δt में दीवार से टकराएगा यदि यह दीवार से $v_x\Delta t$ दूरी के भीतर है अर्थात् केवल आयतन $Av_x\Delta t$ के भीतर ही अणु दीवार से Δt समयान्तराल में टक्कर मार सकते हैं । परंतु औसतन इनमें से आधे अणु दीवार से दूर गति कर रहे हैं और आधे दीवार की तरफ गति कर रहे हैं । इस प्रकार, दीवार

से Δt समय में वेग (v_x, v_y, v_z) से टकराने वाले अणुओं की संख्या $\frac{1}{2} A v_x \Delta t\, n$ है जहां n प्रति इकाई आयतन में अणुओं की संख्या है। इसलिए इन अणुओं द्वारा Δt समय में दीवार को कुल हस्तांतरित संवेग होगा

$$Q = (2mv_x)\,(\tfrac{1}{2} n A v_x \Delta t) \qquad (11.10)$$

दीवार पर आरोपित बल संवेग परिवर्तन की दर $\frac{Q}{\Delta t}$ है और दाब (P) बल प्रति इकाई क्षेत्रफल है :

$$P = \frac{Q}{A\Delta t} = nmv_x^2 \qquad (11.11)$$

वास्तव में, गैस के सभी अणुओं का वेग समान नहीं होता है, इनके वेग का वितरण होता है जिसे हम अनुभाग 11.4 में देखेंगे। अत: उपरोक्त समीकरण अणुओं के समूह द्वारा आरोपित दाब को व्यक्त करता है जिसमें v_x, x- दिशा में अणुओं की चाल और n उन अणुओं के समूह के संख्या घनत्व को दर्शाता है। अत: कुल दाब सभी समूहों के योगदान को जोड़कर प्राप्त किया जा सकता है :

$$P = nm\,\overline{v_x^2} \qquad (11.12)$$

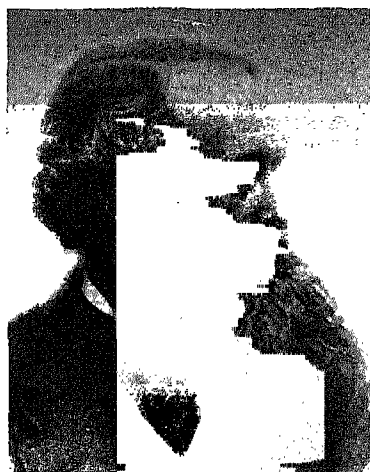
जहां $\overline{v_x^2}$, v_x^2 का औसत तथा n अणुओं (अपनी चाल से असंबद्ध) की संख्या प्रति इकाई आयतन है।

अब क्योंकि गैस समदैशिक है अर्थात् बर्तन में अणुओं के वेग की कोई निश्चित दिशा नहीं है, इसलिए समरूपता द्वारा

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\left(\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}\right) = \frac{1}{3}\,\overline{v^2} \qquad (11.13)$$

जहां v अणु की चाल है और $\overline{v^2}$ वेग के वर्ग के माध्य को दर्शाता है। इस प्रकार

$$P = \frac{1}{3} nm\,\overline{v^2} \qquad (11.14)$$

गैसों के अणुगति सिद्धांत के संस्थापक

जेम्स क्लार्क मैक्सवैल एडिनबर्ग, स्काटलैंड में जन्मे जेम्स क्लार्क मैक्सवैल (**1831-1879**) उन्नीसवीं शताब्दी के महानतम् भौतिक विज्ञानियों में से एक माने जाते हैं। उन्होंने किसी गैस में अणुओं के तापीय वेग वितरण को व्युत्पन्न किया और मेय राशियों जैसे श्यानता आदि से सर्वप्रथम आण्विक प्राचलों का विश्वसनीय आकलन प्राप्त किया। उनकी महानतम् उपलब्धि विद्युत् और चुंबकत्व के नियमों (जिनकी खोज कूलाम, ओर्स्टेड, ऐम्पियर एवं फैराडे ने की) को एक संगत समीकरणों के सेट के रूप में प्रस्तुत करना जिन्हें मैक्सवैल- समीकरणों के नाम से जाना जाता है। समीकरणों के आधार पर उन्होंने एक महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष निकाला कि प्रकाश एक विद्युत् चुंबकीय तरंग है। यहां यह बताना रुचिकर होगा कि मैक्सवैल इस धारणा (फैराडे के विद्युत्-अपघटन के नियमों द्वारा प्रबलतया प्रस्तावित) से सहमत नहीं थे कि विद्युत् की प्रकृति कणिकीय थी।

लुडविग बोल्ट्ज़मान (**1844-1906**) वियना, आस्ट्रिया में जन्मे, बोल्ट्ज़मान ने गैसों के अणुगति सिद्धांत पर मैक्सवैल से अलग स्वतंत्र रूप से कार्य किया। गतिज सिद्धांत के आधारभूत परमाणुवाद के पक्के समर्थक बोल्ट्ज़मान ने ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम एवं एन्ट्रॉपी की धारणा की सांख्यिकीय व्याख्या की। उन्हें चिरप्रतिष्ठित सांख्यिकीय यांत्रिकी के संस्थापकों में से एक माना जाता है। गतिज सिद्धांत में ऊर्जा एवं ताप के मध्य समानुपाती नियतांक का नाम बोल्ट्ज़मान नियतांक उनके सम्मान में दिया गया।

इस व्युत्पत्ति पर कुछ टिप्पणियां : प्रथम, यद्यपि हमने घनाकार बर्तन चुना है परंतु बर्तन के आकार का कोई महत्त्व नहीं है । किसी भी आकार के बर्तन के लिए हम हमेशा एक अतिसूक्ष्म (समतल) क्षेत्रफल लेकर उपरोक्त पदों द्वारा दाब का व्यंजक निकाल सकते हैं । ध्यान दीजिए कि A और Δt दोनों ही अंतिम व्यंजक में नहीं आते हैं । पास्कल के नियमानुसार, साम्यावस्था में गैस के एक हिस्से में दाब किसी दूसरे हिस्से में दाब के समान होता है । द्वितीय, उपरोक्त व्युत्पत्ति में संघट्ट को तुच्छ माना गया है । यद्यपि इस कल्पना का समर्थन करना कठिन है फिर भी गुणात्मक रूप से हम देख सकते हैं कि परिणाम में कोई अशुद्धि का कारण नहीं है । दीवार से टकराने वाले अणुओं की संख्या Δt समय में $(½)\, nAv_x \Delta t$ पाई जाती है । संघट्ट यादृच्छिक है और गैस स्थायी अवस्था में है । इस प्रकार यदि कोई अणु जिसका वेग (v_x, v_y, v_z) है और इसकी चाल संघट्ट के पश्चात् परिवर्तित हो जाती है तो वहीं कोई दूसरा अणु जिसका प्रारम्भिक वेग भिन्न होगा, संघट्ट के पश्चात् वेग (v_x, v_y, v_z) प्राप्त कर लेगा । यदि ऐसा नहीं होगा तो अणुओं की चाल का वितरण स्थायी नहीं रहेगा । इस प्रकार, कुल मिलाकर आण्विक संघट्ट (यदि ये बार-बार नहीं होते हैं और एक टक्कर में लगा समय मुक्त पथ में लगे समय की अपेक्षा नगण्य है) उपरोक्त परिकलन को प्रभावित नहीं करेगा ।

अणुगति सिद्धांत से ताप की व्याख्या

समीकरण (11.14) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$PV = \frac{2}{3}\left(N \times \frac{1}{2} m\overline{v^2}\right) \qquad (11.15)$$

कोष्ठक में दी गई राशि गैस में अणुओं की कुल गतिज ऊर्जा है । चूंकि किसी आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा शुद्ध रूप से गतिज* होती है इसलिए

$$E = N \times ½\, m\overline{v^2} \qquad (11.16)$$

समीकरण (11.15) से

$$PV = \frac{2}{3} E \qquad (11.17)$$

अब हम अणुगति सिद्धांत से ताप की व्याख्या कर सकते हैं । समीकरण (11.17) को आदर्श गैस समीकरण (प्रयोगात्मक) के साथ संयुक्त करने पर $PV = k_B NT$

$$\text{अत:}\; E = \frac{3}{2} k_B NT \qquad (11.18)$$

अथवा

$$\frac{E}{N} = \frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T \qquad (11.19)$$

अर्थात् किसी अणु की औसत गतिज ऊर्जा गैस के परम ताप के अनुक्रमानुपाती होती है, यह आदर्श गैस के दाब, आयतन या प्रकृति से स्वतंत्र होती है । यह गैस के ताप, जोकि इसका एक मेय स्थूल प्राचल है (जिसे ऊष्मागतिकी चर कहा जाता है) को किसी आण्विक राशि (अर्थात् किसी अणु की माध्य गतिज ऊर्जा) से संबद्ध करने वाला मौलिक परिणाम है । इसमें दोनों डोमेन बोल्ट्ज़मान नियतांक द्वारा संबंधित हैं । यहां समीकरण (11.18) स्पष्ट करती है कि किसी आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा केवल ताप पर निर्भर करती है उसके दाब या आयतन पर नहीं । ताप की इस व्याख्या से स्पष्ट है कि किसी आदर्श गैस का अणुगति सिद्धांत, आदर्श गैस समीकरण के पूर्णतया संगत है और इस पर आधारित विभिन्न गैस-नियम अनुच्छेद 11.2 में दिए गए हैं । अक्रिय आदर्श गैसों के मिश्रण के लिए उपरोक्त विश्लेषण का सुविधापूर्वक व्यापकीकरण किया जा सकता है । अत: समीकरण (11.14) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$P = \frac{1}{3}\left(n_1 m_1 \overline{v_1^2} + n_2 m_2 \overline{v_2^2} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$\text{परंतु}\; \frac{1}{2} m_1 \overline{v_1^2} = \frac{1}{2} m_2 \overline{v_2^2} = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\text{अत:}\; P = (n_1 + n_2 + \ldots\ldots\ldots)\, k_B T$$

यही डाल्टन का आंशिक दाब का नियम है ।

समीकरण (11.19) से हमें गैस में अणुओं की विशिष्ट चाल का अनुमान लग सकता है । नाइट्रोजन गैस में 300 K ताप पर एक अणु के लिए माध्य-वर्ग-चाल का मान होगा

$$\overline{v^2} = \frac{3k_B T}{m} = (475)^2\ \mathrm{m^2 s^{-2}}$$

$\overline{v^2}$ का वर्गमूल इसकी वर्ग माध्य मूल (rms) चाल कहलाती है और v_{rms} से प्रदर्शित की जाती है। अत:

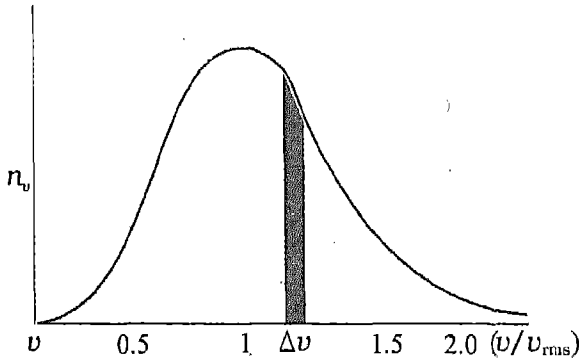
$$v_{rms} = (\overline{v^2})^{1/2} = (475)\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

यह चाल, वायु में ध्वनि की चाल की कोटि की है । समीकरण (11.19) से स्पष्ट है कि समान ताप पर हल्के अणुओं की वर्ग माध्य मूल चाल अधिक होती है ।

---

* E, आंतरिक ऊर्जा U के स्थानांतरीय अंश को प्रदर्शित करती है जिसमें अन्य स्वातंत्र्य कोटि के कारण भी ऊर्जाएं निहित हो सकती हैं । (अनुच्छेद 11.5 देखें)

11.4 मैक्सवैल का चाल वितरण

गैस में अणु विभिन्न दिशाओं में यादृच्छकत: गति करते हैं। किसी दिए हुए ताप तथा दाब पर, क्या उन सबकी चाल समान होती है ? यह स्पष्ट है कि ऐसा नहीं हो सकता। किसी गैस की ऐसी परिकल्पित अवस्था निरंतर होने वाले आण्विक संघट्टों के प्रभाव के कारण एकसमान नहीं रहेगी। यदि किसी गैस के पुंज (bulk) प्राचल; जैसे–दाब, ताप और आयतन स्थिर हैं तो किसी गैस के अणुओं का स्थायी लक्षण क्या है ? इसका उत्तर है कि गैस में अणुओं के वेग का वितरण स्थायी होता है। प्रत्येक अणु का वेग दूसरे अणुओं से संघट्ट करने पर लगातार परिवर्तित होता रहता है। फिर भी अणुओं का वेग-वितरण अपरिवर्तित रहता है। अत: किसी गैस के असंख्य अणुओं में से किसी एक अणु के गति-पथ पर दृष्टि रखना एक लगभग असंभव और निरर्थक कार्य है। परंतु वेग-वितरण का अध्ययन कर पाना संभव है।

चित्र 11.5 मैक्सवैल का गैस में अणुओं की चाल का वितरण

आगे आने वाले उदाहरण से स्पष्ट हो जाएगा कि यहां वितरण शब्द का क्या अर्थ है ? मान लीजिए कि किसी शहर की जनसंख्या में हम विभिन्न व्यक्तियों की आयु के आंकड़ों पर दृष्टि डालते हैं। अधिकतर उद्देश्यों के लिए हमारी रुचि किसी शहर में प्रत्येक व्यक्ति की आयु का सूचीकरण करना नहीं होगा। बल्कि यह जानना अधिक रुचिकर होगा कि प्रत्येक आयु वर्ग में कितने लोग हैं। हम लोगों को तीन समूहों में विभाजित कर सकते हैं : 10 वर्ष तक की आयु वाले बच्चे, 10 से 60 वर्ष तक की आयु वर्ग में वयस्कों की संख्या, और 60 वर्ष से ऊपर के आयु वर्ग में वृद्धों की संख्या। यदि हम इससे अधिक परिशुद्ध आयुवर्ग की रूपरेखा चाहते हैं तब हम छोटे-छोटे समयांतराल का चयन करेंगे। मान लीजिए 1 वर्ष के अंतराल पर, तो हम जनसंख्या को 0-1, 1-2, 2-3 आयु वर्ग में सूचीबद्ध करते हैं। हम इस कार्य के लिए और भी छोटे समयांतराल जैसे 6 महीने का भी लेकर कर सकते हैं। इससे हमें यह ज्ञात होगा कि 11 वर्ष से 11 वर्ष 6 महीने के आयु वर्ग के बच्चों की संख्या, 11 वर्ष और 12 वर्ष के आयु वर्ग के बच्चों की संख्या की लगभग आधी होगी। अत: यदि अंतराल छोटा है तो अंतराल में व्यक्तियों की संख्या, अंतराल के विस्तार के समानुपाती होती है। अर्थात् व्यक्तियों की संख्या (ΔN_x) जो x और $(x+\Delta x)$ आयु वर्ग के मध्य आती है, Δx के समानुपाती होगी अथवा सूक्ष्म Δx के लिए, $\Delta N_x = n_x \Delta x$ होगा। n_x का x के विरुद्ध आलेखन करने पर हमें ज़नसंख्या के आयु-वितरण का चित्र मिलता है।

आण्विक गति के वितरण का अर्थ भी समान है। हम प्रश्न करते हैं कि किसी गैस में ऊष्मीय साम्यावस्था में कितने अणुओं (ΔN_x) की चाल v और $v + \Delta v$ के मध्य होती है ? मैक्सवैल ने सांख्यिकीय विधियों द्वारा सर्वप्रथम इस प्रश्न का उत्तर दिया था। उसके परिणाम की व्युत्पत्ति हमारे पाठ्यक्रम के क्षेत्र से परे है। मैक्सवैल ने दर्शाया था कि

$$\Delta N_v = 4\pi\, N a^3 e^{-bv^2} v^2 \Delta v = n_v \Delta v \qquad (11.20)$$

$$\text{जहां } a = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}},\ b = \frac{m}{2k_B T} \qquad (11.21)$$

और N अणुओं की कुल संख्या है। n_v तथा v के बीच खींचा गया आलेख, मैक्सवैल का चाल वितरण आलेख कहलाता है जो चित्र 11.5 में निरूपित है। v और $v+dv$ चाल वाले अणुओं की संख्या आलेख में दर्शाई गई पट्टी के क्षेत्रफल के बराबर है।

11.4.1 अणुओं की वर्ग माध्य मूल, औसत और अधिकतम प्रसंभाव्य चाल*

अणुओं की वर्ग माध्य मूल चाल निम्न प्रकार लिखी जा सकती है :

$$v_{rms} = \left(\overline{v^2}\right)^{1/2}$$

चूंकि चाल एक असतत् चर न होकर एक सतत् चर है अत: औसत चाल को हम समाकलन द्वारा ज्ञात कर सकते हैं अर्थात्

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2 dN_v = \frac{3k_B T}{m}$$

$$\text{या } v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \qquad (11.22)$$

जो प्रारंभिक विचारधाराओं से प्राप्त संबंध के अनुरूप है। अणु की औसत चाल $\bar{v}$ को निम्न व्यंजक द्वारा व्यक्त कर सकते हैं :

$$\bar{v} = \frac{1}{N}\int v\, dN_v = \sqrt{\frac{8k_B T}{m\pi}} \qquad (11.23)$$

* इनसे संबंधित समाकलों के परिणाम बिना उपपत्ति के प्रयोग किए जा सकते हैं।

अधिकतम प्रसंभाव्य चाल v_m मैक्सवैल के चाल वितरण की अधिकतम चाल है

$$\left.\frac{dn_v}{dv}\right|_{v=v_m} = 0$$

अत:

$$v_m = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}} \qquad (11.24)$$

ध्यान दीजिए कि मैक्सवैल का चाल वितरण आलेख सममित वक्र नहीं है इसलिए v_{rms} $\bar{v}$ और v_m समान नहीं हैं। विशेष रूप से अधिकतम प्रसंभाव्य चाल, वर्ग माध्य मूल चाल से कम है।

▶ ***उदाहरण 11.3*** एक फ्लास्क में द्रव्यमान के आधार पर ऑर्गन और क्लोरीन 2:1 के अनुपात में हैं। मिश्रण का ताप 27 °C है। निम्न का अनुपात ज्ञात कीजिए :

(*i*) प्रति अणु औसत गतिज ऊर्जा, और

(*ii*) दोनों गैसों आर्गन (परमाणवीय द्रव्यमान = 39.9 u) और क्लोरीन (आण्विक द्रव्यमान = 70.9 u) के अणुओं का वर्ग माध्य मूल वेग।

हल यहां याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बात यह है कि किसी भी (आदर्श) गैस (चाहे यह एक-परमाणुक हो, जैसे ऑर्गन अथवा द्वि-परमाणुक हो, जैसे क्लोरीन या बहु-परमाणुक हो), की औसत गतिज ऊर्जा (प्रति अणु) सदैव $\frac{3}{2}k_BT$ के बराबर होती है। यह केवल ताप पर निर्भर करती है और गैस की प्रकृति से स्वतंत्र होती है।

(*i*) चूंकि फ्लास्क में ऑर्गन एवं क्लोरीन दोनों गैसों का ताप समान है, दोनों की औसत गतिज ऊर्जा (प्रति अणु) का अनुपात 1:1 होगा।

(*ii*) अब $\frac{1}{2} mv_{rms}^2$ प्रति अणु औसत गतिज ऊर्जा $= \frac{3}{2} k_BT$, जहां m गैस के एक अणु का द्रव्यमान है। इसलिए

$$\frac{(v_{rms}^2)_{Ar}}{(v_{rms}^2)_{Cl_2}} = \frac{(m)_{Cl_2}}{(m)_{Ar}} = \frac{M_{Cl_2}}{M_{Ar}} = \frac{70.9}{39.9}$$

जहां M गैस के आण्विक द्रव्यमान को प्रदर्शित करता है। (आर्गन के लिए आर्गन का अणु केवल एक परमाणु ही है) दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$\frac{(v_{rms})_{Ar}}{(v_{rms})_{Cl_2}} = 1.33$$

ध्यान दीजिए कि द्रव्यमान-आधारित मिश्रण के संगठन की उपरोक्त गणना निराधार है। यदि ताप अपरिवर्तित रहता है तो आर्गन और क्लोरीन को द्रव्यमान के आधार पर किसी भी अनुपात में मिलाने पर (*i*) और (*ii*) के एकसमान उत्तर प्राप्त होंगे। ◀

11.5 ऊर्जा के समविभाजन का नियम : गैसों की विशिष्ट ऊष्माएं

किसी गैस के एक अणु की गतिज ऊर्जा होती है :

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2} mv_x^2 + \frac{1}{2} mv_y^2 + \frac{1}{2} mv_z^2$$

किसी ताप T पर ऊष्मीय साम्यावस्था में गैस के लिए ε_t का ज्ञात किया गया औसत मान, जिसे $\langle\varepsilon_t\rangle$ से निरूपित किया गया है

$$\langle\varepsilon_t\rangle = \left\langle\frac{1}{2} mv_x^2\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2} mv_y^2\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2} mv_z^2\right\rangle = \frac{3}{2} k_BT \qquad (11.25)$$

चूंकि वहां कोई वरीय दिशा नहीं है अत: समीकरण (11.25) इंगित करता है कि

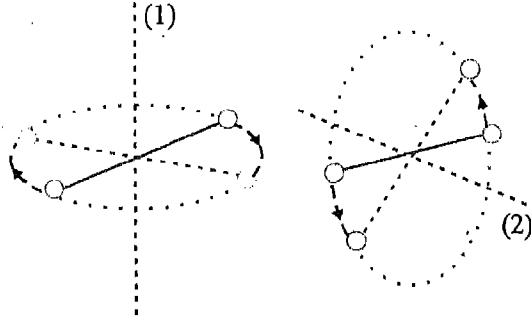
$$\left\langle\frac{1}{2} mv_x^2\right\rangle = \frac{1}{2} k_BT, \left\langle\frac{1}{2} mv_y^2\right\rangle = \frac{1}{2} k_BT,$$

$$\left\langle\frac{1}{2} mv_z^2\right\rangle = \frac{1}{2} k_BT \qquad (11.26)$$

किसी भी अणु जो दिक्स्थान में गति करने के लिए स्वतंत्र है, को अपनी स्थिति के विशेष विवरण के लिए तीन निर्देशांकों की आवश्यकता होती है। यदि यह एक समतल में गति करने के लिए बाध्य होता है तो इसे केवल दो निर्देशांकों की आवश्यकता पड़ती है और यदि यह एक सरल रेखीय गति करने के लिए बाध्य होता है तो इसे केवल एक ही निर्देशांक की आवश्यकता पड़ती है। अत: हम कह सकते हैं कि किसी अणु की सरल रेखीय गति, किसी समतल में गति और किसी दिक्स्थान में गति के लिए क्रमश: एक, दो व तीन स्वतंत्रत कोटियों (स्वातंत्र्य कोटियां) की आवश्यकता होती है। किसी समूचे पिंड की एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गति को स्थानांतरीय गति कहते हैं। अत: दिक्स्थान में घूमने के लिए स्वतंत्र अणु की तीन स्थानांतरीय स्वतंत्रता की कोटियां होती हैं। प्रत्येक स्थानांतरीय स्वतंत्रता की कोटि एक पद का योगदान देती है जिसमें गति के किसी चर का वर्ग शामिल होता है, उदाहरणार्थ $\frac{1}{2} mv_x^2$ और इसके सदृश पद v_y और v_z में होते हैं। समीकरण (11.26) में हम देखते हैं कि ऊष्मीय साम्यावस्था में ऐसे प्रत्येक पद का औसत $\frac{1}{2} k_BT$ है।

एक-परमाणुक गैस के अणु, जैसे आर्गन की केवल स्थानान्तरीय स्वातंत्र्य कोटि होती है। लेकिन द्विपरमाणुक गैस जैसे O_2 या N_2 की कितनी स्थानांतरीय स्वातंत्र्य की कोटियां होंगी ? O_2 के किसी अणु की तीन स्थानांतरीय स्वतंत्रता की कोटियां होती है। इसके अतिरिक्त यह अणु अपने संहति केंद्र के परित: घूर्णन भी कर सकता है। चित्र 11.6 प्रदर्शित करता है कि ऑक्सीजन

परमाणुओं को मिलाने वाले अक्ष के लंबवत् घूर्णन के दो स्वतंत्र अक्ष (1) और (2) हैं जिनके परित: अणु घूर्णन कर सकता है।* अत: द्विपरमाणुक अणु की दो घूर्णीय स्वातंत्र्य कोटियां हैं जिनमें से प्रत्येक एक पद का योगदान कुल ऊर्जा को देता है जिसमें स्थानांतरीय ऊर्जा ε_t और घूर्णीय ऊर्जा ε_r निहित है।

$$\varepsilon_t+\varepsilon_r=\frac{1}{2}\,mv_x^2+\frac{1}{2}\,mv_y^2+\frac{1}{2}\,mv_z^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \qquad (11.27)$$

चित्र 11.6 किसी द्विपरमाणुक अणु के दो स्वतंत्र घूर्णन अक्ष

जहां ω_1 और ω_2 अणु की अक्ष 1 और 2 के चारों ओर कोणीय चाल है और I_1, I_2 उनके संगत जड़त्व आघूर्ण हैं (चित्र 11.6 देखें)। ध्यान दीजिए कि प्रत्येक घूर्णन स्वतंत्रता की कोटि, ऊर्जा के व्यंजक में एक पद का योगदान देती है जिसमें गति के घूर्णन चर का वर्ग निहित होता है। उपरोक्त O_2 अणु के उदाहरण में यह कल्पना की गई है कि यह एक 'दृढ़ घूर्णी' है अर्थात् यह अणु कंपन नहीं करता है। यद्यपि यह कल्पना O_2 के लिए (मध्यम ताप पर) सत्य है, परंतु यह हमेशा वैध नहीं है। अणु, उदाहरण के लिए CO, मध्यम ताप पर भी कंपन करते हैं अर्थात् इनके परमाणु अंतरापरमाणुक अक्ष के अनुदिश एकविमीय दोलक की भांति कंपन करते हैं और कुल ऊर्जा के व्यंजक में कंपन ऊर्जा पद ε_v का योगदान देते हैं। इस प्रकार

$$\varepsilon=\varepsilon_t+\varepsilon_r+\varepsilon_v=\frac{1}{2}\,mv_x^2+\frac{1}{2}\,mv_y^2+\frac{1}{2}\,mv_z^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2+\frac{1}{2}m\dot{\eta}^2+\frac{1}{2}k\eta^2 \qquad (11.28)$$

जहां k दोलक का बल नियतांक है और η कंपन निर्देशांक है $\left(\dot{\eta}=\frac{d\eta}{dt}\right)$। समीकरण (11.28) में हम देखते हैं कि कंपन ऊर्जा के पदों में गति के कंपन चरों $(\eta,\dot{\eta})$ के पदों का वर्ग भी सम्मिलित है।

समीकरण (11.28) में यह बात भी ध्यान देने योग्य है कि स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वतंत्रता की कोटियां केवल एक-एक वर्ग पद का योगदान दे रही हैं जबकि कांपनिक आवृत्ति दो वर्ग पदों (एक गतिज ऊर्जा और दूसरा स्थितिज ऊर्जा के लिए) का योगदान दे रही है।

प्रत्येक द्विघात पद (वह पद जिसमें गति के चर के वर्ग वाला पद सम्मिलित है) जो ऊर्जा के पद में आ रहा है, अणु द्वारा ऊर्जा अवशोषण की एक विधि है। हम देख चुके हैं कि परम ताप T पर ऊष्मीय साम्यावस्था में ऊर्जा की प्रत्येक स्थानांतरीय विधि के लिए औसत ऊर्जा $\frac{1}{2}k_BT$ है। अत: चिरप्रतिष्ठित सांख्यिकीय यांत्रिकी के परिष्कृत सिद्धांतानुसार (सर्वप्रथम मैक्सवैल द्वारा सिद्ध किया गया), साम्यावस्था में किसी अणु की कुल ऊर्जा सभी संभावित रूपों-स्थानांतरीय, घूर्णी एवं कांपनिक में समान रूप से वितरित होती है और प्रत्येक रूप में औसत ऊर्जा $\frac{1}{2}k_BT$ होती है। इसी को **ऊर्जा के सम-विभाजन का नियम** कहते हैं। इसके अनुसार किसी अणु की स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वतंत्रता की काटियों में से प्रत्येक $\frac{1}{2}k_BT$ का योगदान देती है जबकि कांपनिक रूप $k_BT\left(=2\times\frac{1}{2}k_BT\right)$ ऊर्जा का योगदान देता है जिसमें $\frac{1}{2}k_BT$ गतिज ऊर्जा का होता है और $\frac{1}{2}k_BT$ स्थितिज ऊर्जा का होता है।

ऊर्जा के सम-विभाजन के सिद्धांत के नियम की उपपत्ति हमारे पाठ्यक्रम के क्षेत्र से बाहर है। अत: हम इस नियम को केवल गैसों की विशिष्ट ऊष्माओं को सैद्धांतिक रूप से समझाने के लिए प्रयोग करेंगे। (विशिष्ट ऊष्माओं के विस्तृत अध्ययन के लिए अध्याय 12 देखिए)

11.5.1 एक-परमाणुक गैसें

किसी एक-परमाणुक गैस के अणु की केवल तीन स्थानांतरीय स्वतंत्रता की कोटियां होती हैं अत: अणु की ताप T पर औसत ऊर्जा $\frac{3}{2}k_BT$ है। ऐसी गैस के एक मोल की कुल आंतरिक ऊर्जा है

$$U=\frac{3}{2}\,k_BT\times N_A=\frac{3}{2}RT \qquad (11.29)$$

अत: स्थिर आयतन पर किसी एक-परमाणुक गैस की ग्राम अणुक विशिष्ट ऊष्मा C_v को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$C_v\,(\text{एक-परमाणुक गैस})=\frac{3}{2}R \qquad (11.30)$$

* यह तीसरे अक्ष के चारों ओर घूर्णन गति नहीं कर सकता है क्योंकि तीसरे अक्ष के चारों ओर इसका जड़त्व आघूर्ण उपेक्षणीय है क्योंकि ऑक्सीजन के दोनों परमाणुओं को बिंदु द्रव्यमान माना गया है।

किसी आदर्श गैस के लिए

$$C_p - C_v = R \quad (11.31)$$

जहां C_p स्थिर दाब पर किसी गैस की ग्राम अणुक विशिष्ट ऊष्मा है (देखिए अध्याय 12)।

$$C_p = \frac{5}{2} R \quad (11.32)$$

अत: विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$ (11.33)

11.5.2 द्वि-परमाणुक गैसें

जैसा कि पहले स्पष्ट किया गया है कि द्वि-परमाणुक अणु एक डंबल की भांति दृढ़ घूर्णी होता है और इसकी 5 स्वातंत्र्य कोटियां (3 स्थानांतरीय और 2 घूर्णी) होती हैं। ऊर्जा के सम विभाजन के नियमानुसार किसी द्वि-परमाणुक गैस के एक मोल की आंतरिक ऊर्जा

$$U = \frac{5}{2} k_B T \times N_A = \frac{5}{2} RT \quad (11.34)$$

अत: ग्राम अणुक विशिष्ट ऊष्माएं होंगी

$$C_v \text{ (दृढ़ द्वि-परमाणुक)} = \frac{5}{2} R; \; C_p = \frac{7}{2} R \quad (11.35)$$

$$\gamma \text{ (दृढ़ द्वि-परमाणुक)} = \frac{7}{5} \quad (11.36)$$

यदि द्वि-परमाणुक अणु दृढ़ नहीं है बल्कि इसके अतिरिक्त अणु का कांपनिक रूप भी सम्मिलित है तब

$$U = \left(\frac{5}{2} k_B T + k_B T\right) N_A = \frac{7}{2} RT$$

$$C_v = \frac{7}{2} R, \; C_p = \frac{9}{2} R, \; \gamma = \frac{9}{7}$$

द्वि-परमाणुक गैस, एक कांपनिक रूप के साथ (11.37)

11.5.3 बहु-परमाणुक गैसें

साधारणतया किसी बहु-परमाणुक अणु की 3 स्थानांतरीय एवं 3 घूर्णी स्वातंत्र्य कोटियां और कांपनिक रूपों की एक निश्चित संख्या (f) होती है। ऊर्जा के सम विभाजन नियमानुसार यह सुविधापूर्वक देखा जा सकता है कि बहु-परमाणुक गैस के एक मोल की कुल आंतरिक ऊर्जा

$$U = \left\{\frac{3}{2} k_B T + \frac{3}{2} k_B T + f k_B T\right\} N_A$$

अर्थात् $C_v = (3+f)R; \; C_p = (4+f)R,$

$$\gamma = \frac{(4+f)}{(3+f)} \quad (11.38)$$

ध्यान दीजिए कि समीकरण (11.31) किसी भी आदर्श गैस (एक-परमाणुक, द्वि-परमाणुक अथवा बहु-परमाणुक) गैस के लिए सत्य है।

सारणी 11.1 किसी भी कांपनिक गति के रूप की उपेक्षा करते हुए विभिन्न विशिष्ट ऊष्माओं के सैद्धांतिक पूर्वानुमानों का सार प्रस्तुत करती है। इसमें दिए विभिन्न गैसों की विशिष्ट ऊष्माओं के मान सारणी 11.2 में दिए प्रायोगिक मानों से अच्छा मेल खाते है। इतना अवश्य है कि कुछ गैसों; जैसे–Cl_2, C_2H_6 तथा कुछ अन्य बहु-परमाणुक गैसों के पूर्व-कल्पित मान और वास्तविक मानों में कुछ भिन्नता है। सामान्यत: इन गैसों की प्रायोगिक विशिष्ट ऊष्माओं के मान सारणी 11.1 में सुझाए गए मानों से अधिक हैं। इस असंगति को दूर करने के लिए यह सुझाया जाता है कि परिकलन में गति के कांपनिक रूप को भी सम्मिलित करना चाहिए। अत: ऊर्जा के समविभाजन का नियम, साधारण ताप पर प्रायोगिक रूप से अच्छी तरह सत्यापित किया हुआ है।

सारणी 11.1 गैसों की विशिष्ट ऊष्माओं के पूर्व-कल्पित मान

गैस की प्रकृति	C_v (J mol^{-1}K^{-1})	C_p (J mol^{-1}K^{-1})	($C_p - C_v$) (J mol^{-1}K^{-1})	γ
एक-परमाणुक	12.5	20.8	8.31	1.67
द्वि-परमाणुक	20.8	29.1	8.31	1.40
बहु-परमाणुक	24.93	33.24	8.31	1.33

सारणी 11.2 गैसों की विशिष्ट ऊष्माओं के मापित मान

गैस की प्रकृति	गैस	C_v (J mol^{-1}K^{-1})	C_p (J mol^{-1}K^{-1})	($C_p - C_v$) (J mol^{-1}K^{-1})	γ
एक-परमाणुक	He	12.5	20.8	8.30	1.66
एक-परमाणुक	Ne	12.7	20.8	8.12	1.64
एक-परमाणुक	Ar	12.5	20.8	8.30	1.67
द्वि-परमाणुक	H_2	20.4	28.8	8.45	1.41
द्वि-परमाणुक	O_2	21.0	29.3	8.32	1.40
द्वि-परमाणुक	N_2	20.8	29.1	8.32	1.40
त्रि-परमाणुक	H_2O	27.0	35.4	8.35	1.31
बहु-परमाणुक	CH_4	27.1	35.4	8.36	1.31

अंत में हमें एक महत्वपूर्ण लक्षण पर ध्यान देना चाहिए कि सांख्यिकीय यांत्रिकी (जिस पर ऊर्जा का समविभाजन का नियम आधारित है) के आधार पर विशिष्ट ऊष्माओं के अनुमानित मान, ताप पर निर्भर नहीं करते हैं। लेकिन जैसे ही हम कम ताप पर इसका अध्ययन करते हैं तो हमें पूर्वानुमानित मानों से काफी विचलन देखने को मिलता है और जैसे ही ताप T शून्य की ओर अग्रसर होता है, सभी पदार्थों की विशिष्ट ऊष्माएं भी शून्य की ओर अग्रसर हो जाती हैं। भौतिक रूप से यह स्पष्ट होता है कि जैसे-जैसे हम तापमान को कम करते

जाते हैं, अणु की स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या घटती जाती है और गति के कुछ रूप अवरुद्ध हो जाते हैं। मूलत: यह चिरप्रतिष्ठित भौतिकी के विरुद्ध है जिसके अनुसार भी गति के रूप अपरिवर्तित रहने चाहिए। घटते हुए तापमान के साथ केवल गति का आयाम ही कम हो सकता है। अत: कम तापमान पर विशिष्ट ऊष्माओं का व्यवहार आश्चर्यजनक रूप से अपर्याप्तता दर्शाता है और इसकी केवल क्वांटम धारणाओं के आधार पर ही व्याख्या की जा सकती है जैसा कि सर्वप्रथम आइंसटाइन ने दर्शाया था।

▷ *उदाहरण 11.4* 44.8 लीटर के स्थिर धारिता वाले एक बेलन में मानक ताप और दाब पर हीलियम गैस भरी है। बेलन में भरी गैस का ताप 15 °C बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा क्या होगी? ($R = 8.31\ J\ mol^{-1} K^{-1}$)

हल गैस नियम $PV = \mu RT$ का उपयोग करके, आप आसानी से दिखा सकते हैं कि मानक (273 K) ताप और दाब (1 atm = 1.01×10^5Pa) पर गैस (आदर्श) के एक मोल का आयतन 22.4 लीटर होता है। यह सार्वभौमिक आयतन 'अणुक आयतन' कहलाता है। अत: उदाहरण में, बेलन में हीलियम गैस के दो मोल हैं। चूंकि हीलियम एक-परमाणुक गैस है अत: इसकी स्थिर आयतन पर अणुक विशिष्ट ऊष्मा $C_v = \frac{3}{2}R$ और स्थिर दाब पर अणुक विशिष्ट ऊष्मा, $C_p = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$ (संभावित तथा अवलोकित है)। चूंकि बेलन का आयतन स्थिर है अत: आवश्यक ऊष्मा का निर्धारण C_v द्वारा होगा।

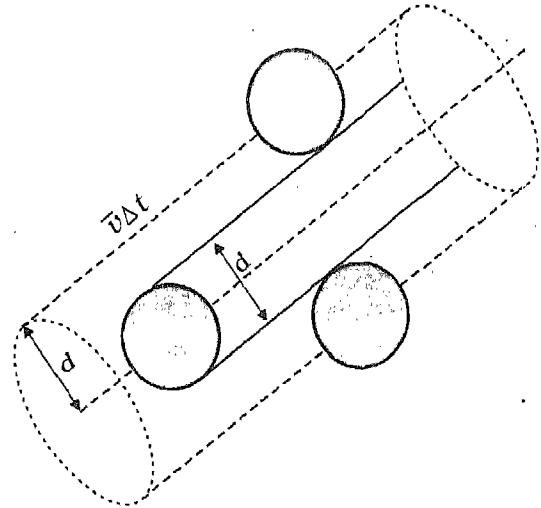
अत: आवश्यक ऊष्मा = मोलों की संख्या × अणुक विशिष्ट ऊष्मा × ताप में वृद्धि

$$= 2 \times \frac{3}{2} R \times 15.0$$

$$= 45R$$

$$= 45 \times 8.31 = 374 J$$ ◀

11.6 माध्य मुक्त पथ

किसी गैस में अणुओं की चाल वायु में ध्वनि की चाल की कोटि की होती है। फिर भी रसोई में गैस के सिलिंडर से रिसने वाली गैस कमरे के दूसरे कोने तक विसरित होने में अधिक समय लेती है। धुएं के बादल का ऊपरी सिरा घंटों बना रहता है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि किसी गैस में अणुओं का साइज परिमित होता है भले ही छोटा होता है। अत: वे संघट्ट करने के लिए बाध्य होते हैं जिसके कारण वे बाधामुक्त सीधे गति कर ही नहीं पाते हैं और उनका मार्ग निरंतर बदलता रहता है।

चित्र 11.7 किसी अणु द्वारा Δt समय में तय किया गया आयतन जिसमें कोई अणु इससे टकराएगा।

मान लीजिए कि किसी गैस के अणु d व्यास के गोले हैं। यहां हम किसी एक गतिमान अणु पर ध्यान केंद्रित करते हैं जिसकी औसत चाल $\bar{v}$ है। यह उस प्रत्येक अणु से संघट्ट करेगा जिसका केंद्र पहले अणु के केंद्र से d दूरी के अंदर (चित्र 11.7 देखें) है। अत: Δt समय में कोई अणु $\pi d^2 \bar{v} \Delta t$ आयतन तय करता है जिसमें कोई अन्य अणु इससे संघट्ट करेगा। यदि प्रति इकाई आयतन में अणुओं की संख्या n है तो कोई अणु Δt समय में $n\pi d^2 \bar{v} \Delta t$ संघट्ट सहन करेगा। अत: संघट्ट की दर $n\pi d^2 \bar{v}$ है अथवा किन्हीं दो क्रमिक संघट्टों के मध्य लगा औसत समय

$$\tau = \frac{1}{\pi d^2 \bar{v} n} \qquad (11.39)$$

किन्हीं दो क्रमिक संघट्टों के बीच की दूरी औसत मुक्त पथ ($\bar{l}$) कहलाती है :

$$\bar{l} = \bar{v}\tau = \frac{1}{n\pi d^2} \qquad (11.40)$$

इस व्युत्पत्ति में, हमने कल्पना की है कि दूसरे अणु विरामावस्था में हैं। परंतु वास्तव में सभी अणु गतिमान हैं और संघट्ट दर अणुओं के औसत आपेक्षिक वेग द्वारा निर्धारित की जाती है। अत: समीकरण (11.39) में $\bar{v}$ के स्थान पर $\bar{v}_r$ रखा जाना चाहिए। अत: अधिक यथार्थ गणना से

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2} n\pi d^2} \qquad (11.41)$$

अब हम $\bar{l}$ और τ का आकलन वायु के अणुओं के लिए करते हैं । मानक ताप व दाब पर

$$n = \frac{6.02\times10^{23}}{22.4\times10^{-3}} = 2.7\times10^{25}\,\text{m}^{-3}$$

अब $d = 2\times10^{-10}$ m (लगभग) लेने पर,

$$\tau = 6.1\times10^{-10}\,\text{s} \text{ तथा } \bar{l} = 2.9\times10^{-7}\,\text{m} \qquad (11.42)$$

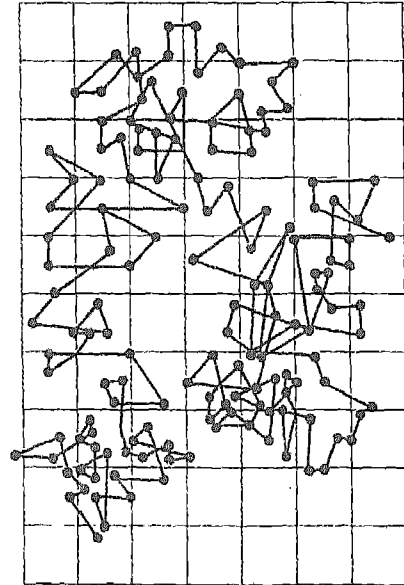
आशा के अनुरूप समीकरण (11.41) द्वारा दिया गया औसत (माध्य) मुक्त पथ, संख्या घनत्व और अणुओं के आकार पर प्रतिलोमत: निर्भर करता है । किसी नली में जिसमें से वायु बिलकुल ही निकाल दी गई हो, और n चाहे कितना ही छोटा क्यों न हो, औसत (माध्य) मुक्त पथ इतना अधिक हो सकता है जितना की नली की लंबाई है।

गैसों के अणुगतिक सिद्धांत के प्रयोग द्वारा अधिकांश मापनयोग्य गुण; जैसे–श्यानता, ऊष्मा चालन और विसरण को सूक्ष्म प्राचलों, जैसे आण्विक आकार से संबद्ध किया जा सकता है । इन्हीं संबंधों (जिनका हम यहां अध्ययन नहीं कर रहे हैं) द्वारा सर्वप्रथम आण्विक आकार का आकलन किया गया था।

11.7 ब्राउनी गति

सन् 1827 ई. में स्कॉटलैण्ड के वनस्पतिज्ञ रॉबर्ट ब्राउन जब सूक्ष्मदर्शी से पानी के अंदर परागकणों की जांच कर रहे थे तो उन्होंने पाया कि परागकण टेढ़े-मेढ़े पथ पर निरंतर यादृच्छिक गति कर रहे थे । पहले ब्राउन ने सोचा कि ऐसा परागकण के किसी तरह जीवित रहने के कारण होता है । लेकिन मृत पौधों के परागकणों, उसी आकार के माइका और पत्थर के सूक्ष्मतम कणों से किए गए प्रयोगों में भी टेढ़े-मेढ़े पथ पर गति एक सामान्य परिणाम था । अणुगतिक सिद्धांत ने इस परिघटना की सरल व्याख्या की । जल के अणु, जल में लटके किसी वस्तु के कणों को सभी दिशाओं से निरंतर टक्कर मारते रहते हैं । अणुओं की यादृच्छिक गति के कारण, वस्तु को किसी भी दिशा से टकराने वाले अणुओं की संख्या, विपरीत दिशा से टक्कर मारने वाले अणुओं की संख्या के लगभग समान होती है । इन आण्विक टक्करों का सूक्ष्म अंतर, किसी साधारण आमाप वाली वस्तु पर कुल टक्करों की संख्या की तुलना में उपेक्षणीय है जिसके कारण वस्तु की कोई प्रेक्षणीय गति नहीं होती है ।

यदि वस्तु अति सूक्ष्म होते हुए भी सूक्ष्मदर्शी से दृश्यमान है (परागकणों का व्यास लगभग 10^{-5} m था), तो विभिन्न दिशाओं से आण्विक टक्करों का अंतर पूर्णतया उपेक्षणीय नहीं होता है अर्थात् माध्यम (जल या कोई अन्य तरल) के कणों द्वारा निरंतर टकराने के बावजूद भी लटके हुए कणों को प्रदत्त आवेगों और बल-आघूर्णों का योग पूर्णतया शून्य नहीं होता । बल्कि किसी न किसी दिशा में नेट आवेग एवं बल-आघूर्ण होता है । अत: लटके हुए कण इधर-उधर टेढ़े-मेढ़े पथ पर गति करते हैं और यादृच्छया इधर-उधर संलोटन करते रहते हैं।

इस चित्र से, हम यह आशा करते हैं कि यदि लटके हुए कणों का आकार बहुत छोटा है या माध्यम का घनत्व बहुत कम है तो ब्राउनी गति में वृद्धि होगी । इसका कारण यह है कि अणुओं द्वारा लगाई गई टक्करों की संख्या कम हो जाती है और उनके यथार्थ निरसन से संयोगी विचलन में वृद्धि होती है अर्थात् ब्राउनी गति में वृद्धि होती है । इसी प्रकार, माध्यम के ताप में वृद्धि और श्यानता में कमी होने के कारण भी अणुओं की गति तीव्र होती है अर्थात् ब्राउनी गति में प्राकृतिक रूप से वृद्धि होती है । ब्राउनी गति का विस्तृत सिद्धांत सर्वप्रथम सन् 1905 ई. में अलबर्ट आइंस्टाइन द्वारा दिया गया था जिसकी पुष्टि फ्रांसीसी भौतिकविद् जीन पेरिन द्वारा किए गए प्रयोगों के आधार पर कुछ वर्षों बाद की गई । ब्राउनी गति की परिमाणात्मक व्याख्या (जिसके कारण एवोगैड्रो संख्या का निर्धारण हुआ) द्रव्य की अणुगतिक तस्वीर का विस्मयकारी पुष्टिकरण था ।

चित्र 11.8 ब्राउनी गति का पेरिन का प्रेक्षण । ब्राउनी कण का द्रव्यमान ~10^{-16}kg था और बिंदु दो मिनट के अंतराल के बाद कण की स्थिति प्रदर्शित करता है । ग्रिड का आमाप (साइज) 10^{-5} m है ।

▸ *उदाहरण 11.5* आपकी दृष्टि में, यदि निम्नलिखित प्रेक्षणों में से प्रत्येक ब्राउनी गति का एक उचित उदाहरण है, तो टिप्पणी कीजिए :

a) वायु में धुएं के अति सूक्ष्म कणों की तनिक टेढ़ी-मेढ़ी गति ।
b) शांत जल में तैरते कार्क के किसी टुकड़े की अनियमित गति ।
c) वायु में साबुन के बुलबुले की अनियमित गति ।
d) अपनी माध्य स्थिति के सापेक्ष छोटे दर्पण (नाजुक मरोड़ी धागे से निलंबित) के अनियमित कोणीय कंपन ।
e) मुख्यतया ऑक्सीजन से भरे सिलिंडर में जल के अणु की अनियमित गति (नोट: यह गति प्रेक्षणीय नहीं है)।
f) जल के फ्लास्क को नीचे से गर्म किए जाने पर फ्लास्क में उत्पन्न धाराएं ।

हल 'ब्राउनी गति' पद सामान्यत: उन वस्तुओं की गति के लिए सुरक्षित है जो उसके चारों ओर के माध्यम के अणुओं की यादृच्छिक बौछार के कारण होती है । उदाहरण (a), (d) तथा (e) इस श्रेणी से संबंधित हैं । यह पद उस गति को व्यक्त नहीं करता है जो उसके चारों ओर माध्यम के विभिन्न क्षेत्रों में दाब और/या ताप में परिवर्तन के कारण होती है । अत: उदाहरण (b), (c) व (f) ब्राउनी गति के गलत उदाहरण हैं। ◂

सारांश

1. दाब (P) आयतन (V) और परम ताप (T) में संबंध स्थापित करने वाली आदर्श गैस समीकरण है

$$PV = \mu RT = k_B NT$$

जहां μ गैस में मोलों की संख्या और N अणुओं की संख्या है। R तथा k_B सार्वत्रिक गैस नियतांक हैं ।

$$R = 8.314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} \qquad k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38\times10^{-23}\text{ J K}^{-1}$$

वास्तविक गैसें, आदर्श गैस समीकरण का अधिकाधिक पालन केवल उच्च ताप तथा न्यून दाब पर करती हैं ।

2. आदर्श गैस का अणुगति सिद्धांत के अनुसार, किसी आदर्श गैस के दाब का व्यंजक कुछ सरल कल्पनाओं के आधार पर निम्न है :

$$P = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$$

जहां n अणुओं का संख्या-घनत्व है । m अणु का द्रव्यमान और $\overline{v^2}$ अणु की माध्य वर्ग चाल है । दाब के व्यंजक को आदर्श गैस समीकरण से संयुक्त करके अणुगति के सिद्धांत से हम ताप की व्याख्या करते हैं ।

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

अर्थात्, किसी गैस का ताप, उसके अणु की औसत गतिज ऊर्जा की माप है।

3. किसी आदर्श गैस में अंतराणुक स्थितिज ऊर्जा नगण्य होने के कारण, उसकी कुल आंतरिक ऊर्जा गतिज ऊर्जा ही होती है । स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा E निम्न प्रकार व्यक्त की जाती है :

$$E = \frac{3}{2}k_B NT$$

इसे हम निम्न रूप में भी लिख सकते हैं

$$PV = \frac{2}{3}E$$

4. ताप T पर किसी गैस में मैक्सवैल के चाल-वितरण नियम के अनुसार

$$dN_v = 4\pi N a^3 e^{-bv^2} v^2 dv = n_v dv$$

$$a = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}, b = \frac{m}{2k_B T}$$

जहां N गैस में अणुओं की कुल संख्या है और dN_v चाल v और $v + dv$ के मध्य अणुओं की संख्या है । n_v का v के विरुद्ध आलेख मैक्सवैल का चाल वितरण संबंधी आरेख है।

5. वर्ग माध्य मूल चाल v_{rms} औसत चाल $\bar{v}$ और अधिकतम प्रसंभाव्य चाल v_m के व्यंजक निम्न हैं :

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}, \bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}, v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

6. ऊर्जा के सम विभाजन नियम के अनुसार यदि कोई निकाय परम ताप T पर साम्यावस्था में है तो कुल ऊर्जा, ऊर्जा अवशोषण के विभिन्न विधाओं में समान रूप से वितरित होती है और प्रत्येक विधा में ऊर्जा का औसत मान $\frac{1}{2}k_B T$ होता है । प्रत्येक स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि के संगत ऊर्जा अवशोषण का एक ही ढंग है और इसके संगत ऊर्जा $\frac{1}{2}k_B T$ होती है। प्रत्येक कांपनिक आवृत्ति के ऊर्जा अवशोषण के दो रूप (गतिज एवं स्थितिज) होते हैं और इनकी संगत ऊर्जा $2 \times \frac{1}{2}k_B T = k_B T$ होती है ।

7. ऊर्जा के सम विभाजन नियम के अनुसार, गैसों की (ग्राम-अणुक) विशिष्ट ऊष्माओं का अनुमान निम्न प्रकार लगाया जा सकता है :

एक-परमाणुक	$C_v = \frac{3}{2}R$	$C_p = \frac{5}{2}R$	$\gamma = \frac{5}{3}$
द्वि-परमाणुक (कांपनिक गति नहीं)	$C_v = \frac{5}{2}R$	$C_p = \frac{7}{2}R$	$\gamma = \frac{7}{5}$
बहु-परमाणुक (कांपनिक गति नहीं)	$C_v = 3R$	$C_p = 4R$	$\gamma = \frac{4}{3}$

अनेक गैसों की विशिष्ट ऊष्माओं के इन अनुमानित और प्रायोगिक मानों में अनुरूपता है जिसे गति के कांपनिक विधाओं को सम्मिलित करके और अधिक संशोधित किया जा सकता है।

8. किन्हीं दो क्रमिक संघट्टों के मध्य औसत दूरी, माध्य मुक्त पथ ($\bar{l}$) कहलाती है।

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

जहां n अणुओं का संख्या-घनत्व है और d अणु का व्यास है ।

9. ब्राउनी गति द्रव्य की अणुगतिक चित्र का एक आश्चर्यजनक पुष्टिकरण है ।

राशि	संकेत	मात्रक	विमाएं	टिप्पणी
दाब	P	Pa या N m^{-2}	$[ML^{-1}T^{-2}]$	अदिश
वर्ग माध्य मूल चाल	v_{rms}	m s^{-1}	$[LT^{-1}]$	
औसत चाल	$\bar{v}$	m s^{-1}	$[LT^{-1}]$	
अधिकतम प्रसंभाव्य चाल	v_m	m s^{-1}	$[LT^{-1}]$	
नियत दाब पर अणुक विशिष्ट ऊष्मा	C_p	J $mol^{-1}K^{-1}$	$[ML^2T^{-2}mol^{-1}K^{-1}]$	$C_p - C_v = R$ (आदर्श गैस)
नियत आयतन पर अणुक विशिष्ट ऊष्मा	C_v	J $mol^{-1}K^{-1}$	$[ML^2T^{-2}mol^{-1}K^{-1}]$	
नियत दाब पर एवं नियत आयतन पर विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात	γ	--	विमाहीन	
माध्य मुक्त पथ	$\bar{l}$	m	[L]	

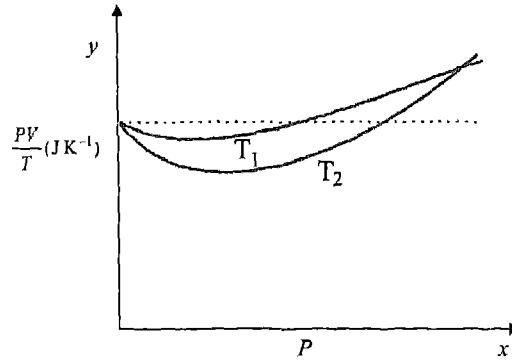
विचारणीय विषय

1. किसी गैस द्वारा दाब केवल बर्तन की दीवारों पर ही आरोपित नहीं किया जाता है अपितु, दाब का अस्तित्व हर जगह होता है । बर्तन के आयतन के अंदर, गैस की प्रत्येक परत साम्यावस्था में होती है क्योंकि परत के दोनों ओर दाब समान रूप से बना रहता है।
2. किसी गैस में अणुओं की टेढ़ी-मेढ़ी गति भी ब्राउनी गति है क्योंकि यह भी अणुओं के यादृच्छिक संघट्ट के कारण होती है। इस गति को देखा नहीं जा सकता है जबकि किसी परागकण ($\sim 10^{-5}$ m) की उपर्युक्त कारण से हो रही टेढ़ी-मेढ़ी गति को सूक्ष्मदर्शी द्वारा देखा जा सकता है।
3. हमें किसी गैस में अंतरा-अणुक दूरी के विषय में बढ़ा-चढ़ा कर नहीं सोचना चाहिए क्योंकि साधारण ताप व दाब पर, ठोसों और द्रवों में यह अंतरापरमाणुक दूरी की लगभग 10 गुना ही होती है ।
4. कभी-कभी ऊर्जा के समविभाजन के नियम को इस प्रकार अभिव्यक्त किया जाता है कि तापीय साम्यावस्था में प्रत्येक स्वातंत्र्य कोटि की ऊर्जा $\frac{1}{2}k_BT$ होती है । स्मरण रखिए कि किसी अणु के कुल ऊर्जा के व्यंजक में प्रत्येक द्विघात पद को एक स्वातंत्र्य कोटि का ही गिनना चाहिए । अत: प्रत्येक कंपनिक रूप में 2(1 नहीं) स्वातंत्र्य कोटियां होती हैं जिनके संगत ऊर्जा $2 \times \frac{1}{2}k_BT = k_BT$ होती है।
5. यद्यपि गैस में अणुओं की चाल काफी अधिक होती है परंतु ये इस अधिक चाल से लंबी सरलरेखीय दूरियां तय नहीं करते हैं । निरंतर संघट्ट और विचलन के कारण, अणुओं द्वारा लंबी दूरियों तक विसरण में लगा समय केवल आण्विक चाल द्वारा ही निर्धारित नहीं किया जाता है अपितु अन्य संघट्ट प्राचलों, जैसे आण्विक आकार तथा घनत्व आदि का भी इसमें ध्यान रखा जाता है।
6. किसी कमरे में वायु के सभी अणु, अत्यधिक चाल एवं लगातार संघट्ट के कारण अधोगति करते हुए फर्श पर स्थिर नहीं हो जाते हैं । साम्यावस्था में, कम ऊंचाइयों पर घनत्व में वृद्धि बहुत ही कम होती है (जैसे कि वातावरण में) । उपर्युक्त प्रभाव कम होने के कारण साधारण ऊंचाइयों पर अणुओं की स्थितिज ऊर्जा mgh उनकी औसत गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ से काफी कम होती है।
7. मैक्सवैल का चाल वितरण सममित नहीं बल्कि विषम होता है । परंतु यह वितरण पृथक् रूप से प्रत्येक वेग-घटक v_x, v_y व v_z के लिए $v_x = 0, v_y = 0, v_z = 0$ के परित: सममित होता है । ऐसा इसलिए माना गया हैं क्योंकि अक्षों की धनात्मक एवं ऋणात्मक दिशाएं पूर्णत: एक जैसी होती हैं ।
8. $\overline{v^2} = (\bar{v})^2$ पद सर्वदा सत्य नहीं होता है । किसी राशि के वर्ग का औसत आवश्यक नहीं है कि उस राशि के औसत के वर्ग के बराबर ही हो । यही कारण है कि मैक्सवैल के चाल वितरण में v_{rms} और $\bar{v}$ के मान भिन्न होते हैं ।

अभ्यास

11.1 सामान्य ताप व दाब पर ऑक्सीजन द्वारा ग्रहण आण्विक आयतन का वास्तविक आयतन से अनुपात निकालिए । ऑक्सीजन अणु की त्रिज्या लगभग 3Å लीजिए।

11.2 सामान्य ताप व दाब (STP) पर किसी आदर्श गैस के 1 मोल का आयतन 1 अणुक आयतन कहलाता है । सिद्ध करो कि यह 22.4 लीटर होता है।

11.3 नीचे दिए गए चित्र 11.9 में दो विभिन्न तापों पर ऑक्सीजन के 1.00×10^{-3} kg के PV/T व P के बीच खींचे गए दो ग्राफ दिए गए हैं

चित्र 11.9

(*i*) विंदुकित (dotted) वक्र क्या बताते हैं ।

(*ii*) कौन-सा सत्य है $T_1 > T_2$ या $T_1 < T_2$?

(*iii*) PV/T के किस मान के लिए वक्र y-अक्ष को काटता है ?

(*iv*) यदि हम 1.00×10^{-3} kg हाइड्रोजन के लिए इसी प्रकार के ग्राफ खींचें तो क्या PV/T के उसी मान के लिए वक्र y-अक्ष को काटेगा? यदि नहीं तो हाइड्रोजन के कितने द्रव्यमान के लिए PV/T का उतना ही मान आएगा (ग्राफ के कम दाब व अधिक ताप के क्षेत्र के लिए) । H_2 का अणु द्रव्यमान = 2.02 u, O_2 का अणु द्रव्यमान = 32.0 u, $R = 8.31$ J mol^{-1}K^{-1}) ।

11.4 एक ऑक्सीजन गैस के सिलिंडर का आयतन 30 लीटर है, उसका आरंभिक गैस दाब 15 atm और ताप 27 °C है । जब उसमें से कुछ ऑक्सीजन निकाल ली जाती है तो गेज दाब 11 atm हो जाता है और ताप 17 °C हो जाता है । सिलिंडर से निकली गैस की मात्रा ज्ञात कीजिए । $R = 8.3$ J mol^{-1}K^{-1}, O_2 का अणु द्रव्यमान = 32 u)।

11.5 1.0 cm^3 आयतन का एक वायु का बुलबुला 40 m झील की तली से ऊपर चढ़ता है, उसका ताप 12 °C है । जब वह झील के तल पर पहुंचता है तो उसका कितना आयतन होगा जहां पर ताप 35 °C है ।

11.6 25.0 m^3 धारिता के एक कमरे में 27 °C पर उपस्थित वायु के कुल अणुओं की गणना करो (O_2, N_2, जल वाष्प एवं अन्य सभी प्रकार के अणुओं को मिलाकर) । (दाब = 1 atm, $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1})

11.7 हीलियम परमाणु की तापीय ऊर्जा की गणना करो

(*i*) कमरे के ताप 27 °C पर (*ii*) सूर्य के पृष्ठ के ताप अर्थात् 6000 K पर, (*iii*) 10 मिलियन केल्विन ताप (तारों की कोर के अंदर का ताप) पर ($k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1})

11.8 बराबर धारिता के तीन बर्तनों में बराबर ताप एवं दाब पर गैसें भरी हैं। पहले बर्तन में एक-परमाणुक गैस निऑन है, दूसरे में द्वि-परमाणुक क्लोरीन गैस व तीसरे में यूरेनियम हेक्साफ्लोराइड (बहु-परमाणुक) गैस है । क्या तीनों बर्तनों में अपनी-अपनी गैसों के बराबर अणु होंगे ? क्या उनके अणुओं के वर्ग के माध्य का वर्गमूल वेग v_{rms} बराबर होगा। यदि नहीं तो किसमें v_{rms} सबसे अधिक होगा ।

11.9 किस ताप पर किसी सिलिंडर में ऑर्गन गैस के एक परमाणु की वर्ग माध्य मूल चाल, –20 °C पर हीलियम गैस के परमाणु की वर्ग माध्य मूल चाल के बराबर होगी । (ऑर्गन का परमाणु द्रव्यमान = 39.9 u और हीलियम का परमाणु द्रव्यमान = 4.0 u)

11.10 नाइट्रोजन गैस के एक सिलिंडर में 2 atm और 17 °C पर उसके अणुओं का माध्य मुक्त पथ और संघट्ट की आवृत्ति ज्ञात कीजिए । नाइट्रोजन अणु की त्रिज्या लगभग 1.0Å लीजिए । संघट्ट समय की दो संघट्ट के मध्य संघट्ट मुक्त पथ में लगे समय से तुलना कीजिए । (N_2 का अणु द्रव्यमान =28.0 u) ।

अतिरिक्त अभ्यास

11.11 एक मीटर लंबी पतले छिद्र वाली नली क्षैतिज रखी गई है जिसका एक सिरा बंद है । उसमें 76 cm लंबा पारे का स्तंभ वायु के 15 cm लंबे स्तंभ को रोकता है । क्या होगा जबकि नली के खुले सिरे को नीचे की ओर रखते हुए उर्ध्वाधर पकड़ा जाए ।

11.12 यदि कण का द्रव्यमान 10^{-6} kg तथा द्रव का ताप 27 °C हो तो ब्राउनी गति में निलंबित कणों की वर्ग माध्य मूल चाल ज्ञात कीजिए । क्या आप आशा करेंगे कि ताप नियत रखते हुए द्रव को भिन्न घनत्व और श्यानता वाले किसी अन्य द्रव से बदलने पर उत्तर बदल जाएगा? बोल्ट्ज़मान नियतांक $k_B = 1.38\times10^{-23}$ J K^{-1} ।

11.13 गुणात्मक आधार पर व्याख्या कीजिए कि ब्राउनी गति निम्नलिखित में किस सीमा तक प्रभावित होती है ?

(*i*) ब्राउनी कण के साइज से

(*ii*) माध्यम के घनत्व से

(*iii*) माध्यम के ताप से

(*iv*) माध्यम की श्यानता से

11.14 ब्राउनी गति के एक प्रयोग में मरोड़ी लोलक (1.8×10^{-17}J/rad^2 मरोड़ी नियतांक वाले पतले मरोड़ी तंतु पर लगे 1mm^2 क्षेत्रफल का छोटा दर्पण) का प्रयोग करके कोणीय विस्थापन θ का माध्य मान लगभग शून्य प्राप्त किया गया और θ में विक्षेपण, अर्थात् θ का वर्ग माध्य मान 2.6×10^{-4} rad^2 पाया गया । इस आंकड़े से बोल्ट्ज़मान नियतांक का मान ज्ञात कीजिए तथा इसकी सही मान से तुलना कीजिए । ताप 3000 K है । [संकेत: संबंध $(1/2)\alpha<\theta^2>=(1/2)k_BT$ का उपयोग कीजिए जहां α मरोड़ी नियतांक है । मरोड़ी लोलक की माध्य स्थितिज ऊर्जा $(1/2)\alpha<\theta^2>$ है । 'ऊर्जा के समविभाजन नियम' के अनुसार तापीय संतुलन में यह $\frac{1}{2}k_BT$ के बराबर होती है।

11.15 नियत आयतन पर किसी निश्चित धातु की विशिष्ट ऊष्मा लगभग 0.1cal/g °C है । इसके क्लोराइड का रासायनिक सूत्र लिखिए जबकि इसमें 0.345 अंश धातु हो । [संकेत: धातु का अनुमानतः परमाण्वीय द्रव्यमान निकालने के लिए ड्यूलांग और पेटिट के नियम का उपयोग कीजिए । तब इसके रासायनिक सूत्र के सरल हल पर आने के लिए आंकड़े के दूसरे भाग का उपयोग कीजिए । इसके परमाण्वीय द्रव्यमान का अधिक शुद्ध मान प्राप्त करने के लिए इसका पुनः उपयोग कर सकते हैं । क्लोरीन का परमाण्वीय द्रव्यमान 35.5 u है ।]

11.16 किसी निश्चित उपकरण से हाइड्रोजन की विसरण दर का औसत मान 28.7 $cm^3 s^{-1}$ है । समान परिस्थितियों में किसी दूसरी गैस का विसरण 7.2 $cm^3 s^{-1}$ की औसत दर से होता है । गैस की पहचान कीजिए।

[**संकेत** : ग्राहम के विसरण नियम $R_1/R_2 = \sqrt{M_2/M_1}$ का उपयोग कीजिए, जहां R_1, R_2 गैस 1 व 2 के विसरण की दर है तथा M_1 व M_2 क्रमशः उनके आण्विक द्रव्यमान हैं । यह नियम अणुगति सिद्धांत का सरल परिणाम है ।]

11.17 द्रवों में निलंबित कणों की ब्राउनी गति के लिए निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(*i*) निलंबित कणों का प्रारूपी साइज क्या होना चाहिए? कणों का साइज बहुत अधिक छोटा (मान लीजिए परमाणु विमा, 10^{-10} m जितना) अथवा बहुत अधिक बड़ा (मान लीजिए 1m की कोटि का) क्यों नहीं होना चाहिए ?

(*ii*) द्रव के अणुओं का निलंबित कणों के साथ टकराना यादृच्छिक है । इसलिए हमको निलंबित कणों के साथ सभी दिशाओं से टकराने वाले अणुओं की संख्या बराबर माननी चाहिए । कुल आवेग शून्य क्यों नहीं होता है ?

(*iii*) क्या निलंबित कणों के समुच्चय को भारी अणुओं की गैस समझा जा सकता है? यदि ऐसा है तो इस गैस का ताप कितना है जबकि द्रव का ताप T है ?

11.18 (*i*) साधारणतया ब्राउनी गति को परमाणुओं के अस्तित्व का अकाट्य प्रमाण (यद्यपि आवश्यक रूप से अप्रत्यक्ष है, क्योंकि परोक्ष रूप में परमाणु को 'देखने' की हम कभी भी आशा नहीं कर सकते) माना जाता है । क्या आप इस विचार से सहमत हैं? ये रासायनिक संयोग के नियमों अथवा साधारण ताप पर गैसों और ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा से प्राप्त किए प्रमाणों से अच्छा क्यों है ?

(*ii*) "ब्राउनी गति प्रेक्षणीय है क्योंकि एवोगैड्रो संख्या सीमित है ।" इस कथन पर टिप्पणी कीजिए ।

11.19 साम्यावस्था में किसी गैस के घनत्व और दाब अपने संपूर्ण आयतन में एकसमान हैं । यह पूर्णतया सत्य तभी है जबकि कोई भी बाह्य बल न हो । उदाहरण के लिए, गुरुत्व से प्रभावित किसी गैस स्तंभ का घनत्व (और दाब) एकसमान नहीं होता है । जैसा कि आप आशा करेंगे इसका घनत्व ऊंचाई के साथ घटता है । परिशुद्ध निर्भरता 'वातावरण के नियम' $n_2 = n_1 \exp\left[-\frac{mg}{k_B T}(h_2 - h_1)\right]$ से दी जाती है जहां कि n_2, n_1 क्रमशः h_2 व h_1 ऊंचाइयों पर संख्यात्मक घनत्व को प्रदर्शित करते हैं । इस संबंध का उपयोग द्रव स्तंभ के निलंबन के अवसादन साम्य के लिए समीकरण $n_2 = n_1 \exp\left[-\frac{mg N_A}{RT}\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)(h_2 - h_1)\right]$ व्युत्पन्न करने के लिए कीजिए, जहां ρ निलंबित कण का घनत्व तथा ρ' चारों तरफ के माध्यम का घनत्व है । N_A एवोगैद्रो संख्या, तथा R सार्वत्रिक गैस नियतांक है । [संकेत : निलंबित कण के आभासी भार को जानने के लिए आर्किमिडीज के सिद्धांत का उपयोग कीजिए ।]

11.20 नीचे दिए गए आंकड़े 22 °C पर पानी में निलंबित गम-रेजिन (गोंद-राल) के लिए हैं । निलंबन के एक कण की औसत त्रिज्या 0.2 μm (1μm = 10^{-6} m), एक कण का औसत द्रव्यमान = 6.2×10^{-17} kg, एक परत में औसत सांद्रता किसी परत के औसत सांद्रता स्तर के संदर्भ में प्रति इकाई क्षेत्रफल में 43 कण, और 11μm नीचे एक परत के इकाई क्षेत्रफल में 100.3 कण । इस आंकड़े से एवोगैद्रो संख्या का मान निकालिए और अपने उत्तर की सही मान से तुलना कीजिए ।

11.21 नीचे कुछ ठोसों व द्रवों के घनत्व दिए गए हैं । उनके परमाणुओं के आकारों का आकलन (लगभग) कीजिए ।

पदार्थ	परमाण्वीय द्रव्यमान (u)	घनत्व (10^3 kg m^{-3})
कार्बन (हीरा)	12.01	2.22
सोना	197.0	19.32
नाइट्रोजन (द्रव)	14.01	1.00
लिथियम	6.94	0.53
फ्लोरीन (द्रव)	19.00	1.14

[संकेत : मान लीजिए कि ठोस अथवा द्रव प्रावस्था में परमाणु 'दृढ़ता से बंधे' हैं, तथा एवोगैद्रो संख्या का ज्ञात मान इस्तेमाल कीजिए । फिर भी आपको अपने द्वारा विभिन्न परमाण्वीय आकारों के लिए प्राप्त वास्तविक संख्याओं का बिलकुल अक्षरशः प्रयोग नहीं करना चाहिए क्योंकि दृढ़ संवेष्टन सन्निकटन की रूक्षता के परमाणवीय आकार कुछ Å के परास में हैं ।]

11.22 (*a*) वह सबसे सरल प्रमाण क्या है जिसे आप ये समझने के लिए सोच सकते हैं कि परमाणु बिंदु कण नहीं होते हैं, बल्कि निश्चित (अशून्य) साइज के होते हैं ।

(*b*) क्या परमाण्वीय आकार परमाण्वीय द्रव्यमान बढ़ने के साथ-साथ समान रूप से बढ़ता है ? यदि नहीं, तो क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि क्यों नहीं ?

(*c*) किसी परमाणु, मान लीजिए हाइड्रोजन परमाणु, का मूल रूप से आकार किस प्रकार प्राप्त किया जाता है ? हाइड्रोजन परमाणु का आकार इसके वास्तविक आकार (0.5Å) से, मान लीजिए 100 गुना बड़ा या छोटा क्यों नहीं होता है ?

[नोट : अन्य बातों के साथ-साथ, इस प्रश्न ने नील्स बोर को हाइड्रोजन परमाणु के उनके सुप्रसिद्ध क्वांटम-मॉडल को प्राप्त करने से पहले परेशान किया था ।]

अध्याय 12

ऊष्मागतिकी

12.1 भूमिका

हम सभी लोगों को ऊष्मा व ताप संबंधी धारणाओं की सामान्य अनुभूति है। ताप किसी पिण्ड की उष्णता की माप होती है। उबलते हुए पानी से भरी केतली बर्फ से भरे किसी बॉक्स की अपेक्षा अधिक गरम होती है। प्राय: हमारा सामना ऐसी प्रक्रियाओं से होता है जिनमें कार्य ऊष्मा में परिवर्तित होता है, तथा विलोमत: ऊष्मा भी कार्य में परिवर्तित होती है। शीत ऋतु में जब हम हथेलियों को परस्पर रगड़ते हैं तो हमें गरमी की अनुभूति होती है क्योंकि इस प्रक्रिया में किया गया कार्य ऊष्मा उत्पन्न करता है। इसके विपरीत, भाप इंजन में वाष्प की ऊष्मा का उपयोग लाभप्रद कार्य को संपन्न करने में अर्थात् पिस्टन को गति देने में होता है तथा इसके परिणामस्वरूप रेलगाड़ी के पहिए घूमते हैं।

भौतिकी में ऊष्मा, ताप, कार्य आदि की धारणाओं को अधिक सावधानीपूर्वक परिभाषित करने की आवश्यकता पड़ती है। ऐतिहासिक रूप से ऊष्मा की सटीक अवधारणा तक पहुंचने के लिए पर्याप्त समय लगा। आधुनिक धारणा के पूर्व ऊष्मा को ऐसे सूक्ष्म अदृश्य तरल के रूप में समझा गया जो किसी पदार्थ के रंध्रों में भरा रहता है। गरम व ठंडे पिंडों के पारस्परिक संपर्क में आने पर यह तरल (जिसे कैलॉरिक कहते हैं) ठंडे पिंड से अपेक्षाकृत गरम पिंड में बहने लगता है। यह बिलकुल वैसा ही है जैसा उस समय होता है जब भिन्न-भिन्न ऊंचाइयों तक पानी से भरी दो टंकियों को एक क्षैतिज नल से जोड़ दिया जाता है। जल का बहाव उस समय तक निरंतर बना रहता है जब तक दोनों टंकियों के तल समान न हो जाएं। इसी के समान ऊष्मा की 'कैलॉरिक' धारणा में ऊष्मा उस समय तक प्रवाहित होती रहती है जब तक कि 'कैलॉरिक तल' (अर्थात् ताप) समान नहीं हो जाते।

इसी बीच, ऊष्मा को ऊर्जा के रूप में कल्पित करने की आधुनिक अवधारणा के कारण इसके (ऊष्मा के) तरल स्वरूप को नकार दिया गया। इस संबंध में 1798 में बेंजामिन थॉमसन (जिन्हें काउन्ट रम्फोर्ड भी कहते हैं) ने एक महत्त्वपूर्ण प्रयोग भी किया। इन्होंने पाया कि पीतल की तोप में छेद करते समय इतनी अधिक ऊष्मा उत्पन्न होती है कि उससे पानी उबल सकता है। इससे अधिक महत्त्वपूर्ण तथ्य यह प्राप्त हुआ कि प्रयोग में उत्पन्न ऊष्मा का परिमाण उस कार्य पर निर्भर करता था जो घोड़े ड्रिल को घुमाने में करते थे न कि ड्रिल के पैनेपन पर। कैलॉरिक स्वरूप के अनुसार अधिक पैनी ड्रिल को रंध्रों से अधिक ऊष्मा तरल बाहर निकालना चाहिए, किंतु प्रयोग में यह सही नहीं पाया गया। प्रेक्षणों की सबसे अधिक स्वाभाविक व्याख्या यह थी कि ऊष्मा ऊर्जा का ही एक रूप है तथा प्रयोग से भी यह प्रमाणित हो गया कि ऊर्जा एक रूप से दूसरे रूप में अर्थात् कार्य से ऊष्मा में रूपांतारित हो जाती है।

ऊष्मागतिकी भौतिकी की वह शाखा है जो ऊष्मा तथा ताप की अवधारणा एवं ऊष्मा के अन्य प्रकार की ऊर्जाओं में अंतरारूपान्तरण की अवधारणा के विषय में बताती है। ऊष्मागतिकी एक स्थूल विज्ञान है, क्योंकि यह किसी निकाय की स्थूल प्रकृति पर विचार करती है न कि द्रव्य की आण्विक संरचना पर। वास्तव में, इससे संबंधित अवधारणाओं तथा नियमों का प्रतिपादन 19वीं शताब्दी में उस समय हुआ था जब द्रव्य के आण्विक स्वरूप को दृढ़तापूर्वक प्रमाणित नहीं किया गया था। ऊष्मागतिकी के वर्णन में निकाय के अपेक्षाकृत कुछ ही स्थूल चर समाहित होते हैं जो सामान्य अनुभव पर आधारित हैं तथा जिन्हें प्रत्यक्ष रूप में मापा जा सकता है। उदाहरणार्थ, किसी गैस के सूक्ष्म वर्णन में उसकी रचना करने वाले अगणित अणुओं के निर्देशांकों एवं वेगों का निर्धारण आवश्यक होता है। जैसा कि गैसों के अणुगति सिद्धांत का विवरण बहुत विस्तृत नहीं होता फिर भी इसमें अणुओं के वेगों का विवरण समाहित होता है। इसके विपरीत किसी गैस के ऊष्मागतिकीय विवरण में आण्विक वर्णन पूर्ण रूप से नकार दिया जाता है। इसके अतिरिक्त ऊष्मागतिकी में किसी गैस की अवस्था दाब, आयतन, ताप, द्रव्यमान तथा संगठन जैसे ऐसे स्थूल चरों द्वारा निर्धारित होती है जिन्हें हम अपनी इंद्रियों से अनुभव करते हैं और माप सकते हैं*।

यांत्रिकी एवं ऊष्मागतिकी के बीच भेद आपके मस्तिष्क में भलीभांति आ जाना चाहिए। यांत्रिकी में हमारी रुचि बलों तथा बल आघूर्णों के प्रभाव में गति कर रहे कणों एवं पिण्डों में होती है। ऊष्मागतिकी में संपूर्ण निकाय की गति पर विचार नहीं किया जाता। इसकी रुचि पिण्ड की आंतिरक स्थूल अवस्था में होती है। जब बंदूक से गोली दागते हैं तब गोली की आण्विक अवस्था (विशेषकर गतिज ऊर्जा) में परिवर्तन होता है, उसके ताप में नहीं। जब गोली लकड़ी में धँसकर रुक जाती है तो गोली की गतिज ऊर्जा ऊष्मा में रूपांतरित हो जाती है जिससे गोली तथा उसके चारों ओर की लकड़ी की सतहों का ताप परिवर्तित हो जाता है। ताप गोली की आंतरिक गति (जो अव्यवस्थित है) की ऊर्जा से संबंधित होता है न कि गोली की संपूर्ण गति से।

12.2 तापीय साम्य

यांत्रिकी में साम्यावस्था से तात्पर्य है कि निकाय पर नेट बाह्य बल व बल आघूर्ण शून्य हैं। ऊष्मागतिकी में साम्यावस्था पद का अर्थ भिन्न संदर्भ में दृष्टिगोचर होता है : निकाय की अवस्था को हम उस समय साम्यावस्था में कहते हैं जब निकाय को अभिलक्षणित करने वाले स्थूल चर समय के साथ परिवर्तित नहीं होते। उदाहरणार्थ, किसी पर्यावरण से पूर्णतः ऊष्मारोधी बंद दृढ़ पात्र में भरी कोई गैस ऊष्मागतिक रूप से तब साम्यावस्था में होगी जब उसके दाब, आयतन, ताप, द्रव्यमान के स्थिर परिमाण तथा संगठन समय के साथ परिवर्तित न हों।

कोई निकाय साम्यावस्था में है कि नहीं व्यापक रूप में यह चारों ओर के परिवेश तथा उस दीवार की प्रकृति पर निर्भर करता है जो निकाय को परिवेश से पृथक् करती है। कल्पना कीजिए कि दो गैसें A व B दो भिन्न-भिन्न पात्रों में भरी हैं। प्रयोग द्वारा हमें पता है कि किसी गैस के दिए हुए द्रव्यमान के दाब व ताप को उसके दो स्वतंत्र चरों के रूप में चुना जा सकता है। मान लीजिए कि गैसों के दाब व आयतन क्रमशः (P_A, V_A) तथा (P_B, V_B) हैं। कल्पना कीजिए कि पहले दोनों निकाय पास-पास हैं परंतु उन्हें किसी रुद्धोष्म दीवार-एक ऊष्मारोधी दीवार द्वारा एक दूसरे से पृथक् रखा गया है। इस दीवार के कारण ऊर्जा (ऊष्मा) एक पात्र से दूसरे पात्र में नहीं जा पाती है। निकायों को भी शेष परिवेश से इसी प्रकार की रुद्धोष्म दीवार से पृथक् रखते हैं। इस व्यवस्था का आरेखीय चित्रण [12.1(a)] में दिया गया है। यहां यह पाया गया है कि (P_A, V_A) के किसी भी संभावित युग्म का मान (P_B, V_B) के किसी भी संभव युग्म के मान के साथ साम्यावस्था में होगा। पुनः कल्पना कीजिए कि रुद्धोष्म दीवार को एक ऊष्मा-पार्थ-दीवार से प्रतिस्थापित कर दिया गया है - यह दीवार (ऊष्मा) ऊर्जा को एक निकाय से दूसरे निकाय में जाने देती है। ऐसा करने में यह देखा गया है कि निकायों A व B के स्थूल चर स्वतः उस समय तक परिवर्तित होते हैं जब तक कि दोनों निकाय साम्यावस्था की स्थिति प्राप्त नहीं कर लेते। इसके पश्चात् उनकी अवस्था में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इस स्थिति को चित्र [12.1(b)] में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि दोनों गैसों के दाब व आयतन संबंधी चर परिवर्तित होकर क्रमशः (P'_A, V'_A) तथा (P'_B, V'_B) हो जाते हैं ताकि A व B की नई अवस्थाएं पुनः एक दूसरे की साम्यावस्था में हो जाती हैं**। एक निकाय से दूसरे निकाय में अब और ऊर्जा का प्रवाह नहीं होता। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि निकाय A, निकाय B के साथ तापीय साम्य में है।

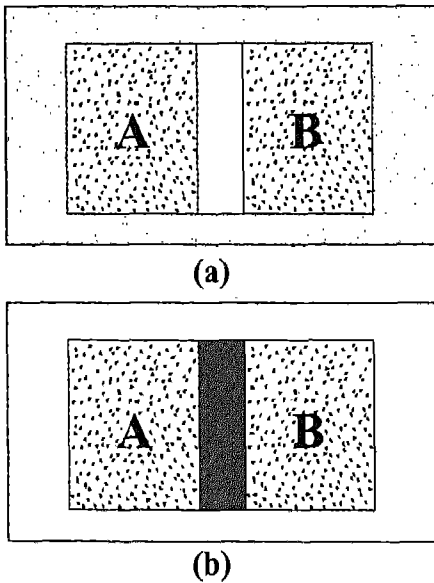
दो निकायों के मध्य की साम्यावस्था की स्थिति क्या अभिलक्षित करती है ? आप अपने अनुभव से उत्तर का अनुमान लगा सकते हैं। तापीय साम्य में, दो निकायों के ताप समान होते हैं। हम अध्याय 11 में ताप की धारणा का परिचय दे चुके हैं, जहां हमने देखा है कि किस प्रकार ताप गैस के अणुओं की माध्य

* ऊष्मागतिकी में अन्य ऐसे चर भी निहित होते हैं जो हमारी इंद्रियों को इतने सुस्पष्ट नहीं होते (उदाहरणार्थ, एंट्रॉपी, एंथाल्पी (संपूर्ण ऊष्मा), आदि जिनके विषय में आप उच्च कक्षाओं में पढ़ेंगे), किंतु ये सभी स्थूल चर हैं।

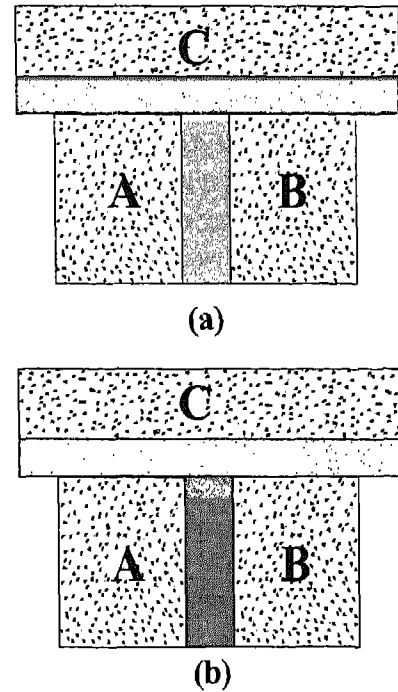
** यह आवश्यक नहीं है कि दोनों चर बदलें। ऐसा प्रतिबंधों पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए, यदि गैस स्थिर आयतन वाले पात्र में भरी हो तो तापीय साम्य के लिए केवल गैसों के दाब को परिवर्तित होना चाहिए।

गतिज ऊर्जा से संबंधित है । ऊष्मागतिकी में ताप की अवधारणा तक हम कैसे पहुंचते हैं ? ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि का नियम इसकी ओर संकेत करता है ।

12.3 ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि नियम

कल्पना कीजिए कि दो निकाय A व B एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक् हैं । इनमें से प्रत्येक एक तीसरे निकाय C से एक सुचालक दीवार द्वारा संपर्क में हैं [चित्र 12.2(a)] । निकायों की अवस्थाएं (अर्थात् उनके स्थूल चर) तब तक परिवर्तित होंगी जब तक A व B दोनों निकाय C के साथ तापीय साम्य में नहीं आ जाते हैं । जब ऐसा हो जाए तो कल्पना कीजिए कि A व B के मध्य की रुद्धोष्म दीवार एक सुचालक दीवार से प्रतिस्थापित कर दी जाती है तथा C को A व B से किसी रुद्धोष्म दीवार से पृथक् कर दिया जाता है [चित्र 12.2(b)] । ऐसा देखा जाता है कि A व B की अवस्थाएं अब और नहीं बदलतीं अर्थात् वे दोनों अब तापीय साम्य में होती हैं । यह प्रेक्षण ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि विचार का आधार बना । यह नियम बतलाता है कि *यदि दो निकाय किसी तीसरे निकाय के साथ पृथक्-पृथक् तापीय साम्य में हैं तो वे परस्पर भी तापीय साम्य में होते हैं ।* यहां यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि ऊष्मागतिकी के प्रथम व द्वितीय नियम की अभिव्यक्ति तथा इस विधि से क्रमांकन के बहुत समय बाद 1931 में आर.एच. फाउलर ने शून्य कोटि नियम का प्रतिपादन किया ।

चित्र 12.1 (a) (दो गैसों के) निकाय A व B एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक् हैं : इस दीवार से ऊष्मा आर-पार नहीं जा पाती । (b) यही निकाय A व B एक ऊष्मा-पार्थ दीवार से पृथक् दर्शाए गए हैं । यह एक चालक दीवार होती है जिससे ऊष्मा एक निकाय से दूसरे में चली जाती है । इस उदाहरण में तापीय साम्य यथोचित समय में प्राप्त हो जाता है ।

शून्य कोटि नियम से यह संकेत मिलता है कि जब दो निकाय A व B परस्पर तापीय साम्य में होते हैं, तो ऐसी कोई भौतिक राशि है जो दोनों निकायों के लिए समान मान रखती है । यह ऊष्मागतिक चर, जिसका मान तापीय साम्य वाले निकायों के लिए समान होता है, ताप (T) कहलाता है । अत: यदि A व B साम्यावस्था में तीसरे निकाय C से पृथक् हैं तो $T_A = T_C$ तथा $T_B = T_C$ । इसका तात्पर्य यह है कि $T_A = T_B$ अर्थात् निकाय A व B स्वयं भी तापीय साम्य में हैं ।

शून्य कोटि नियम के माध्यम से हमने विधिवत ताप की अवधारणा विकसित की है । हमारे सामने पुन: एक प्रश्न उत्पन्न होता है : भिन्न-भिन्न पिंडों के ताप के लिए हम अंकिक मानों का निर्धारण कैसे करें ? तापमिति इस मौलिक प्रश्न से संबंध रखती है जिसके विषय में हम अगले अनुभाग में अध्ययन करेंगे ।

चित्र 12.2 (a) निकाय A व B जो एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक् हैं जबकि इनमें से प्रत्येक एक तीसरे निकाय C से एक सुचालक दीवार द्वारा संपर्क में है । (b) A व B के मध्य की रुद्धोष्म दीवार को किसी सुचालक दीवार से प्रतिस्थापित किया गया है जबकि C को A व B से रुद्धोष्म दीवार से पृथक् दर्शाया गया है ।

12.4 तापमिति

हमें इसकी अनुभूति होनी चाहिए कि विभिन्न पिंडों के ताप के मानों का निर्धारण पूर्णत: स्वेच्छ होता है, अर्थात् ऐसा करना अपनी इच्छा पर इस शर्त के साथ निर्भर करता है कि हम यह सुनिश्चित कर लें कि जो पिंड तापीय साम्य में हैं उनके ताप समान हैं किंतु

जो तापीय साम्य में नहीं हैं उनके ताप भिन्न-भिन्न हैं। इस प्रकार ताप के अनेक मापक्रम संभव हैं।

ताप पैमाने के निर्माण में हम दो स्थिर बिंदुओं को चुनते हैं अर्थात् हम दो पूर्ण परिभाषित ऊष्मागतिक अवस्थाओं का चुनाव करते हैं तथा उनके तापों के लिए दो विवेकाधीन ढंग से चुने गए अंकों का निर्धारण करते हैं। उदाहरणार्थ, मूल सेल्सियस मापक्रम में बर्फ-जल तथा जल-वाष्प की साम्य अवस्थाओं को (दोनों 1 वायुमंडलीय दाब पर) दो स्थिर बिंदुओं के रूप में चुनते हैं तथा इनके क्रमशः 0 °C तथा 100 °C ताप निर्धारित करते हैं। ध्यान देने योग्य बात यह है कि दो स्थिर बिंदुओं का चुनाव अति आवश्यक है। इनमें से एक मापक्रम के मूल बिंदु को निर्धारित करता है तथा दूसरे से मापक्रम के मात्रक के आकार का निर्धारण होता है। निःसंदेह हम इन दो स्थिर बिंदुओं के लिए कोई दूसरे ताप भी निर्धारित कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, फारेनहाइट तापक्रम में इन स्थिर बिंदुओं का मान क्रमशः 32 °F तथा 212 °F है। इस प्रकार, हम देखते हैं कि दोनों मापक्रमों में मूल बिंदु तथा मात्रक का आकार भिन्न-भिन्न है।

कोई भी ताप मापने की युक्ति (तापमापी) किसी मापने योग्य ऐसे गुणधर्म (जिसे हम तापमापीय गुणधर्म कहते हैं) का उपयोग करती है जो ताप के साथ परिवर्तित होता है। उदाहरणार्थ, यह गुणधर्म लंबाई, आयतन, दाब वैद्युत-प्रतिरोध, ताप वैद्युत वाहक बल, विकिरित शक्ति आदि में से कुछ भी हो सकता है। कल्पना कीजिए कि हम वैद्युत प्रतिरोध को तापमापीय गुणधर्म के रूप में चुनते हैं। सबसे पहले जैसा कि हम ऊपर वर्णन कर चुके हैं, दो स्थिर बिंदुओं (0 °C तथा 100 °C) पर प्रतिरोध तापमापी के प्रतिरोध R_0 व R_{100} मापते हैं। इसके पश्चात् प्रतिरोध तापमापी को उस पिण्ड के संपर्क में रखते हैं जिसका ताप मापना है। मान लीजिए कि यह ताप R_t है। हम मानते हैं कि तापमापीय गुणधर्म (प्रतिरोध) ताप के साथ रैखिक रूप से परिवर्तित होता है। इस प्रकार पिण्ड का ताप निम्नलिखित रैखिक संबंध से व्यक्त किया जाएगा :

$$\frac{t_R}{100} = \frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0} \qquad (12.1)$$

इसी प्रकार की विधि हम उस तापमापी में भी अपना सकते हैं जिसमें ताप वैद्युत वाहक बल (ε) का तापमापीय गुणधर्म* के रूप में उपयोग करते हैं। इस उदाहरण में उसी पिण्ड का ताप t_ε पहले ही की भांति निम्नलिखित प्रकार के रैखिक संबंध से व्यक्त होगा :

$$\frac{t_\varepsilon}{100} = \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_0}{\varepsilon_{100} - \varepsilon_0} \qquad (12.2)$$

इस बात पर ध्यान दीजिए कि समीकरणों (12.1) तथा (12.2) के रैखिक संबंध सन्निकटन के कारण नहीं हैं। ये दोनों तापमापियों के ताप मापक्रमों को **परिभाषित करने वाले संबंध** है**। निःसंदेह, हम दोनों तापमापियों के लिए भिन्न स्थिर बिंदु चुन सकते थे। किंतु यदि दोनों तापमापियों के लिए स्थिर बिंदु (तथा उनके लिए निर्धारित ताप) समान हैं तो भी सामान्यतया t_R का मान t_ε से भिन्न होगा। प्रत्येक तापमापी अपने ढंग से परिशुद्ध होता है, तथापि एक तापमापी से ज्ञात किए ताप दूसरे तापमापी द्वारा मापे गए तापों से, व्यापक रूप से, भिन्न होंगे। इस प्रकार, जितनी ताप मापने की युक्तियां होंगी उतने ही ताप मापक्रम भी होंगे। यहां तक कि किसी दिए गए प्रकार की युक्ति के लिए भी ताप मापक्रम युक्ति के पदार्थ तथा उसकी अन्य विशिष्टताओं पर निर्भर करेगा। इस प्रकार, किसी प्रतिरोध तापमापी का t_R प्रतिरोधक के पदार्थों पर निर्भर करेगा तथा किसी तापयुग्म द्वारा मापा गया t_ε उन पदार्थों पर निर्भर करेगा जिनसे तापयुग्म निर्मित हुआ है।

क्या कोई ऐसा उपाय है कि जिससे ऐसे ताप मापक्रम को बनाया जा सके जो मापने वाली युक्ति की विशिष्टताओं पर निर्भर न करे ? इस प्रश्न का सकारात्मक उत्तर पाने के लिए आदर्श गैस ताप मापक्रम को एक लंबी यात्रा तय करनी पड़ी है। अनुभाग 12.6 में इस मापक्रम को परिभाषित करने से पूर्व हम परम ताप की धारणा का परिचय देंगे।

12.5 परम ताप

ताप के साथ परिवर्तित होने वाले गैसों के व्यवहार संबंधी प्रेक्षणों से परम ताप की धारणा विकसित हुई। विशेष रूप से स्थिर दाब पर किसी गैस के निश्चित द्रव्यमान के आयतन में ताप t के साथ रैखिक रूप से वृद्धि होती है, अर्थात्

$$V = A\,(t - T_0) \qquad (12.3)$$

समीकरण (12.3) के साथ महत्त्वपूर्ण बात यह है कि T_0 गैस पर निर्भर नहीं करता वरन् यह चुने गए ताप मापक्रम पर निर्भर करता है। सेल्सियस मापक्रम के लिए $\alpha = -273.15$ °C है। इससे यह संकेत मिलता है कि हम एक नए ताप T को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं :

$$T = t_c + 273.15 \qquad (12.4)$$

इस प्रकार समीकरण (12.3) को सरल रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं

$$V = AT \qquad (12.5)$$

यह **चार्ल्स का नियम** कहलाता है। स्थिर आयतन पर भी हमें दाब व ताप से संबंधित इसी प्रकार का संबंध ($P \propto T$) प्राप्त

* ताप-वैद्युत के विषय में आप कक्षा XII में अध्ययन करेंगे।

** इन समीकरणों में दृष्टिगोचर होने वाला ताप (t) यदि किसी अन्य तापमापी द्वारा परिभाषित किया जाता है तो दोनों सन्निकट होंगे।

होता है। जैसा कि हम जानते हैं, यह संबंध तथा **बायल का नियम**, PV = नियतांक (स्थिर ताप पर) अध्याय 11 में चर्चित गैस समीकरण : $PV = \mu RT$ में समाहित है। वास्तविक गैसें इन संबंधों का लगभग पालन करती हैं। सन्निकटन कम दाबों व उच्च तापों पर अधिक अच्छा होता है। चार्ल्स का नियम ऊपर परिचय कराए गए ताप T की भौतिक व्याख्या प्रस्तावित करता है। जैसे $T \to 0$ (अर्थात् T शून्य की ओर अग्रसित होता है), आदर्श गैस का आयतन शून्य की ओर अग्रसित होता जाता है। इस प्रकार $T = 0$ संभावित न्यूनतम परम ताप को व्यक्त करता है, क्योंकि $T = 0$ के नीचे V का मान ऋणात्मक हो जाएगा जो अप्राकृतिक है। इसी कारण T को परम ताप कहते हैं। चूंकि आदर्श गैस एक परिकल्पित सत्ता है और वास्तविक गैसें सभी तापों पर चार्ल्स के नियम का पालन नहीं करतीं, इसलिए यह ताप के परम शून्य के अस्तित्व का सांकेतिक तर्क मात्र है। अपने उद्देश्य के लिए ताप का परम शून्य वह ताप माना जा सकता है जहां प्रकृति के प्रत्येक पदार्थ में न्यूनतम आण्विक क्रियाशीलता की संभावना होती है।

समीकरण (12.4) में ताप के परम मापक्रम के मात्रक का वही आकार होता है जो सेल्सियस मापक्रम के मात्रक का होता है; दोनों मापक्रमों में अंतर केवल उनके उद्गम में है। समीकरण (12.4) का परम ताप T कैल्विन ताप कहलाता है तथा इसे K से व्यक्त करते हैं। इस प्रकार परम ताप 0 K या –273.15 °C होता है। इस बात पर ध्यान देना चाहिए कि केल्विन मापक्रम ही केवल एक संभव ताप का मापक्रम नहीं होता। हम यदि मापक्रम के मात्रक का आकार भिन्न मान लें, तो हमें दूसरे प्रकार के ताप के परम मापक्रम मिल जाएंगे। जैसा कि इन सभी परम मापक्रमों का शून्य वही (अर्थात् प्रकृति में संभावित न्यूनतम ताप) होगा।

हम पहले इसका उल्लेख कर चुके हैं कि किसी भी ताप मापक्रम को परिभाषित करने के लिए दो स्थिर बिंदुओं की आवश्यकता होती है। आधुनिक तापमिति में जल के त्रिबिंदु को एक स्थिर बिंदु लिया जाता है। जल का त्रिबिंदु उस अवस्था को व्यक्त करता है जहां जल की तीनों प्रावस्थाएं– ठोस, द्रव व वाष्प– साम्यावस्था में सहअस्तित्व में रहती हैं। यह एक अद्‌वितीय ताप व दाब से अभिलक्षित होता है। यही कारण है कि इसे पारंपरिक स्थिर बिंदुओं, बर्फ के गलनांक व जल के क्वथनांक (जो दाब पर निर्भर करते हैं) की अपेक्षा अधिक प्राथमिकता देते हैं (अनुभाग 12.12 देखिए)। ताप के परम मापक्रम के निर्माण के लिए हम जल के त्रिबिंदु को एक स्थिर बिंदु लेते हैं। इस मापक्रम पर परम शून्य को एक दूसरा स्थिर बिंदु माना जा सकता है! हमें इन स्थिर बिंदुओं के तापों के लिए कुछ अंकों के निर्धारण की आवश्यकता पड़ती है। न्यूनतम ताप – परम शून्य – के लिए $T = 0$ शून्य होता है। जल के त्रिबिंदु के लिए हम परम ताप के किस मान का निर्धारण करते हैं? जो मान हम चुनते हैं उसके ताप के परम मापक्रम के मात्रक का आकार निर्धारित होता है। सेल्सियस मापक्रम पर जल के त्रिबिंदु का मान 0.01 °C है। समीकरण (12.4) से त्रिबिंदु के लिए निर्धारित केल्विन परम ताप का मान 273.16 K होता है।

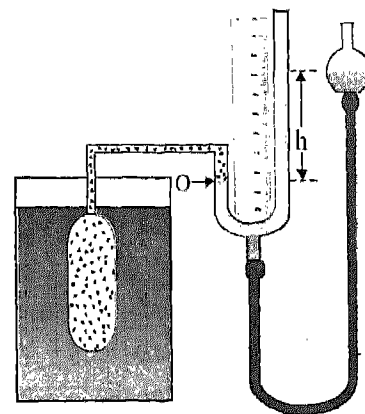
संक्षेप में सेल्सियस ताप केल्विन मापक्रम के ताप T से इस प्रकार संबंधित है,

$$t_c = T - 273.15$$

$$T = 273.16\ \text{K (जल का त्रिबिंदु)} \qquad (12.6)$$

अब हमारा अगला कार्य यह देखना है कि हम किस ढंग से विभिन्न पिंडों के ताप T ज्ञात करें कि यथासंभव हो, वह मापन–युक्ति की विशिष्टताओं पर निर्भर न करे।

12.6 आदर्श गैस ताप

गैस तापमापी जिनका उल्लेख हम अब करेंगे, में (स्थिर आयतन पर) दाब को तापमापीय गुणधर्म के रूप में ताप मापने के निमित्त उपयोग में लाते हैं। चित्र 12.3 में एक प्ररूपी स्थिर आयतन तापमापी दर्शाया गया है। जो गैस कांच, क्वार्ट्ज़ अथवा प्लेटिनम से बने बल्ब में भरी जाती है, वह मापे जाने वाले ताप परिसर तथा अवस्थाओं पर निर्भर करती है। केशिका नली के माध्यम से बल्ब पारे के स्तंभ से जुड़ा रहता है। पारे के कुंड को ऊपर-नीचे करके गैस के आयतन को इस प्रकार स्थिर रखते हैं ताकि बाएं स्तंभ का पारा स्थिर पैमाने के शून्य चिह्न के संपाती हो जाए। इस प्रकार, पैमाना दोनों स्तंभों की ऊंचाई के अंतर h को माप लेगा। इस परिस्थिति में गैस का दाब वायुमंडलीय दाब तथा h ऊंचाई वाले पारे के स्तंभ के दाब के योग के बराबर होगा।

चित्र 12.3 स्थिर आयतन गैस तापमापी का आरेखीय चित्र।

सर्वप्रथम बल्ब को उस निकाय (उदाहरणार्थ, उबलते हुए तेल) से घेर देते हैं जिसका ताप ज्ञात करना है और गैस के दाब (P) को माप लेते हैं। तत्पश्चात् बल्ब को जल से (उसके त्रिकबिंदु पर) घेर देते हैं तथा दाब (P_{tr}) को माप लेते हैं। तब निकाय का कैल्विन परम ताप T निम्नलिखित होगा,

$$T = 273.16\left(\frac{P}{P_{tr}}\right) \tag{12.7}$$

परम ताप की यह परिभाषा चार्ल्स नियम का अनुसरण करती है जिसमें जल के त्रिक बिंदु के लिए T का मान 273.16 K निर्धारित किया गया है। चार्ल्स का नियम तथापि आदर्श गैसों के लिए ही सही होता है। इसलिए, इसमें कोई आश्चर्य की बात नहीं है कि समीकरण (12.7) से ज्ञात किए T का मान विचारणीय सीमा तक गैस की प्रकृति व उसके दाब पर निर्भर करता है। यद्यपि हम यह जानते हैं कि वास्तविक गैसें कम दाब व संघनित होने वाले तापों की अपेक्षा अत्यधिक उच्च ताप पर व्यवहार में आदर्श गैस के सदृश हो जाती हैं। इस आशा के अनुकूल प्रायोगिक रूप से यह पाया गया कि जैसे-जैसे बल्ब की गैस का दाब कम करते जाते हैं, वैसे-वैसे सभी गैसें दिए गए निकाय के लिए समान ताप प्राप्त कर लेती हैं। इस प्रकार यदि हम गैस तापमापी द्वारा ज्ञात किए गए परम ताप की अधिक सार्वत्रिक परिभाषा देना चाहें, तो हमें P_{tr} को नगण्य रूप से छोटा लेना चाहिए (तदनुसार P भी नगण्य रूप से छोटा होगा)। अत:

$$T=\lim_{P_{tr}\to 0} 273.16\left(\frac{P}{P_{tr}}\right) \tag{12.8}$$

समीकरण (12.8) जिसे परिभाषित करता है उसे केल्विन मापक्रम पर आदर्श गैस ताप कहते हैं। जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है, आदर्श ताप गैस की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता। अभी भी यह परिभाषा पूर्ण रूप से सार्वत्रिक नहीं है–आदर्श गैस ताप मापक्रम इस तथ्य पर निर्भर करता है कि तापमापी में जो पदार्थ है वह गैस है। जैसा कि हम देखेंगे (अनुभाग 12.18) कि ऊष्मागतिकी में किसी यथार्थ सार्वत्रिक ताप के परम मापक्रम को परिभाषित करना संभव है।

गैस तापमापी सिद्धांत में सरल होता है तथा ताप मापन के लिए मानक प्रदान करता है। परंतु व्यवहार में इसका उपयोग जटिल होता है। इसलिए ताप के विभिन्न परिसरों के लिए दूसरे प्रकार के अनेक तापमापी उपयोग किए जाते हैं। वैद्युत प्रतिरोध तापमापी ताप मापने की एक यथार्थ तथा बहुमुखी युक्ति है, जिसका संक्षिप्त विवरण पहले किया जा चुका है। इसमें ताप के साथ प्लेटिनम के प्रतिरोध में ज्ञात परिवर्तन का उपयोग किया जाता है तथा इसे $-170\,^\circ C$ से $200\,^\circ C$ के ताप परिसर में उपयोग में लाते हैं। अपेक्षाकृत कम ताप के लिए जर्मेनियम प्रतिरोध तापमापी उपयोग में लाया जाता है। जर्मेनियम एक अर्धचालक है जिसका वैद्युत प्रतिरोध ज्ञात रूप में ताप घटने के साथ बढ़ता है। 4K से 77K के ताप परिसर में इसका प्रतिरोध $10\,K\Omega$ से घटकर $1\,K\Omega$ रह जाता है तथा ताप की तत्काल और यथार्थ माप मानक प्रतिरोध सेतु विधियों द्वारा कर ली जाती है। अति उच्च ताप, जैसे किसी भट्टी का ताप, मापने के लिए विशेष विधियों की आवश्यकता होती है, इसकी चर्चा हम यहां नहीं करेंगे।

▶ *उदाहरण 12.1*: किसी स्थिर आयतन तापमापी जिसमें हीलियम गैस प्रयोग की गई है, के दाब के पाठ्यांक जल के सामान्य हिमांक बिंदु पर, 17.5×10^4 Pa तथा जल के सामान्य क्वथनांक बिंदु पर 2.39×10^4 Pa हैं। इन प्रेक्षणों से सेल्सियस मापक्रम पर परम शून्य ताप ज्ञात कीजिए।

हल कल्पना कीजिए कि जल के सामान्य हिमांक व सामान्य क्वथनांक के तदनुरूपी परम ताप क्रमश: T_1 तथा T_2 हैं (यहां सामान्य का तात्पर्य 1 वायुमंडलीय दाब से है)।

परम ताप की परिभाषा के अनुसार,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2.39\times10^4\,\text{Pa}}{1.75\times10^4\,\text{Pa}} = \frac{2.39}{1.75} \tag{12.9}$$

सेल्सियस मापक्रम का ताप t_C परम ताप (केल्विन मापक्रम पर) T से निम्नलिखित समीकरण द्वारा संबंधित है,

$t_C = T - T_0$ यहां T_0 कोई नियतांक है।

आंकड़ों से T_0 का मान ज्ञात करने के लिए इस तथ्य का उपयोग करिए कि सेल्सियस मापक्रम पर जल के सामान्य हिमांक तथा सामान्य क्वथनांक क्रमश: 0 °C तथा 100 °C हैं। अत:

$$T_2 = T_0 + 100, T_1 = T_0 \tag{12.10}$$

इसलिए

$$\frac{T_0+100}{T_0} = \frac{2.39}{1.75} \tag{12.11}$$

अर्थात्

$$\frac{100}{T_0} = \frac{0.64}{1.75}$$

इससे

$$T_0 = 273 \tag{12.12}$$

परम शून्य $T=0$ सेल्सियस मापक्रम के $t_C=-273\,°C$ के तदनुरूपी है। (t_C का यथार्थ मान $-273.15\,°C$ है।)

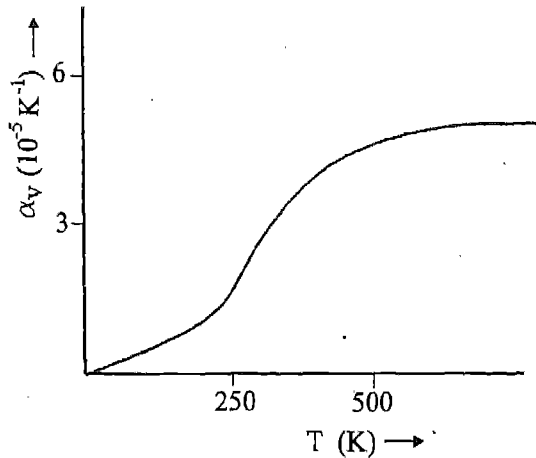
12.7 तापीय प्रसार

अधिकांश पदार्थ गरम करने पर फैलते हैं। इस प्रकार तापीय प्रसार सभी विमाओं : लंबाई, चौड़ाई तथा ऊंचाई में होता है। यदि पदार्थ एक लंबी छड़ के रूप में है तो उसकी लंबाई के परिवर्तन को सरलतापूर्वक मापा जा सकता है। यदि ताप में परिवर्तन (ΔT) कम है तो लंबाई में आंशिक परिवर्तन ($\Delta l/l$) ताप परिवर्तन ΔT के अनुक्रमानुपाती होता है :

$$\frac{\Delta l}{l}=\alpha_l \Delta T \tag{12.13}$$

नियतांक α_l को रैखिक (अनुदैर्ध्य) प्रसार गुणांक कहते हैं। यह छड़ के पदार्थ की विशिष्टता है। इसी प्रकार से हम ΔT ताप परिवर्तन के लिए पदार्थ के आयतन के आंशिक परिवर्तन $\frac{\Delta V}{V}$ पर विचार करते हैं तथा आयतन प्रसार गुणांक α_v को परिभाषित करते हैं :

$$\alpha_v=\left(\frac{\Delta V}{V}/\Delta T\right) \tag{12.14}$$

यद्यपि α_v भी पदार्थ की विशिष्टता है तथापि यथार्थ रूप में यह एक नियतांक नहीं है। व्यापक रूप में यह ताप पर निर्भर करता है (चित्र 12.4 देखिए)। यह पाया गया है कि केवल उच्च तापों पर ही α_v एक नियतांक होता है।

चित्र 12.4 ताप के फलन के रूप में तांबे का आयतन प्रसार गुणांक

सारणी 12.1 में 0 °C – 100 °C ताप परिसर में कुछ सामान्य पदार्थों के सन्निकट आयतन प्रसार गुणांक दिए गए हैं। आप देख सकते हैं कि इन पदार्थों (ठोस व द्रव) के तापीय प्रसार कम तथा पायरेक्स कांच व इनवार (लोहे व निकिल की मिश्रधातु) के लिए α_v के मान विशेषकर कम हैं।

सारणी 12.1 कुछ पदार्थों के आयतन प्रसार गुणांक

पदार्थ	α_v (K^{-1})	पदार्थ	α_v (K^{-1})
ऐल्युमिनियम	7×10^{-5}	कठोर रबर	2.4×10^{-4}
पीतल	6×10^{-5}	इनवार	2×10^{-6}
कांच (साधारण)	2.5×10^{-5}	पारा	18.2×10^{-5}
कांच (पायरेक्स)	1×10^{-5}	स्टील	3×10^{-5}

जल का आचरण असंगत होता है। 0 °C तथा 4 °C के मध्य गरम करने पर यह सिकुड़ता है।

साधारण तापों पर गैसों में ठोसों व द्रवों की अपेक्षा अधिक प्रसार होता है। किसी आदर्श गैस के लिए स्थिर ताप पर आयतन प्रसार गुणांक का मान आदर्श गैस के समीकरण से प्राप्त किया जा सकता है।

$$PV=\mu RT$$

स्थिर दाब पर

$$P\Delta V=\mu R\Delta T$$

$$\therefore \frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta T}{T}$$

अर्थात् $\alpha_v=\dfrac{1}{T}$ आदर्श गैसों के लिए (12.15)

0 °C पर, $\alpha_v=3.7\times10^{-3}\,°K^{-1}$ होता है जो ठोसों व द्रवों की अपेक्षा अत्यधिक होता है। समीकरण (12.15) α_v की ताप पर निर्भरता को व्यक्त करता है; ताप में वृद्धि होने पर इसका मान घटता है।

आयतन प्रसार गुणांक α_v तथा रैखिक प्रसार गुणांक α_l में एक सरल संबंध है। l लंबाई के किसी घन की कल्पना कीजिए जिसमें ΔT ताप वृद्धि होने पर सभी दिशाओं में समान रूप से प्रसार होता है। हमें ज्ञात है कि

$$\Delta l=\alpha_l l\Delta T$$

$$\Delta V=(l+\Delta l)^3-l^3\cong 3l^2\Delta l \tag{12.16}$$

समीकरण (12.16) में $(\Delta l)^2$ तथा $(\Delta l)^3$ पदों की उपेक्षा कर दी गई है क्योंकि Δl का मान l की तुलना में बहुत कम है। अत:

$$\Delta V=\frac{3V\Delta l}{l}=3V\alpha_l\Delta T \tag{12.17}$$

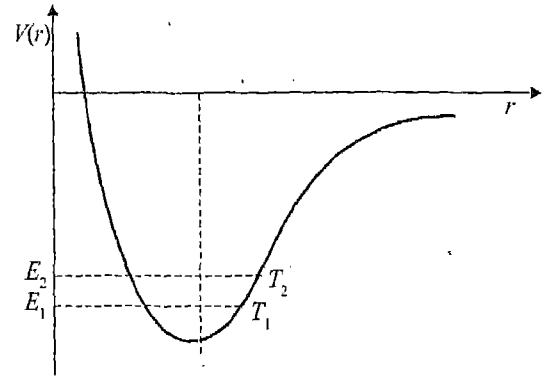
इससे α_v का निम्नलिखित मान मिलता है :

$$\alpha_v=3\alpha_l \tag{12.18}$$

उपरोक्त व्युत्पत्ति को किसी भी आकार की उस छड़ के लिए व्यापक बनाया जा सकता है जिसकी लंबाई सुपरिभाषित होती है (अर्थात् जिसकी अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल एकसमान होता है)। इसके लिए यह मानते हैं कि छड़ छोटे-छोटे घनों से निर्मित है। यदि प्रत्येक छोटे घन की लंबाई में प्रसार को जोड़ दें तो छड़ की लंबाई में संपूर्ण प्रसार का मान मिल जाएगा।

यदि किसी छड़ के दोनों सिरों को दृढ़ता से जड़कर इसके ऊष्मीय प्रसार को रोक दिया जाए तो क्या होगा ? स्पष्टतः, सिरों के दृढ़ अवलंब द्वारा प्रदत्त बाह्य बलों के कारण छड़ में संपीडन विकृति उत्पन्न हो जाती है। तदनुसार छड़ में उत्पन्न प्रतिबल ऊष्मीय प्रतिबल कहलाता है। 5 m लंबी तथा 40 cm^2 अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल की उस स्टील की पटरी पर विचार कीजिए जिसे फैलने से रोक दिया गया है जब इसका ताप 10 °C से बढ़ता है। स्टील का रैखिक प्रसार गुणांक 1.2×10^{-5} K^{-1} है। इस प्रकार संपीडन विकृति $1.2 \times 10^{-5} \times 10 = 1.2 \times 10^{-4}$ होगी। स्टील का यंग प्रत्यास्थता गुणांक 2×10^{11} N m^{-2} है। इसलिए उत्पन्न ऊष्मीय प्रतिबल 2.4×10^7 N m^{-2} है जिसका तदनुरूपी बाह्य बल $2.4 \times 10^7 \times 40 \times 10^{-4} = 10^5$ N होगा। यदि बाह्य सिरों पर आबद्ध इस प्रकार की दो स्टील की पटरियों के भीतरी सिरे संपर्क में हैं, तो इस परिमाण का बल पटरियों को सरलता से मोड़ सकता है। यही कारण है कि दो पटरियों के बीच कुछ रिक्त स्थान छोड़ा जाता है। इस तथ्य पर ध्यान दीजिए कि पटरी कितनी ही लंबी क्यों न हो उसमें ऊष्मीय प्रतिबल इसलिए उत्पन्न नहीं होता क्योंकि उनके किसी एक सिरे को खुला छोड़ दिया जाता है ताकि उसमें प्रसार हो सके। कुछ देशों में पटरियों को वेल्डिंग द्वारा परस्पर जोड़ देते हैं ताकि ट्रेन तीव्र गति से दौड़ सके तथा प्रसार के लिए मुक्त सिरे रेलवे स्टेशनों पर होते हैं।

तापीय प्रसार का आण्विक विवेचन

हम जानते हैं कि किसी ताप पर ठोस के परमाणु अपनी माध्य स्थितियों पर कंपन करते हैं। ताप में वृद्धि के साथ कंपन का आयाम भी बढ़ जाता है। परंतु यह इस बात की पूर्णरूपेण व्याख्या नहीं करता कि साम्यावस्था में दो निकटतम परमाणुओं के बीच की दूरी (साम्य पार्थक्य) ताप के साथ बढ़नी चाहिए। वास्तव में ऐसा होता है क्योंकि अंतरापरमाणुक स्थितिज ऊर्जा वक्र में इसकी न्यूनतम स्थिति के दोनों ओर असममिति होती है (चित्र 12.5)। इस न्यूनतम स्थिति के दोनों ओर स्थितिज ऊर्जा का आकर्षक भाग प्रतिकर्षक भाग की अपेक्षा धीरे-धीरे बढ़ता है। किसी दी हुई ऊर्जा पर परमाणु इस प्रकार कंपन करते हैं कि अंतरापरमाणुक दूरी अधिकतम व न्यूनतम मानों : r_{max} तथा r_{min} के मध्य दोलन करती है; साम्य अंतरापरमाण्विक दूरी इन दोनों मानों का माध्य है। ताप के साथ जैसे-जैसे ऊर्जा में वृद्धि होती जाती है, स्थितिज ऊर्जा वक्र की असममिति से यह परिणाम निकलता है कि साम्यावस्था वक्र पर दाईं ओर हटती जाती है अर्थात् साम्य अंतरापरमाणुक पार्थक्य ताप के साथ बढ़ता है। ठोसों के तापीय प्रसार का यह स्रोत है। वास्तव में यह व्याख्या यथार्थ नहीं है क्योंकि ठोस में परमाणुओं के किसी भी युग्म को स्वतंत्र नहीं माना जा सकता। जैसाकि गैसों के तापीय प्रसार में है, ताप वृद्धि के कारण अणुओं में अधिक कठोर टक्कर होती है जिसके फलस्वरूप दाब में वृद्धि होती है। अतः दाब को केवल प्रसार के द्वारा ही स्थिर रखा जा सकता है जिससे प्रति एकांक समय में आण्विक आघट्टों की संख्या घटती है।

चित्र 12.5 क्रिस्टलीय ठोस में दो निकटतम परमाणुओं की अंतरापरमाणुक पार्थक्य r के फलन के रूप में स्थितिज ऊर्जा V(r)। वक्र की असममिति के कारण ऊर्जा बढ़ने के साथ साम्य-पार्थक्य भी बढ़ता है।

> **उदाहरण 12.2** एक बड़े स्टील के पहिए को उसी धातु के शाफ्ट पर चढ़ाना है। 27 °C पर शाफ्ट का बाहरी व्यास 8.70 cm तथा पहिए के केंद्रीय छेद का व्यास 8.69 cm है। शाफ्ट को शुष्क बर्फ (ठोस कार्बन डाइऑक्साइड) से ठंडा किया गया है। शाफ्ट के किस ताप पर पहिया शाफ्ट पर फिसलता है ? कल्पना कीजिए कि स्टील का रैखिक प्रसार गुणांक आवश्यक ताप-परिसर में स्थिर है : $\alpha_{स्टील} = 1.20 \times 10^{-5}$ K^{-1}।

हल मान लीजिए कि ताप T_1 तथा T_2 पर ठोस की क्रमशः रैखिक विमाएं l_{T1} व l_{T2} हैं। अतः

$$l_{T2} = l_{T1}[1 + \alpha_l (T_2 - T_1)] \qquad (12.19)$$

यहां α_l ठोस का रैखिक प्रसार गुणांक है। जब स्टील के शाफ्ट को ठंडा करते हैं तो उसकी रैखिक विमा अर्थात् उसका व्यास उपरोक्त सूत्र के अनुसार घटता है। $T_1 = 27$ °C = 300 K,

l_{T1} = 8.70 cm। जब शाफ्ट को ताप T_2 तक ठंडा किया जाता है कि l_{T2} = 8.69 cm है तो शाफ्ट पहिए पर फिसल सकता है । इस प्रकार,

$$8.69 = 8.70\,[1 + 120 \times 10^{-5}(T_2 - 300)]$$

अर्थात् $T_2 - 300 = -\dfrac{0.01}{8.70 \times 1.2 \times 10^{-5}}$

अथवा $T_2 = 204\ \text{K} = -69\ °\text{C}$

नोट : ठोस कार्बन डाइऑक्साइड का ताप −78 °C है इसलिए शाफ्ट को आवश्यक ताप 69 °C तक ठंडा करने के लिए यह सर्वथा उपयुक्त है ।

पहिया फिसलने के बाद जब शाफ्ट कमरे के ताप अर्थात् 27 °C पर वापस लौट आता है तो क्या होता है ? स्पष्ट है कि शाफ्ट का इस ताप पर पुन: सामान्य व्यास (8.70 cm) नहीं होगा। इसलिए पहिए के कारण शाफ्ट में संपीडन विकृति उत्पन्न हो जाएगी । न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार, शाफ्ट द्वारा पहिए पर प्रतिबल लगेगा । इस प्रकार पहिया-शाफ्ट व्यवस्था किसी मध्यवर्ती व्यास पर साम्य स्थिति में पहुंच जाती है जिसमें पहिया व शाफ्ट दोनों ही में प्रतिबल होता है, तथा पहिया शाफ्ट पर कसकर चढ़ जाता है । ◀

12.8 ऊष्मा, आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य

ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि नियम से ताप की अवधारणा की उत्पत्ति हुई जो हमारे सामान्य ज्ञान के अनुकूल है। ताप किसी पिण्ड की ऊष्णता का द्योतक है । जब दो पिण्ड ऊष्मीय संपर्क में लाए जाते हैं तो इससे ऊष्मा के प्रवाह की दिशा निर्धारित होती है। ऊष्मा उच्च ताप वाले पिण्ड से निम्न ताप वाले पिण्ड की ओर प्रवाहित होती है । जब ताप समान हो जाते हैं तो प्रवाह रुक जाता है। ऐसी स्थिति में दोनों पिण्ड तापीय साम्य में होते हैं। हम यह विस्तार से पढ़ चुके हैं कि भांति-भांति के पिण्डों के ताप के निर्धारण के लिए ताप मापक्रम कैसे बनाए जाते हैं। अब हम ऊष्मा तथा तत्संबंधित राशियों; जैसे—आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य की अवधारणाओं का वर्णन करेंगे।

किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा की अवधारणा को समझना कठिन नहीं है। हम जानते हैं कि प्रत्येक स्थूल निकाय असंख्य अणुओं से निर्मित है । आंतरिक ऊर्जा इन अणुओं की स्थितिज व गतिज ऊर्जाओं का योग है । हमने यह टिप्पणी की है कि ऊष्मागतिकी में निकाय की गतिज ऊर्जा समग्र रूप से प्रासंगिक नहीं होती। इस प्रकार, निर्देश फ्रेम में आंतरिक ऊर्जा अणु की गतिज व स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है जिसके सापेक्ष निकाय का द्रव्यमान-केंद्र विरामावस्था में होता है । इस प्रकार, इसमें केवल निकाय के अणुओं की (यादृच्छिक) गति से संबंधित (अव्यवस्थित) ऊर्जा ही समाहित होती है। निकाय की आंतरिक ऊर्जा को U से चिह्नित करते हैं।

यद्यपि हमने आंतरिक ऊर्जा के अर्थ को समझने के लिए आण्विक चित्र प्रस्तुत किया है तथापि जहां तक ऊष्मागतिकी का संबंध है, U निकाय का केवल एक स्थूल चर ही है। आंतरिक ऊर्जा के संबंध में एक महत्त्वपूर्ण तथ्य यह है कि यह केवल निकाय की अवस्था पर निर्भर करती है न कि इस बात पर कि यह अवस्था किस प्रकार प्राप्त हुई। निकाय की आंतरिक ऊर्जा U ऊष्मागतिकीय 'अवस्था चर' का एक उदाहरण है। इसका मान निकाय की दी हुई अवस्था पर निर्भर करता है न कि उसके इतिवृत्ति (History) अर्थात् उस स्थिति तक पहुंचने के लिए अनुसरण किए गए पथ पर। *अत: किसी गैस के दिए गए द्रव्यमान के लिए आंतरिक ऊर्जा उसकी स्थिति पर निर्भर करती है। यह स्थिति दाब, आयतन व ताप के विशिष्ट मानों से वर्णित होती है। यह इस बात पर निर्भर नहीं करती कि गैस की यह स्थिति किस प्रकार प्राप्त हुई। दाब, आयतन, ताप तथा आंतरिक ऊर्जा निकाय (गैस) के ऊष्मागतिकीय अवस्था चर कहलाते हैं (अनुभाग 12.11 देखें)। यदि गैस के अल्प अंतराण्विक बलों की उपेक्षा कर दें तो गैस की आंतरिक ऊर्जा उसके अणुओं की अनेक यादृच्छिक गतियों से संबद्ध गतिज ऊर्जाओं के योग के ठीक बराबर होती है। अध्याय 11 से हमें याद रखना है कि किसी गैस में यह गति केवल स्थानांतरीय ही नहीं होती (इसमें गति पात्र के आयतन में एक बिंदु से दूसरे बिंदु के मध्य होती है), वरन् इसमें अणु की घूर्णी तथा कंपन गति भी होती है (चित्र 12.6)।

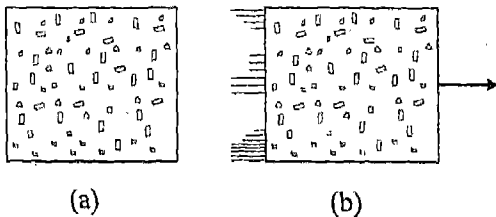
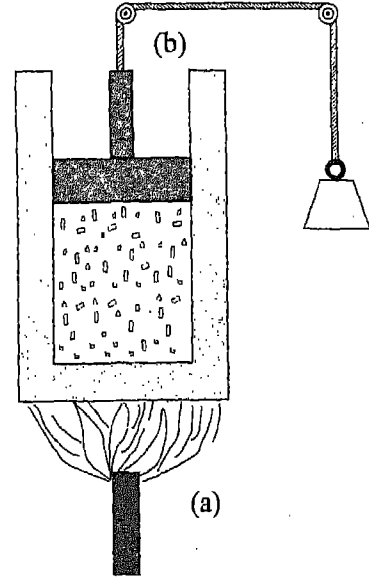
किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा में किन उपायों से परिवर्तन किए जा सकते हैं ? सुविधा की दृष्टि से पुन: कल्पना कीजिए कि चित्र 12.7 के अनुसार निकाय किसी दिए गए द्रव्यमान की एक गैस है जो एक सिलिंडर में भरी है जिसमें गतिशील पिस्टन लगा है। अनुभव यह बताता है कि गैस की अवस्था (तथा इस प्रकार उसकी आंतरिक ऊर्जा) परिवर्तित करने के दो उपाय होते हैं। एक उपाय है कि सिलिंडर को उस पिण्ड के संपर्क में रखें जो गैस की अपेक्षा उच्च ताप पर है। तापांतर के कारण ऊर्जा (ऊष्मा) गरम पिण्ड से गैस में प्रवाहित होगी। इससे गैस की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाएगी। दूसरा उपाय है कि पिस्टन को नीचे की ओर दबाया जाए (अर्थात् निकाय पर कार्य किया जाए)। इसमें भी गैस की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाती है। नि:संदेह ये दोनों बातें विपरीत दिशा में भी संपन्न होती हैं। यदि चारों ओर के परिवेश

* आंतरिक ऊर्जा की आण्विक व्याख्या के अनुसार यह निश्चयपूर्वक कहना स्पष्ट है।

का ताप कम है तो ऊष्मा गैस से परिवेश में प्रवाहित होगी। इसी प्रकार, गैस पिस्टन को ऊपर की ओर धक्का दे सकती है और परिवेश पर कार्य कर सकती है। संक्षेप में, ऊष्मा और कार्य दो भिन्न-भिन्न विधियां हैं जिनसे ऊष्मीय निकाय की स्थिति परिवर्तित होती है तथा उसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन होता है।

ऊष्मा एवं आंतरिक ऊर्जा की धारणाओं में अंतर को सावधानीपूर्वक समझना आवश्यक है। ऊष्मा निश्चित रूप से ऊर्जा है परंतु यह ऊर्जा पारगमन में है। यह मात्र शब्दों का खेल नहीं है। दोनों में अंतर मूल महत्त्व का है। किसी ऊष्मागतिकी निकाय की स्थिति उसकी आंतरिक ऊर्जा से अभिलक्षित होती है न कि ऊष्मा से। इस प्रकार का प्रकथन कि *'किसी दी हुई अवस्था में गैस में ऊष्मा की कुछ मात्रा होती है'* उतना ही निरर्थक है जितना कि यह प्रकथन कि *'किसी दी हुई स्थिति में गैस में कुछ कार्य निहित होता है।'* इसके विपरीत, *'किसी दी हुई अवस्था में गैस में आंतरिक ऊर्जा की कुछ मात्रा होती है'* पूरी तरह से एक सार्थक प्रकथन है। इसी प्रकार से, ऐसे प्रकथन जैसे *'निकाय को एक निश्चित मात्रा की ऊर्जा दी गई है'* या *'निकाय द्वारा एक निश्चित मात्रा का कार्य किया गया'* पूर्णतः अर्थपूर्ण सार्थक प्रकथन हैं।

संक्षेप में, ऊष्मा व कार्य ऊष्मागतिकी में स्थितीय चर नहीं होते। ये किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण की विधियां होती हैं जिससे उसकी आंतरिक ऊर्जा परिवर्तित होती है जो, जैसा कि पहले वर्णन कर चुके हैं, एक अवस्था चर होता है।

साधारण भाषा में हमें प्रायः ऊष्मा तथा आंतरिक ऊर्जा में भ्रम बना रहता है। कुछ प्राथमिक भौतिकी की पुस्तकों में कभी-कभी इस भेद की उपेक्षा कर दी जाती है। तथापि ऊष्मागतिकी को भलीभांति समझने के लिए यह विभेद निर्णायक होता है।

चित्र 12.6 (a) जब बॉक्स विरामावस्था में है तो गैस की आंतरिक ऊर्जा उसके U अणुओं की गतिज व स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है। विभिन्न प्रकार की गतियों (स्थानांतरीय, घूर्णी, कंपन) के कारण गतिज ऊर्जा को U में समाहित किया जाता है। (b) यदि यही समग्र बॉक्स कुछ वेग से गतिमान है, तो बॉक्स की गतिज ऊर्जा को U में सम्मिलित नहीं करना है।

चित्र 12.7 ऊष्मा व कार्य किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण की दो विभिन्न विधियां हैं जिनसे उसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन होता है। (a) निकाय तथा परिवेश के बीच तापांतर के कारण ऊष्मा को ऊर्जा के स्थानांतरण के रूप में परिभाषित करते हैं। (b) कार्य उन साधनों (उदाहरणार्थ, पिस्टन से जुड़े भारों को ऊपर नीचे करके पिस्टन को गति देना) द्वारा उत्पन्न ऊर्जा का स्थानांतरण है जिनमें तापांतर समाहित नहीं होता।

12.9 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम

हम यह देख चुके हैं कि किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा U दो विधियों से ऊर्जा स्थानांतरण के कारण परिवर्तित हो सकती है। यह विधियां है : ऊष्मा तथा कार्य। कल्पना कीजिए कि

ΔQ = परिवेश द्वारा निकाय को दी गई ऊष्मा

ΔW = निकाय द्वारा परिवेश पर किया गया कार्य

ΔU = निकाय की आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन

ऊर्जा संरक्षण के सामान्य नियम में यह निहित है कि

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \qquad (12.20)$$

इसका तात्पर्य यह है कि जो ऊर्जा (ΔQ) निकाय को दी जाती है, उसका कुछ अंश निकाय की आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करता है (ΔU) तथा शेष परिवेश पर किया गया कार्य (ΔW) है। समीकरण (12.20) को **ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम** के रूप में जाना जाता है। यह ऊर्जा संरक्षण का केवल सामान्य नियम है जिसे किसी भी उस निकाय पर लागू किया जा सकता है जिसमें परिवेश को अथवा परिवेश से ऊष्मा स्थानांतरण पर ध्यान दिया जाता है।

मान लीजिए कि हम समीकरण (12.20) को वैकल्पिक रूप में प्रस्तुत करते हैं,

$$\Delta Q - \Delta W = \Delta U \qquad (12.21)$$

अब मान लीजिए कि निकाय किसी आरंभिक अवस्था से अंतिम अवस्था में कई प्रकार से आता है। उदाहरणार्थ, गैस की अवस्था (P_1, V_1) से परिवर्तित करके (P_2, V_2) कर दी जाए तो हम पहले गैस के दाब को स्थिर रखकर उसके आयतन को V_1 से V_2 में परिवर्तित करते हैं अर्थात् पहले हम अवस्था (P_1, V_2) में जा सकते हैं और फिर गैस के आयतन को स्थिर रखते हुए इसके दाब को P_1 से P_2 में परिवर्तित करते हैं। इससे गैस (P_2, V_2) अवस्था में पहुंच जाती है। विकल्पतः हम पहले आयतन को स्थिर रख सकते हैं और फिर दबाव स्थिर रखते हैं। चूंकि U एक अवस्था चर है, ΔU केवल प्रारंभिक व अंतिम अवस्थाओं पर निर्भर करेगा न कि उस पथ पर जिससे गैस एक अवस्था से दूसरी अवस्था में पहुंचती है। यद्यपि, ΔQ तथा ΔW दोनों, सामान्यतया, उस पथ पर निर्भर करते हैं जिससे गैस प्रारंभिक अवस्था से भौतिक अवस्था में जाती है। ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम, समीकरण (12.21), से यह स्पष्ट है कि संयोजन $\Delta Q - \Delta W$ यद्यपि पथ पर निर्भर नहीं करता। इससे पता चलता है कि यदि कोई निकाय ऐसी प्रक्रिया अपनाता है जिसमें $\Delta U = 0$ (उदाहरणार्थ, आदर्श गैस का समतापीय प्रसार, अनुभाग 12.13 देखिए), तो

$$\Delta Q = \Delta W$$

अर्थात् निकाय को दी गई ऊष्मा निकाय द्वारा परिवेश पर कार्य करने में पूर्ण रूप से उपयोग में आ जाती है।

यदि निकाय सिलिंडर में भरी गैस है तथा सिलिंडर में गतिशील पिस्टन लगा है तो पिस्टन को गति देने में गैस को कार्य करना पड़ता है। चूंकि बल को दाब × क्षेत्रफल के रूप में परिभाषित करते हैं तथा क्षेत्रफल × विस्थापन को आयतन कहते हैं तो स्थिर दबाब P के विरुद्ध निकाय द्वारा संपादित कार्य निम्नलिखित होगा,

$$\Delta W = P\Delta V$$

यहां ΔV गैस में आयतन के परिवर्तन को व्यक्त करता है। अतः इस उदाहरण के लिए, समीकरण (12.20) निम्न प्रकार से लिखी जाएगी

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V \qquad (12.22)$$

समीकरण (12.22) के अनुप्रयोग के रूप में हमें 1g जल की आंतरिक ऊर्जा के परिवर्तन पर विचार करना होगा जब यह अपनी द्रव प्रावस्था से वाष्प प्रावस्था में परिवर्तित होता है। जल की मापी गई गुप्त ऊष्मा 2256 J/g है अर्थात् जल के 1 ग्राम के लिए $\Delta Q = 2256$ J होता है। वायुमंडलीय दाब पर, 1 g जल का आयतन द्रव प्रावस्था में 1 cm^3 तथा वाष्प प्रावस्था में 1671 cm^3 होता है। अतः

$$\Delta W = P(V_g - V_l) = 1.013 \times 10^5 \times (1670) \times 10^{-6} = 169.2 \text{ J}$$

समीकरण (12.22) से हमें आंतरिक ऊर्जा का मान प्राप्त होता है,

$$\Delta U = 2256 - 169.2 = 2086.8 \text{ J}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि ऊष्मा का अधिकांश भाग जल की आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करने में व्यय होता है। इस प्रक्रिया में जल द्रव से वाष्प प्रावस्था में परिवर्तित होता है।

12.10 विशिष्ट ऊष्मा

कल्पना कीजिए कि किसी पदार्थ को दी गई ऊष्मा की मात्रा ΔQ उसके ताप को T से बढ़ाकर $T+\Delta T$ कर देती है। हम पदार्थ की ऊष्माधारिता को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करते है।

$$S = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (12.23)$$

हम आशा करते हैं कि ΔQ और इस प्रकार से ऊष्मा धारिता S पदार्थ के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होती है। इसके अतिरिक्त यह ताप पर भी निर्भर कर सकती है। अर्थात् भिन्न-भिन्न तापों पर पदार्थ के ताप में एकांक वृद्धि के लिए ऊष्मा के भिन्न-भिन्न परिमाणों की आवश्यकता पड़ सकती है। पदार्थ के किसी नियत अभिलक्षण को परिभाषित करने तथा उसे उसके परिमाण से स्वतंत्र रखने के लिए हम S को पदार्थ के द्रव्यमान m (kg में) से विभाजित कर देते है :

$$s = \frac{S}{m} = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (12.24)$$

s को पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं। यह पदार्थ की प्रकृति और उसके ताप पर निर्भर करती है। विशिष्ट ऊष्मा का मात्रक $\text{J kg}^{-1}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$ है। यदि पदार्थ के परिमाण का निर्धारण μ मोल (द्रव्यमान m को kg में व्यक्त करने के स्थान पर) के पदों में करें तो हम पदार्थ की ऊष्मा धारिता प्रति मोल को इस प्रकार से व्यक्त कर सकते है

$$C = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (12.25)$$

C को पदार्थ की मोलर विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं। s की भांति C भी पदार्थ के परिमाण पर निर्भर नहीं करता किंतु यह पदार्थ की प्रकृति व उसके ताप पर निर्भर करता है। C का मात्रक $\text{J mol}^{-1}\,{}^\circ\text{C}^{-1}$ है। जैसा कि हम बाद में देखेंगे (गैस की विशिष्ट ऊष्मा के संबंध में) C या s को परिभाषित करने के लिए अतिरिक्त शर्तों की आवश्यकता पड़ सकती है। C को परिभाषित करने के पीछे यह विचार है कि मोलर विशिष्ट ऊष्माओं के संबंध में सरल भविष्यवाणियां की जा सकती हैं (अध्याय 11 देखें)।

सारणी 12.2 में (स्थिर दाब पर) पदार्थों की विशिष्ट ऊष्मा को साधारण ताप पर सूचीबद्ध किया गया है।

हमने अध्याय 11 में देखा है कि गैसों की विशिष्ट ऊष्माओं के संबंध में की गई भविष्यवाणियां सामान्यतया प्रयोग से मेल खाती हैं। हम इसी नियम का उपयोग ऊर्जा के सम विभाजन में कर सकते हैं। जैसा कि हमने वहां ठोसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा की भविष्यवाणी में किया है। N परमाणुओं वाले किसी ठोस पर विचार करें। प्रत्येक परमाणु अपनी माध्य स्थिति के दोनों ओर कंपन करता है। एक विमा में किसी दोलक की माध्य ऊर्जा $2 \times \frac{1}{2} k_B T = K_B T$ होगी। तीन विमाओं में माध्य ऊर्जा $3 k_B T$ होगी। ठोस के एक मोल के लिए कुल ऊर्जा

$$U = 3\, k_B T \times N_A = 3\, RT$$

अब स्थिर दाब पर, $\Delta Q = \Delta U + P \Delta V \cong \Delta U$ होगा, क्योंकि किसी ठोस के लिए ΔV नगण्य होगा। अतः

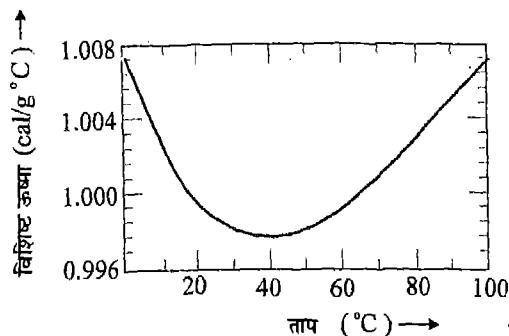
$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3\, R \qquad (12.26)$$

सारणी 12.2 कमरे के ताप तथा वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा

पदार्थ	विशिष्ट ऊष्मा ($J\,kg^{-1}\,K^{-1}$)	मोलर विशिष्ट ऊष्मा ($J\,mol^{-1}\,K^{-1}$)
ऐलुमिनियम	900.0	24.4
कार्बन	506.5	6.1
तांबा	386.4	24.5
सीसा	127.7	26.5
चांदी	236.1	25.5
टंगस्टन	134.4	24.9

जैसा कि सारणी से स्पष्ट है कि भविष्यवाणियां सामान्यतया साधारण तापों पर प्रयोगों से मेल खाती हैं (कार्बन एक अपवाद है। इसका कारण आप उच्च कक्षाओं में पढ़ेंगे)। यह ज्ञात है कि ऐसी सहमति निम्न तापों पर भंग हो जाती है। जैसा कि अध्याय 11 में टिप्पणी की जा चुकी है कि क्वांटम यांत्रिकी की आरंभिक महत्त्वपूर्ण सफलताओं में से एक सफलता निम्न तापों पर विशिष्ट ऊष्माओं की व्याख्या करना थी जिसे चिरसम्मत ऊर्जा के सम विभाजन नियम स्पष्ट करने में असफल रहे थे।

जल की विशिष्ट ऊष्मा

ऊष्मा का पुराना मात्रक कैलोरी पहले। कैलोरी को ऊष्मा के उस परिमाण के रूप में परिभाषित करते थे जो 1g जल को ताप में 1°C की वृद्धि कर दे। अधिक परिशुद्ध मापों से यह पाया गया है कि जल की विशिष्ट ऊष्मा में ताप के साथ किंचितमात्र परिवर्तन होता है। चित्र 12.8 में ताप परिसर 0-100 °C में यह परिवर्तन दर्शाया गया है।

चित्र 12.8 ताप के साथ जल की विशिष्ट ऊष्मा में परिवर्तन

कैलोरी की यथार्थ परिभाषा के लिए इसलिए यह आवश्यक समझा गया कि एकांक ताप अंतराल को निर्धारित किया जाए। ऊष्मा का वह परिमाण जो 1 g जल के ताप में 1 °C (14.5 °C से 15.5 °C) की वृद्धि कर दे, उसे 1 कैलोरी के रूप में परिभाषित किया गया। चूंकि ऊष्मा ऊर्जा का केवल एक रूप है, इसलिए मात्रक जूल, J के उपयोग को प्राथमिकता देना अधिक उपयुक्त है। SI मात्रकों में, जल की विशिष्ट ऊष्मा $4186\, J\, kg^{-1}\, °C^{-1}$ अर्थात् $4.186\, J\, g^{-1}\, °C^{-1}$ है। तथाकथित ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक, जिसे 1 कैलोरी ऊष्मा उत्पन्न करने के लिए आवश्यक कार्य के रूप में परिभाषित करते हैं, वास्तव में ऊर्जा के दो भिन्न मात्रकों (कैलोरी से जूल) के मध्य एक परिवर्तन गुणक ही है। चूंकि SI मात्रक पद्धति में ऊष्मा कार्य या ऊर्जा के किसी अन्य रूप के लिए जूल मात्रक का उपयोग करते हैं, अतः पद "यांत्रिक तुल्यांक" अब निरर्थक हो गया है और इसे उपयोग में लाने की आवश्यकता नहीं है।

जैसा कि पहले वर्णन किया जा चुका है कि विशिष्ट ऊष्मा, प्रक्रिया या उन परिस्थितियों पर निर्भर करती है जिनके अंतर्गत ऊष्मा का स्थानांतरण होता है। उदाहरणार्थ, गैसों के लिए हम दो विशिष्ट ऊष्माओं को परिभाषित करते है : ***स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा तथा स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा।*** किसी आदर्श गैस के लिए हमारे पास एक सरल संबंध होता है जिसे हम निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते है :

$$C_p - C_v = R \qquad (12.27)$$

यहां C_p व C_v आदर्श गैस की क्रमशः स्थिर दाब व स्थिर आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्माएं हैं तथा R सार्वत्रिक गैस नियतांक है। हम इस संबंध का उपयोग अध्याय 11 में कर चुके हैं। इसे सिद्ध करने के लिए हम 1 मोल गैस के लिए समीकरण (12.22) पर विचार करते हैं :

$$\Delta Q = \Delta U + P \Delta V$$

यदि ΔQ का स्थिर आयतन पर अवशोषण होता है तो $\Delta V = 0$ होगा।

$$C_V = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_V = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_V = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right) \quad (12.28)$$

यहां अधोलिखित V को अंतिम पद में छोड़ दिया गया है क्योंकि आदर्श गैस के लिए U का मान मात्र ताप पर निर्भर करता है। (अधोलिखित यह व्यक्त करता है कि तत्संबंधित राशि स्थिर है।) इसके विपरीत, यदि ΔQ का स्थिर दाब पर अवशोषण होता है तो

$$C_P = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_P = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_P + P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_P \quad (12.29)$$

अधोलिखित P को प्रथम पद में छोड़ा जा सकता है क्योंकि आदर्श गैस के लिए U का मान मात्र T पर निर्भर करता है। आदर्श गैस के 1 मोल के लिए

$$PV = RT$$

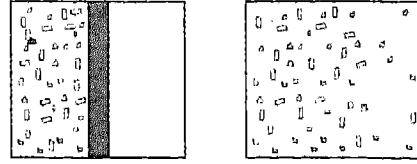
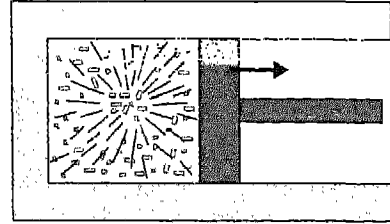
जो निम्नलिखित परिणाम देता है :

$$P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_P = R \quad (12.30)$$

समीकरणों (12.28) से (12.30) तक के उपयोग से हमें वांछित संबंध (12.27) प्राप्त होता है।

12.11 ऊष्मागतिकीय अवस्था, चर तथा अवस्था समीकरण

किसी भी ऊष्मागतिकीय निकाय की प्रत्येक **साम्य अवस्था** को कुछ स्थूल चरों के विशिष्ट मानों के उपयोग द्वारा पूरी तरह से वर्णित कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, किसी गैस की साम्य अवस्था उसके दाब, आयतन, ताप व द्रव्यमान (तथा संगठन यदि गैसों का सम्मिश्रण है) के मानों द्वारा पूरी तरह से निर्धारित होती है। कोई ऊष्मागतिक निकाय सदैव साम्य स्थिति में नहीं होता। उदाहरणार्थ, किसी गैस को निर्वात के विरुद्ध यदि फैलने दिया जाता है तो यह साम्य अवस्था नहीं होती [चित्र 12.19(a)]। शीघ्र प्रसारण की अवधि में गैस का दाब संभव है कि सभी स्थानों पर एकसमान न हो। इसी प्रकार, गैसों का वह सम्मिश्रण जिसमें विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया होती है (उदाहरणार्थ, पेट्रोल की वाष्प तथा वायु का मिश्रण जिसे एक चिंगारी से प्रज्ज्वलित किया जाता है) एक साम्य अवस्था नहीं है; इसके अतिरिक्त इसके ताप व दाब एकसमान नहीं हैं [चित्र 12.19(b)] अंततः, गैस का ताप व दाब एकसमान हो जाता है तथा वह परिवेश के साथ तापीय व यांत्रिक साम्य में आ जाती है।

संक्षेप में, ऊष्मागतिकीय अवस्था चर निकायों की साम्यावस्था का विवरण देते हैं। यह आवश्यक नहीं है कि विभिन्न

(a)

(b)

चित्र 12.9 (a) बॉक्स के विभाजक को अचानक हटा दिया गया है जिससे गैस का मुक्त प्रसारण होता है (b) गैसों का मिश्रण जिसमें विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया संपन्न होती है। दोनों स्थितियों में गैस साम्यावस्था में नहीं है तथा चरों से इसका विवरण नहीं दिया जा सकता।

अवस्था चर स्वतंत्र हों। अवस्था चरों के पारस्परिक संबंध को अवस्था का समीकरण कहते हैं। उदाहरणार्थ, किसी आदर्श गैस के लिए अवस्था का समीकरण आदर्श गैस संबंध होता है,

$$PV = \mu RT$$

गैस की निश्चित मात्रा के लिए अर्थात् दिए गए μ के लिए इस प्रकार से केवल दो ही स्वतंत्र चर होते हैं। मान लीजिए कि वे P और V या T और V हैं। निश्चित ताप पर दाब आयतन वक्र को **समतापी** कहते हैं। वास्तविक गैसों के लिए अवस्था का समीकरण अधिक जटिल हो सकता है।

ऊष्मागतिकीय अवस्था चर दो प्रकार के होते हैं : **व्यापक** तथा **गहन**। व्यापक चर निकाय के आकार का संकेत देते हैं जबकि गहन चर जैसे दाब तथा ताप से ऐसा नहीं करते। यह निर्णय लेने के लिए कि कौन-सा चर व्यापक है तथा कौन-सा गहन, किसी प्रासंगिक निकाय पर विचार कीजिए तथा कल्पना कीजिए कि उसे दो समान भागों में बांट दिया गया है। वे चर जो हर भाग में अपरिवर्तित रहते हैं गहन चर कहलाते हैं किंतु जिन चरों का मान हर भाग में आधा हो जाता है, उन्हें व्यापक चर कहते हैं। उदाहरणार्थ, यह आसानी से देखा जा सकता है कि आंतरिक ऊर्जा U, आयतन V, कुल द्रव्यमान M व्यापक चर हैं जबकि दाब P, ताप T व घनत्व ρ गहन चर हैं। यह एक अच्छी आदत होगी यदि चरों के इस प्रकार के वर्गीकरण

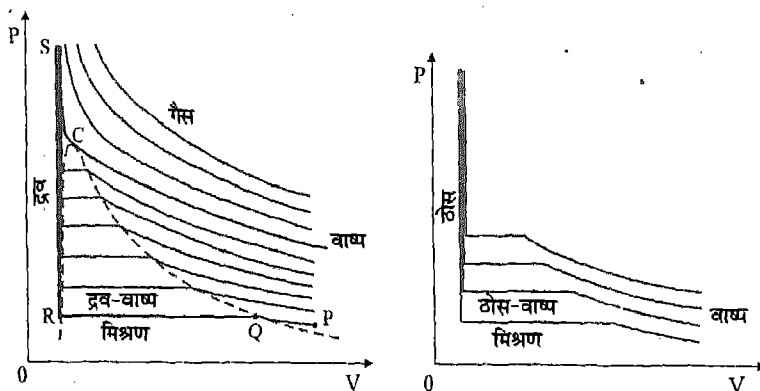
के द्वारा ऊष्मागतिकीय समीकरणों की प्रासंगिकता का परीक्षण कर लिया जाए। उदाहरणार्थ, समीकरण,

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$$

में दोनों ओर की राशियां व्यापक है* (किसी गहन चर जैसे P तथा व्यापक राशि ΔV का गुणनफल व्यापक राशि है)।

12.12 प्रावस्था तथा प्रावस्था आरेख

वास्तविक गैसें ताप व दाब की समुचित परिस्थितियों के अंतर्गत द्रवित अथवा पिंडित की जा सकती हैं । उदाहरणार्थ, 1 वायुमंडलीय दाब पर जल 0 से 100 °C के मध्य द्रव, 0 °C के नीचे ठोस (बर्फ) तथा 100 °C के ऊपर वाष्प (भाप) है। जल के इन प्रकारों को उसकी प्रावस्थाओं के नाम से जाना जाता है। 100 °C ताप व 1 वायुमंडलीय दाब पर जल की दो प्रावस्थाएं सहअस्तित्व में रह सकती हैं अर्थात् साम्यावस्था में निकाय का कुछ अंश द्रव जल तथा शेष वाष्प होगा। इसी प्रकार से, 0 °C तथा 1 वायुमंडलीय दाब पर बर्फ तथा द्रव जल साम्य स्थिति में सहअस्तित्व में रह सकते हैं । इस प्रकार, किसी निकाय की साम्यावस्था में दो (या अधिक) प्रावस्थाएं हो सकती हैं। किसी पदार्थ जैसे जल, CO_2 आदि के 1 मोल के समतापी (P-V वक्रों) को चित्र 12.10 में आरेखित किया गया है ।

इन समतापी आरेखों की निम्नलिखित विशिष्टताओं को ध्यान से देखिए :

चित्र 12.10 जल, CO_2 आदि जैसे निकाय के समतापी आरेख

(1) मान लीजिए कि दाब P पर निकाय वाष्प प्रावस्था में है । यदि निकाय को समतापीय विधि से दबाएं तो उसका दाब Q तक बढ़ जाता है । इस बिंदु पर गैस का द्रव प्रावस्था में पारगमन होता है। यदि आप इसे और दबाएं अर्थात् उसके आयतन को समतापीय विधि से घटाएं, तो बिंदु R तक इसका दाब स्थिर रहता है । रेखा RQ इस निकाय को व्यक्त करती है जिसमें वाष्प व द्रव प्रावस्था में साम्यवस्था में सहअस्तित्व में हैं। कल्पना कीजिए कि V_l तथा V_g पदार्थ के मोलर आयतन हैं जब वह क्रमशः द्रव तथा गैसीय प्रावस्था में है । यदि निकाय का कुल आयतन V है, तो द्रव गैसीय प्रावस्थाओं में इसके आयतन अंश क्रमशः x_l व x_g होंगे । इनके मान निम्नलिखित हैं :

$$x_l = \frac{V_g - V}{V_g - V_l} \; ; x_g = 1 - x_l \qquad (12.31)$$

इस प्रकार, Q बिंदु पर अवस्था पूर्ण रूप से गैस है जबकि R पर अवस्था पूर्ण रूप से द्रव है। जैसा कि समीकरण (12.31) से स्पष्ट है कि इन दोनों बिंदुओं के मध्य यह आंशिक रूप से द्रव तथा आंशिक रूप से गैस होगा। R बिंदु से परे P-V वक्र किसी द्रव की असंपीड़नीय अभिलक्षण को दर्शाता है : आयतन में अल्प परिवर्तन दाब में अत्यधिक वृद्धि के तदनुरूपी है । जल के लिए, 100 °C के लिए समतापी 1 वायुमंडलीय दाब पर क्षैतिज P-V रेखा होती है।

(2) निम्न ताप समतापी, जिन्हें चित्र 12.10 के आंतरिक चित्र में दर्शाया गया है, समान प्रकार की विशेषताएं रखते हैं किंतु इसमें एक महत्त्वपूर्ण अंतर होता है । जल के उदाहरण में (0.01 °C से नीचे) वाष्प प्रावस्था प्रत्यक्ष रूप से ठोस प्रावस्था में संघनित हो जाती है। उपरोक्त बिंदु 1 के अनुसार यहां स्थिर दाब व ताप पर वाष्प-ठोस सहअस्तित्व की रेखा प्राप्त होती है। निकाय में विद्यमान दोनों प्रावस्थाओं के अंश संपूर्ण आयतन V तथा ठोस व गैस प्रावस्थाओं के मोलर आयतन पर निर्भर करेंगे ।

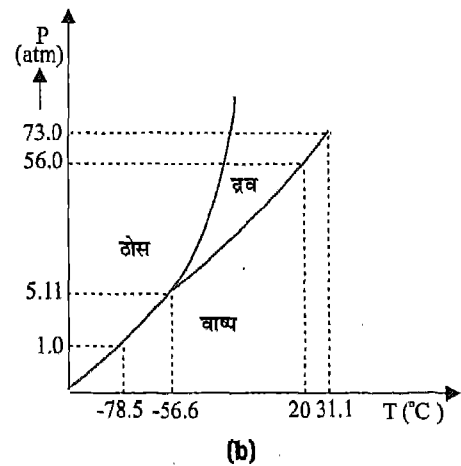
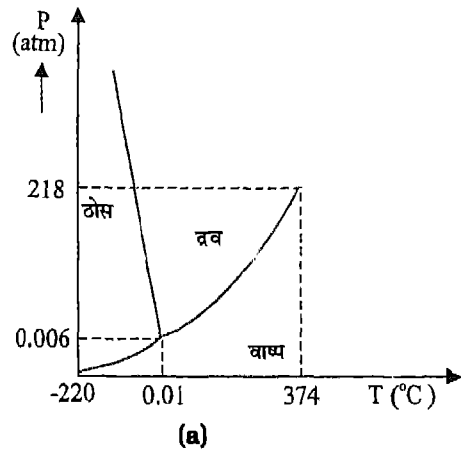
(3) किसी निश्चित ताप पर ठोस-द्रव सहअस्तित्व की रेखा तथा द्रव-ठोस सहअस्तित्व की रेखा P-V सममापी आरेख में संपाती हो जाती हैं । इस ताप को त्रिक बिंदु कहते हैं,

* जैसा कि महत्व देकर कहा जा चुका है कि Q अवस्था चर नहीं है । किंतु ΔQ स्पष्ट रूप से निकाय के कुल द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होने के कारण व्यापक चर है ।

त्रिक बिंदु दाब व ताप की अद्वितीय अवस्था है, जहां पदार्थ की तीनों प्रावस्थाएं – गैस, द्रव व ठोस सहअस्तित्व में हैं । जल के लिए त्रिक बिंदु का ताप 0.01 °C तथा दाब 0.006 वायुमंडल होता है ।

(4) ध्यान दीजिए कि *PQRS* समताप रेखा में दिखाए गए बिंदु *Q* व *R* सुस्पष्ट हैं क्योंकि द्रव व वाष्प प्रावस्थाओं के मोलर आयतन V_l तथा V_g एक दूसरे से अत्यधिक भिन्न हैं: द्रव वाष्प की अपेक्षा अधिक सघन होता है । मोलर आयतन ताप पर निर्भर करता है । जैसे-जैसे ताप बढ़ता है वैसे-वैसे V_l व V_g एक दूसरे के समीप पहुंचते जाते हैं और *C* बिंदु पर वे बराबर हो जाते हैं । इस बिंदु के तद्नुरूप ताप व दाब को **क्रांतिक ताप** व **क्रांतिक दाब** कहते हैं । क्रांतिक ताप के परे द्रव और वाष्प में कोई भेद नहीं होता है । प्राय: क्रांतिक बिंदु के ऊपर के भाग के लिए गैस शब्द का तथा नीचे के भाग के लिए वाष्प शब्द का प्रयोग किया जाता है । जल के क्रांतिक बिंदु के लिए $T_C = 374.1$ °C तथा $P_C = 216$ atm होता है । $T > T_C$ तथा निम्न दाबों के लिए आदर्श गैस समीकरण वास्तविक गैस का एक उत्तम सन्निकटन होता है ।

12.12.1 प्रावस्था आरेख

P-V समताप रेखा से संबंधित सूचना को सारांशित करने के लिए दाब-ताप (*P-T*) प्रावस्था आरेख एक सुविधाजनक उपाय है । इस प्रकार का प्रावस्था आरेख *P-T* समतल को ठोस भाग, वाष्प भाग व द्रव भाग में विभाजित करता है । ये भाग उन वक्रों से पृथक् रहते हैं जो ठोस-द्रव साम्यावस्था (गलन), द्रव-वाष्प साम्यावस्था (क्वथन) तथा ठोस-वाष्प साम्यावस्था (ऊर्ध्वपातन) को व्यक्त करते हैं । तीनों वक्र त्रिक बिंदु (ठोस-द्रव-वाष्प साम्यावस्था) पर मिलते हैं । जल व CO_2 के लिए *P-T* आरेख चित्र (12.11) में दर्शाए गए हैं । द्रव-वाष्प से संबंधित साम्यावस्था वक्र पर क्रांतिक बिंदु का अस्तित्व यह दिखाता है कि द्रव से वाष्प अवस्था में परिगमन का असतत् होना आवश्यक नहीं है । चित्र में बिंदुकित वक्र यह दर्शाता है कि हम सतत् रूप से द्रव से वाष्प भाग में पहुंच सकते हैं । इस बात पर ध्यान कीजिए कि CO_2 में गलन वक्र की प्रवणता धनात्मक है, जबकि जल की ऋणात्मक । इससे यह पता चलता है कि इसका संबंध इस तथ्य से है कि बर्फ पिघल कर द्रव जल बनते समय सिकुड़ती है जबकि अधिकांश पदार्थ (जैसे CO_2) पिघलने पर फैलते हैं ।

चित्र 12.11 दाब-ताप प्रावस्था आरेख: (a) जल के लिए तथा (b) CO_2 के लिए (पैमाने के अनुसार नहीं) ।

उदाहरण 12.3 पानी के *P-T* प्रावस्था आरेख पर आधारित निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए :

(i) पानी के गलनांक तथा क्वथनांक पर दाब में वृद्धि का क्या प्रभाव होता है ?

(ii) वह कौन-सा ताप है जिससे अधिक ताप पर भाप पानी में संघनित नहीं होती यद्यपि यह अत्यधिक दाब से (समतापीय विधि से) संघनित की जाती है ?

(iii) क्या होता है यदि 0.004 वायुमंडलीय दाब पर जल की वाष्प 0 °C तक ठंडी की जाती है ?

(iv) 30 °C ताप तथा 1 वायुमंडलीय दाब पर जल द्रव अवस्था में होता है । *P-T* आरेख पर अंकित करिए कि बिना ताप बढ़ाए इस जल को वाष्प में कैसे बदल सकते हैं ?

(v) क्या बर्फ, जल तथा वाष्प की सापेक्ष मात्राएं जल के त्रिक बिंदु पर स्थिर होती हैं ?

हल

(i) दाब में वृद्धि के साथ जल के क्वथनांक में भी वृद्धि होती है जबकि दाब में वृद्धि के साथ जल के गलनांक में कमी हो जाती है ।

(ii) क्रांतिक ताप से ऊपर (जल के लिए 647.4 K), भाप जल में संघनित नहीं होती । वास्तव में, इस ताप से अधिक ताप पर जल तथा वाष्प प्रावस्थाओं में अधिक समय तक भेद स्पष्ट नहीं रहता है । जब भाप का दाब समतापिक रूप में बढ़ाया जाता है तो यह आदर्श गैस से विचलित होना आरंभ कर देती है । विशेष रूप से इसकी संपीड्यता (आयतन प्रत्यास्थता का व्युत्क्रम) द्रव की भांति बहुत कम हो जाती है ।

(iii) त्रिक बिंदु पर दाब 610 पास्कल होता है जो 0.006 वायुमंडलीय दाब के बराबर है । *P-T* आरेख से इस दाब की अपेक्षा कम दाब पर जल-वाष्प, बिना द्रव प्रावस्था में परिवर्तित किए सीधे ही बर्फ में संघनित हो जाती है ।

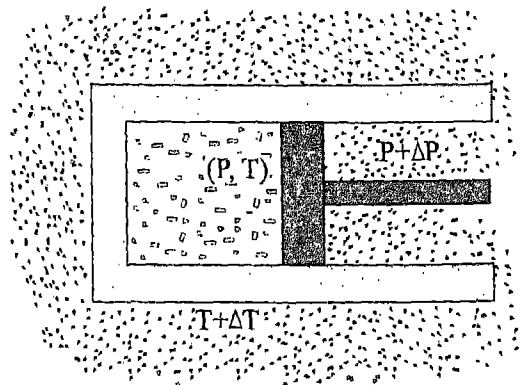
(iv) 30 °C के जल के दाब को घटा कर इतना कर दिया जाए कि यह 30 °C जल-वाष्प दाब के बराबर हो जाए तो उसे वाष्प में परिवर्तित किया जा सकता है । यह मार्ग T = 30 °C पर *P - T* आरेख पर ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश है ।

(v) जल के त्रिक बिंदु पर, ताप और दाब स्थिर होते हैं, किंतु तीनों प्रावस्थाओं की सापेक्ष मात्रा अद्वितीय नहीं होती है । तीनों प्रावस्थाओं की सापेक्ष मात्रा, निकाय से ऊष्मा लेने या इसको ऊष्मा देने के साथ परिवर्तित होती है । ◄

12.13 ऊष्मागतिकीय प्रक्रम

12.13.1 स्थैतिककल्प प्रक्रम

ऐसी गैस पर विचार कीजिए जो अपने परिवेश से तापीय तथा यांत्रिक रूप से साम्य में हो । ऐसी स्थिति में गैस का दाब बाह्य दाब के बराबर होगा तथा इसका ताप वही होगा जो परिवेश का है । कल्पना कीजिए कि बाह्य दाब को यकायक कम कर देते हैं (मान लीजिए कि बर्तन में लगे गतिशील पिस्टन से भार हटा लेते हैं) । पिस्टन बाहर की ओर त्वरित होगा । प्रक्रम की अवधि में गैस उन अवस्थाओं से गुजरती है जो संतुलन की अवस्थाएं नहीं हैं । असंतुलित अवस्थाओं का सुपरिभाषित दाब व ताप नहीं होता । इसी प्रकार, यदि गैस व उसके परिवेश के मध्य सीमित तापांतर है, तो ऊष्मा का विनिमय द्रुत गति से होता है । इस प्रक्रम में गैस असंतुलन की अवस्थाओं से गुजरती है । यथासमय, गैस संतुलन की अवस्था में पहुंच जाएगी जिसमें सुपरिभाषित ताप व दाब परिवेश के ताप व दाब के बराबर हो जाएगा । निर्वात में गैस का स्वतंत्र प्रसार तथा विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया प्रदर्शित करने वाली गैसों का सम्मिश्रण (जिसका खंड (12.11) में वर्णन किया गया है) भी ऐसे उदाहरण हैं जिसमें निकाय असंतुलन की अवस्थाओं से गुजरता है ।

किसी निकाय की असंतुलन की अवस्थाओं से व्यवहार करना कठिन होता है । इसलिए एक आदर्शीकृत प्रक्रम की कल्पना करना सरल होता है जिसके हर चरण में निकाय एक साम्यावस्था में है । ऐसा प्रक्रम सिद्धांत अनंत रूप से धीमा होता है । इस कारण इस प्रक्रम को स्थैतिककल्प (लगभग स्थिर) प्रक्रम कहते हैं, निकाय अपने चरों (P, T, V) को इतनी धीमी गति से परिवर्तित करता है कि यह पूरी अवधि में अपने परिवेश से तापीय व यांत्रिक साम्य में रहता है । किसी स्थैतिककल्प प्रक्रम के हर चरण में निकाय के दाब तथा उसके बाह्य दाब का अंतर अनंत रूप से छोटा होता है । यही बात निकाय तथा उसके परिवेश के मध्य तापांतर पर भी लागू होती है । स्थैतिककल्प प्रक्रम के माध्यम से किसी गैस को उसकी अवस्था (P, T) से अन्य अवस्था (P', T') में ले जाते हैं तो हम बाह्य दाब को अत्यल्प मात्रा से परिवर्तित करते हैं तथा इसके दाब को परिवेश के दाब के बराबर हो जाने देते हैं । प्रक्रम को अति धीमी गति से चलने देते हैं जब तक कि निकाय का दाब P' न हो जाए । इसी प्रकार, ताप बदलने के लिए हम निकाय तथा परिवेश के ऊष्माशयों के मध्य अत्यन्त सूक्ष्म तापांतर उत्पन्न करते हैं तथा ऊष्माशयों का उत्तरोत्तर भिन्न तापों T से T' पर चयन करते हैं। इस प्रकार निकाय का ताप T' हो जाता है । स्पष्ट रूप से, स्थैतिककल्प प्रक्रम काल्पनिक रचना है। व्यवहार रूप से उन प्रक्रमों को, जो बहुत ही धीमे हैं, जिनके पिस्टन में त्वरित गति

चित्र 12.12 स्थैतिककल्प प्रक्रम में परिवेश के पात्र का ताप तथा बाह्य दाब एवं निकाय के ताप व दाब का अंतर अत्यल्प है ।

नहीं होती तथा जिनमें अधिक ताप प्रवणता आदि होती है आदर्श स्थैतिककल्प प्रक्रम मानना लगभग तर्कसंगत है। यदि अन्य बात का वर्णन न किया जाए तो हम अब स्थैतिककल्प प्रक्रमों के विषय में ही अध्ययन करेंगे।

वह प्रक्रम जिसकी पूरी अवधि में निकाय का ताप स्थिर रखा जाता है, **समतापीय प्रक्रम** कहलाता है । स्थिर ताप के किसी विशाल ऊष्माशय में रखे धात्विक सिलिंडर में प्रसारित हो रही गैस समतापीय प्रक्रम का एक उदाहरण है । (ऊष्माशय से निकाय में ऊष्मा के स्थानांतरण से ऊष्माशय का ताप यथार्थ रूप से प्रभावित नहीं होता, क्योंकि उसकी ऊष्माधारिता अत्यधिक होती है) । **समदाबीय प्रक्रम** में दाब स्थिर रहता है जबकि **समआयतनिक प्रक्रम** में आयतन स्थिर रहता है । अंततः, यदि निकाय को परिवेश से ऊष्मारुद्ध कर दिया जाए तथा निकाय व परिवेश के मध्य ऊष्मा प्रवाहित न हो, तो प्रक्रम **रुद्धोष्म** होता है । इन विशेष प्रक्रमों की परिभाषाओं का सार सारणी 12.3 में प्रस्तुत किया गया है ।

सारणी 12.3 कुछ विशिष्ट ऊष्मागतिकीय प्रक्रम

प्रक्रमों का प्रकार	विशेषता
समतापीय	स्थिर ताप
समदाबीय	स्थिर दाब
समआयतनिक	स्थिर आयतन
रुद्धोष्म	निकाय व परिवेश के मध्य ऊष्मा प्रवाह नहीं ($\Delta Q = 0$)

अब हम इन प्रक्रमों के विषय में विस्तार से अध्ययन करेंगे।

समतापीय प्रक्रम

किसी समतापीय प्रक्रम में (जिसमें T स्थिर है) आदर्श गैस समीकरण से निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है

$$PV = \text{नियतांक}$$

अर्थात् किसी निश्चित द्रव्यमान की गैस का दाब उसके आयतन का व्युत्क्रमानुपाती होता है । यह और कुछ नहीं वरन् बॉयल का नियम है । हम इसकी चर्चा पहले ही कर चुके हैं कि वास्तविक गैसें $T > T_c$ व अल्प घनत्व की सीमा में इस नियम का पालन करती हैं (T_c क्रांतिक ताप है) । दूसरे भागों के लिए बॉयल के नियम जैसी सरल समीकरण वैध नहीं होती । चित्र (12.10) के P-V समतापी रेखाओं का विवेचन हम अनुभाग (12.12) में कर चुके हैं ।

कल्पना कीजिए कि कोई आदर्श गैस समतापीय (ताप T पर) ढंग से अपनी प्रारंभिक (P_1, V_1) से अंतिम अवस्था (P_2, V_2) में पहुंचती है । बीच के किसी चरण में जब दाब P हो तथा आयतन में परिवर्तन V से $V + \Delta V$ (ΔV कम) हो, तो

$$\Delta W = P\Delta V$$

$\Delta V \to 0$ लेते हुए राशि ΔW को संपूर्ण प्रक्रम में जोड़कर कार्य की कुल मात्रा निम्नलिखित रूप से ज्ञात कर लेते हैं,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$

$$= \mu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \mu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (12.32)$$

दूसरे चरण में हमने आदर्श गैस समीकरण $PV = \mu RT$ का उपयोग किया है तथा अचरों को समाकलन से बाहर ले लिया है । आदर्श गैस के लिए आंतरिक ऊर्जा ताप पर निर्भर करती है । इस प्रकार, किसी आदर्श गैस के समतापीय प्रक्रम में आंतरिक ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता । इसलिए ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार, गैस को दी गई ऊष्मा की मात्रा गैस द्वारा संपादित किए गए कार्य के बराबर होती है : $Q = W$ । समीकरण (12.32) में ध्यान दीजिए कि जब $V_2 > V_1$ तो $W > 0$; तथा $V_2 < V_1$ के लिए $W < 0$ होता है । इसका तात्पर्य यह है कि समतापीय प्रसार में गैस ऊष्मा अवशोषित करके कुछ कार्य संपादित करती है जबकि समतापीय संपीडन में गैस पर परिवेश द्वारा कार्य होता है तथा ऊष्मा का निष्कासन होता है ।

रुद्धोष्म प्रक्रम

रुद्धोष्म प्रक्रम में निकाय को परिवेश से ऊष्मारुद्ध कर देते हैं फलस्वरूप अवशोषित या निष्कासित ऊष्मा शून्य होती है । समीकरण (12.20) से पता चलता है कि गैस द्वारा संपादित कार्य के फलस्वरूप आंतरिक ऊर्जा कम हो जाती है (और इस प्रकार आदर्श गैस के लिए उसका ताप) । यहां हम बिना उपपत्ति के इस तथ्य का उल्लेख कर रहे हैं (जिसका आप उच्च कक्षाओं में अध्ययन करेंगे) कि आदर्श गैस के लिए रुद्धोष्म प्रक्रम में

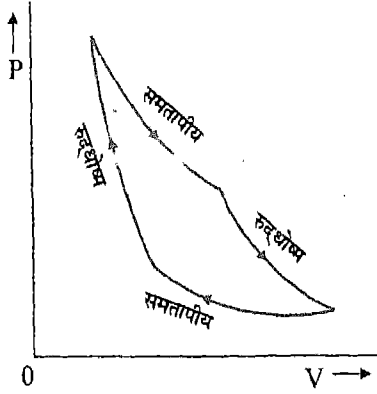
$$PV^{\gamma} = \text{नियतांक} \qquad (12.33)$$

जहां γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं (सामान्य अथवा मोलर), स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा C_p तथा स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा C_v का अनुपात है । अर्थात्

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

अतः यदि कोई आदर्श गैस रुद्धोष्म ढंग से (P_1, V_1) अवस्था से (P_2, V_2) अवस्था में पहुंच जाती है, तो

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} \qquad (12.34)$$

चित्र 12.13 में आदर्श गैस के लिए P-V वक्रों को दो रुद्धोष्म से जोड़ने वाले दो समतापीय को दर्शाया गया है ।

चित्र 12.13 आदर्श गैस के समतापीय व रुद्धोष्म प्रक्रमों के लिए P-V वक्र ।

किसी आदर्श गैस की अवस्था (P_1, V_1, T_1) से अवस्था (P_2, V_2, T_2) में रुद्धोष्म परिवर्तन में होने वाले कार्य को हम पहले ही की भांति परिकलित कर सकते हैं । अर्थात्,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} PdV$$

$$= \text{नियतांक} \times \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = \text{नियतांक} \times \left. \frac{V^{-\gamma+1}}{1-\gamma} \right|_{V_1}^{V_2}$$

$$\frac{\text{नियतांक}}{1-\gamma} \left[\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right] \qquad (12.35)$$

समीकरण (12.34), से नियतांक $P_1 V_1^{\gamma}$ है अथवा $P_2 V_2^{\gamma}$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{1-\gamma} \left[\frac{P_2 V_2^{\gamma}}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{P_1 V_1^{\gamma}}{V_1^{\gamma-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma} [P_2 V_2 - P_1 V_1] = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} \qquad (12.36)$$

जैसा अपेक्षित है, यदि रुद्धोष्म प्रक्रम में कार्य गैस द्वारा संपन्न होता है ($W > 0$), तब समीकरण (12.36) से $T_2 > T_1$ । इसके विपरीत, यदि कार्य गैस पर संपादित होता है ($W < 0$) तो, हमें $T_2 > T_1$ प्राप्त होता है, अर्थात् गैस का ताप बढ़ता है ।

समआयतनिक प्रक्रम

किसी समआयतनिक प्रक्रम में V नियत रहता है । इस प्रक्रम में न तो गैस पर कोई कार्य होता है और न ही गैस द्वारा कोई कार्य संपादित होता है । समीकरण (12.20) से गैस द्वारा अवशोषित ऊष्मा पूर्ण रूप से उसकी आंतरिक ऊर्जा तथा उसके ताप को परिवर्तित करने में व्यय होती है । किसी दी गई ऊष्मा की मात्रा के लिए ताप में परिवर्तन नियत आयतन पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा द्वारा निर्धारित किया जाता है।

समदाबीय प्रक्रम

समदाबीय प्रक्रम में दाब P नियत रहता है । गैस द्वारा किया गया कार्य

$$W = P(V_2 - V_1) = \mu R(T_2 - T_1) \qquad (12.37)$$

चूंकि ताप परिवर्तित होता है, अतः आंतरिक ऊर्जा भी परिवर्तित होती है । अवशोषित ऊष्मा आंशिक रूप से आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करने में तथा आंशिक रूप से कार्य करने में व्यय होती है । किसी नियत ऊष्मा की मात्रा के लिए ताप में परिवर्तन नियत दाब पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा द्वारा निर्धारित किया जाता है ।

चक्रीय प्रक्रम

चक्रीय प्रक्रम में निकाय अपनी प्रारंभिक अवस्था में वापस लौट आता है । चूंकि आंतरिक ऊर्जा अवस्था चर है, चक्रीय प्रक्रम के लिए ΔU=0 । समीकरण (12.20) से, अवशोषित ऊष्मा की कुल मात्रा निकाय द्वारा किए गए कार्य के बराबर होती है ।

12.14 ऊष्मा इंजन

ऊष्मा इंजन एक ऐसी युक्ति है, जिसमें निकाय द्वारा चक्रीय प्रक्रम पूरा कराया जाता है जिसके फलस्वरूप ऊष्मा कार्य में रूपांतरित होती है । चक्र बार-बार दोहराया जाता है ताकि किसी प्रयोजन के लिए उपयोगी कार्य संपादित हो सके । ऊष्मागतिकी विषय की जड़ें ऊष्मा इंजनों के अध्ययन में हैं । किसी ऊष्मा इंजन की दक्षता से एक मौलिक प्रश्न संबंधित होता है । किसी ऊष्मा इंजन की दक्षता (η) को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$\eta = \frac{W}{Q_1} \qquad (12.38)$$

यहां Q_1 ऊष्मा निवेश है, अर्थात् निकाय द्वारा एक पूरे चक्र में अवशोषित ऊष्मा की मात्रा है तथा W एक चक्र में परिवेश पर किया गया कार्य है । एक चक्र में ऊष्मा की कुछ निश्चित मात्रा [Q_2] परिवेश में निष्कासित भी हो सकती है । ऐसी परिस्थिति में ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार एक पूरे चक्र के लिए किया गया कार्य

$$W = Q_1 - Q_2 \qquad (12.39)$$

अर्थात्

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad (12.40)$$

यदि $Q_2 = 0$ है, तो $\eta = 1$, अर्थात् ऊष्मा को कार्य में परिवर्तित करने में इंजन की दक्षता 100% होगी । इस बात पर ध्यान दीजिए कि ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम अर्थात् ऊर्जा संरक्षण का नियम इस प्रकार के इंजन की संभावना से इंकार नहीं करता । परंतु अनुभव

यह दर्शाता है कि चाहे हम वास्तविक इंजन से संबंधित विभिन्न प्रकार की हानियों को कितना भी कम क्यों न कर दें, ऐसा आदर्श इंजन होना जिसके लिए $\eta = 1$ हो, कदापि संभव नहीं हैं। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि ऊष्मा इंजन की दक्षता की एक भौतिक सीमा होती है जिसका निर्धारण प्रकृति के एक स्वावलंबी नियम, जिसे ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम कहते हैं (खंड 12.16) द्वारा होता है।

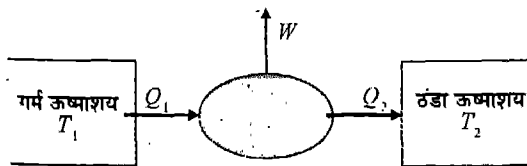
ऊष्मा को कार्य में परिवर्तित करने की प्रक्रिया विभिन्न प्रकार के ऊष्मा इंजनों के लिए भिन्न है। मौलिक रूप से इसके दो प्रकार हैं: निकाय (जैसे कोई गैस या गैसों के मिश्रण) को किसी बाह्य भट्टी द्वारा गरम किया जाए, जैसा कि भाप इंजन में होता है, अथवा इसके आंतरिक रूप से ऊष्मान्मोची रासायनिक अभिक्रिया द्वारा गरम किया जाए, जैसा कि आंतरिक दहन इंजन में होता है। किसी चक्र में निहित विभिन्न चरण भी एक इंजन से दूसरे इंजन में बदलते रहते हैं। व्यापक विश्लेषण के उद्देश्य से किसी ऊष्मा इंजन को निम्नलिखित आवश्यक अवयवों के रूप में संकल्पित करना उपयोगी होता है :

(1) इसमें एक कार्यकारी पदार्थ होता है, जिसे निकाय कहते हैं। उदाहरणार्थ, किसी गैसोलीन अथवा डीजल इंजन में ईंधन वाष्प तथा वायु का मिश्रण, अथवा किसी भाप इंजन में भाप कार्यकारी पदार्थ हैं।

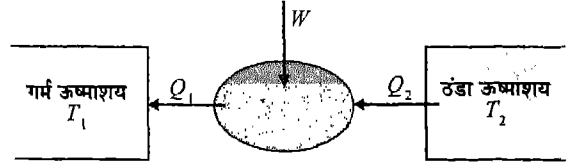
(2) कार्यकारी पदार्थ एक चक्र पूरा करता है जिसमें कई प्रक्रम होते हैं। इनमें से कुछ प्रक्रमों में यह पदार्थ किसी उच्च ताप T_1 पर किसी बाह्य ऊष्माशय से ऊष्मा की कुल मात्रा Q_1 अवशोषित करता है।

(3) चक्र के अन्य प्रक्रमों में कार्यकारी पदार्थ किसी अपेक्षाकृत कम ताप T_2 पर किसी बाह्य ऊष्माशय को कुल ऊष्मा की मात्रा Q_2 मुक्त करता है।

(4) किसी चक्र में निकाय द्वारा संपादित कार्य W किसी प्रबंध से परिवेश में स्थानांतरित किया जाता है (उदाहरणार्थ, कार्यकारी पदार्थ गतिशील पिस्टन लगे किसी सिलिंडर में भरा हो सकता है जो पिस्टन द्वारा यांत्रिक ऊर्जा को शाफ्ट के माध्यम से वाहन के पहियों को स्थानांतरित कर देता है।

किसी ऊष्मा इंजन के मौलिक लक्षणों का योजनाबद्ध निरूपण चित्र 12.14 में किया गया है।

चित्र 12.14 ऊष्मा इंजन का योजनाबद्ध निरूपण। इंजन ताप T_1 पर गरम ऊष्माशय से Q_1 ऊष्मा ग्रहण करता है, ताप T_2 पर एक ठंडे ऊष्माशय को Q_2 ऊष्मा मुक्त करता है तथा परिवेश को कार्य W प्रदान करता है।

12.15 प्रशीतक/ऊष्मा पंप

प्रशीतक या ऊष्मा पंप ऊष्मा इंजन के ठीक विपरीत होता है। इसमें कार्यकारी पदार्थ किसी निम्न ताप T_2 के ऊष्माशय से Q_2 ऊष्मा ग्रहण करता है, तत्पश्चात उस पर कुछ बाह्य कार्य W किया जाता है तथा ऊष्मा Q_1 किसी उच्च ताप T_1 के ऊष्माशय को मुक्त कर दी जाती है (चित्र 12.15)।

चित्र 12.15 प्रशीतक या ऊष्मा पंप का योजनाबद्ध निरूपण। यह ऊष्मा इंजन का प्रतिलोम होता है।

ऊष्मा पंप प्रशीतक के समान होता है। हम किस शब्द का उपयोग करते हैं, यह युक्ति के प्रयोजन पर निर्भर करता है यदि प्रयोजन किसी स्थान के कुछ भाग, जैसे कि किसी प्रकोष्ठ के भीतरी भाग, को ठंडा करना है, तो युक्ति को हम प्रशीतक कहते हैं। किंतु यदि प्रयोजन किसी स्थान के किसी भाग में ऊष्मा को पंप करता है, तो युक्ति को ऊष्मा पंप कहते हैं। ऐसा भवन के किसी कमरे को गरम करने के लिए उस समय किया जाता है जब बाहरी वातावरण ठंडा होता है।

प्रशीतक में कार्यकारी पदार्थ (प्रायः, फ्रीऑन गैस) निम्नलिखित चरणों से गुजरती है : (a) उच्च दाब से निम्न दाब के क्षेत्र में गैस में अचानक प्रसार होता है जिसके कारण वह (फ्रीऑन) ठंडी हो जाती है तथा वाष्प-द्रव मिश्रण में रूपांतरित हो जाती है, (b) ठंडे तरल द्वारा उस भाग से ऊष्मा का अवशोषण जिसे ठंडा करना है, इससे तरल वाष्प में रूपांतरित हो जाता है, (c) निकाय पर किए गए बाह्य कार्य द्वारा वाष्प का गरम होना, तथा (d) वाष्प द्वारा परिवेश में ऊष्मा मुक्त करके कार्यकारी पदार्थ को एक चक्र पूरा कर पुनः अपनी आरंभिक अवस्था में वापस लाना है। इस प्रकार प्रशीतक का निष्पादन गुणांक

$$\alpha = \frac{Q_2}{W} \tag{12.41}$$

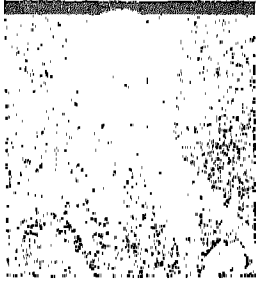
यहां Q_2 ठंडे ऊष्माशय से अवशोषित ऊष्मा की मात्रा तथा W निकाय – प्रशीतक पर किया गया कार्य है। ध्यान दीजिए, परिभाषा के अनुसार η का मान 1 से अधिक नहीं हो सकता, जबकि α का मान 1 से अधिक हो सकता है। ऊर्जा संरक्षण द्वारा गरम ऊष्माशय को मुक्त की गई ऊष्मा

$$Q_1 = W + Q_2$$

अर्थात्

$$\alpha = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \tag{12.42}$$

होती है।

ऊष्मागतिकी के पथ-प्रदर्शक

लार्ड केल्विन (विलियम थॉमसन) (1824-1907), बेल्फास्ट, आयरलैंड में जन्मे 19वीं शती के ब्रिटिश वैज्ञानिकों में से एक हैं। जेम्स जूल (1818-1889), जूलियस मेयर (1814-1878) तथा हरमैन हेल्महॉल्ट्ज़ (1821-1894) द्वारा प्रस्तावित ऊर्जा के संरक्षण नियम के विकास में थॉमसन ने प्रमुख भूमिका अदा की। उन्होंने सुविख्यात "जूल-थॉमसन प्रभाव" : निर्वात में प्रसारित होने पर किसी गैस का ठंडा होना, की खोज में जूल के सहयोगी के रूप में कार्य किया। इन्होंने ताप के परम शून्य की धारणा से परिचय कराया। परम ताप मापक्रम को प्रस्तावित किया, जिसे उनके सम्मान में केल्विन तापक्रम कहते हैं। साडी कार्नो (1796-1832) के कार्य से थॉमसन ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम के एक स्वरूप तक पहुंचे। थॉमसन एक बहुमुखी प्रतिभा के भौतिकविद थे जिन्होंने वैद्युतचुंबकीय सिद्धांत तथा द्रवगतिकी में महत्त्वपूर्ण योगदान दिया।

रूडोल्फ क्लासियस (1822-1888), पोलैण्ड में जन्मे इस भौतिकविद को प्रमुख रूप से ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम का आविष्कारक माना जाता है। कार्नो तथा थॉमसन के कार्य के आधार पर क्लासियस एंट्रॉपी जैसी महत्त्वपूर्ण धारणा पर पहुंचे जिसने ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम के मूल स्वरूप की खोज का मार्ग प्रशस्त किया जिसके कारण किसी वियुक्त निकाय की एंट्रॉपी कभी भी घट नहीं सकती। क्लासियस ने गैसों के अणुगति सिद्धांत पर भी कार्य किया तथा प्रथम आण्विक अमाप, चाल तथा माध्य मुक्त पथ का विश्वसनीय आकलन प्राप्त किया।

ऊष्मा इंजन में ऊष्मा को पूर्ण रूप से कार्य में रूपांतरित नहीं किया जा सकता : उसी प्रकार से निकाय पर बिना कुछ बाह्य कार्य किए कोई प्रशीतक कार्य नहीं कर सकता, अर्थात् समीकरण (12.41) में निष्पादन गुणांक अनंत नहीं हो सकता।

12.16 ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम

ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम ऊर्जा संरक्षण नियम है। सामान्य अनुभव यह बतलाता है कि ऐसे बहुत से विचारणीय प्रक्रम हैं जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से पूर्णतया अनुमत हैं तथापि कभी भी होते हुए दिखाई नहीं देते। उदाहरणार्थ, ऐसा किसी ने कभी नहीं देखा कि मेज पर पड़ी कोई पुस्तक स्वतः उछलकर किसी ऊंचाई पर पहुंच जाए। किंतु ऐसी बात तभी संभव हो सकती है यदि केवल ऊर्जा संरक्षण नियम का ही नियंत्रण हो। मेज स्वतः ठंडी होकर अपनी आंतरिक ऊर्जा का कुछ अंश पुस्तक की समान मात्रा की यांत्रिक ऊर्जा में रूपांतरित करने में करे और इस यांत्रिक ऊर्जा के कारण पुस्तक उस ऊंचाई तक उछले जिसकी स्थितिज ऊर्जा पुस्तक द्वारा प्राप्त यांत्रिक ऊर्जा के बराबर हो। परंतु ऐसा कदापि नहीं होता। स्पष्ट है कि प्रकृति के किसी आंतरिक मूल नियम के कारण यह निषेध है। यद्यपि यह ऊर्जा संरक्षण नियम का अनुपालन करता है। वह नियम जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से संगत अनेक परिघटनाओं को स्वीकृति नहीं देता, ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम कहलाता है।

ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम किसी ऊष्मा इंजन की दक्षता तथा किसी प्रशीतक के निष्पादन गुणांक की मूल सीमा निर्धारित करता है। सरल भाषा में, यह नियम बताता है कि ऊष्मा इंजन की दक्षता कदापि 1 नहीं हो सकती। समीकरण (12.40) के अनुसार, इसका तात्पर्य यह है कि ठंडे ऊष्माशय की मुक्त ऊष्मा को कभी भी शून्य नहीं किया जा सकता। प्रशीतक के लिए द्वितीय नियम यह बताता है कि निष्पादन गुणांक कदापि अनंत नहीं हो सकता। समीकरण (12.41) से यह निष्कर्ष निकलता है कि बाह्य कार्य (W) कभी भी शून्य नहीं हो सकता। अधोलिखित दोनों प्रकथन, जिनमें से एक कैल्विन तथा प्लैंक के द्वारा दिया गया है जिसके अनुसार, किसी आदर्श ऊष्मा इंजन की संभावना का खंडन किया गया है, तथा दूसरा क्लासियस द्वारा दिया गया है जिसके अनुसार, किसी आदर्श प्रशीतक अथवा ऊष्मा पंप की संभावना का खंडन किया गया है, इन प्रेक्षणों का एक संक्षिप्त सार है।

ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम

कैल्विन-प्लैंक का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका एकमात्र परिणाम किसी ऊष्माशय से ऊष्मा का अवशोषण करना तथा उस ऊष्मा को कार्य में रूपांतरित करना हो।

क्लासियस का प्रकथन

ऐसा कोई भी प्रक्रम संभव नहीं है जिसका एकमात्र परिणाम किसी ठंडे पिंड से किसी गर्म पिंड में ऊष्मा स्थानांतरण हो।

उच्च कक्षाओं के पाठ्यक्रमों में आप इसकी उपपत्ति पढ़ेंगे कि दोनों प्रकथन पूर्णतया समतुल्य हैं।

12.17 उत्क्रमणीय व अनुत्क्रमणीय प्रक्रम

किसी ऐसे प्रक्रम की कल्पना कीजिए जिसमें कोई ऊष्मागतिकीय निकाय आरंभिक अवस्था i से अंतिम अवस्था f में पहुंचता है। प्रक्रम की अवधि में निकाय परिवेश से Q ऊष्मा अवशोषित करता है तथा उस पर W कार्य संपादित करता है। क्या हम इस प्रक्रम को उलट सकते हैं तथा निकाय व परिवेश दोनों को, कहीं भी कोई अन्य प्रभाव पड़े बिना, आरंभिक अवस्था में वापस ला सकते हैं? अनुभव बताता है कि प्रकृति के अधिकांश प्रक्रमों में ऐसा होना संभव नहीं है। प्रकृति में स्वत: प्रक्रम अनुत्क्रमणीय हैं। इसके अनेक उदाहरण गिनाये जा सकते हैं। चूल्हे पर रखे बर्तन का आधार दूसरे भागों की अपेक्षा अधिक गरम होता है। जब बर्तन को हटाते हैं तो ऊष्मा आधार से दूसरे भागों में स्थानांतरित होती है जिससे बर्तन का ताप एकसमान हो जाता है (यथोचित समय में यह परिवेश के ताप के बराबर ठंडा हो जाता है)। इस प्रक्रम को उत्क्रमित नहीं किया जा सकता, बर्तन का कोई भाग स्वत: ठंडा होकर आधार को गर्म नहीं करेगा। यदि ऐसा होता है तो ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम का उल्लंघन होगा। गैस का मुक्त प्रसार अनुत्क्रमणीय होता है। वायु तथा पेट्रोल के मिश्रण में स्फुलिंग द्वारा प्रज्ज्वलित दहन अभिक्रिया को उत्क्रमित नहीं किया जा सकता। रसोईघर में किसी गैस सिलिंडर से रिस रही भोजन पकाने की गैस पूरे कमरे में विसरित हो जाती है। विसरण प्रक्रम स्वत: उत्क्रमित नहीं होगा जिससे गैस वापस सिलिंडर में भर जाए। किसी ऊष्माशय के ऊष्मीय संपर्क में आने वाले द्रव का विलोड़न संपादित हो रहे कार्य को ऊष्मा में रूपांतरित कर देगा जिससे उष्माशय की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाती है। प्रक्रम को पूर्णतया उत्क्रमित नहीं कर सकते, अन्यथा इसका अर्थ होगा कि ऊष्मा पूर्णतया कार्य में परिवर्तित हो गई है। यह ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम का उल्लंघन है। उत्क्रमणीयता एक नियम है न कि प्रकृति में कोई अपवाद।

उत्क्रमणीयता मुख्यत: दो कारणों से उत्पन्न होती है : पहला, अनेक प्रक्रम (जैसे मुक्त प्रसरण या विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया) निकाय को असंतुलन की अवस्थाओं में ले जाते हैं; दूसरा, अनेक प्रक्रमों में घर्षण, श्यानता तथा अन्य क्षय संबंधी प्रभाव निहित होते हैं (इसके उदाहरण हैं – किसी गतिमान पिंड का रुकना जिसमें पिंड अपनी यांत्रिक ऊर्जा को फर्श व स्वयं अपनी ऊष्मा के रूप में दे देता है; द्रव में घूमते हुए ब्लेड का श्यानता के कारण रुक जाना जिसमें यह अपनी यांत्रिक ऊर्जा को द्रव की आंतरिक ऊर्जा के लाभ के रूप में दे देता है)। चूंकि क्षयकारी प्रभाव सभी स्थानों पर उपस्थित रहते हैं। इन्हें कम तो किया जा सकता है पर पूर्णतया समाप्त नहीं किया जा सकता। जिन प्रक्रमों से हमारा अधिकतर सामना होता है वे सभी अनुत्क्रमणीय होते हैं।

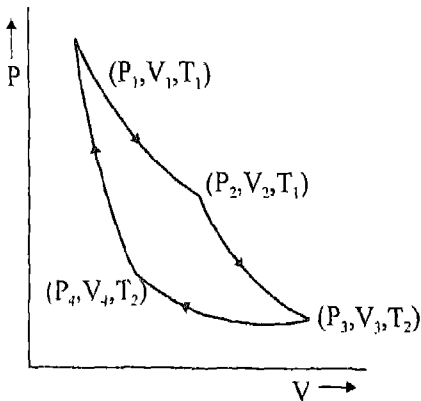
कोई ऊष्मागतिकीय प्रक्रम (अवस्था $i \rightarrow$ अवस्था f) तभी उत्क्रमणीय होता है यदि उसे इस प्रकार वापस लौटाया जा सके कि निकाय व परिवेश दोनों अपनी प्रारंभिक अवस्थाओं में वापस आ जाएं तथा विश्व में कहीं भी किसी भी प्रकार का अन्य परिवर्तन न हो। पूर्व विवेचना के अनुसार कोई उत्क्रमणीय प्रक्रम एक आदर्श धारणा है। कोई प्रक्रम उत्क्रमणीय तभी होता है जब वह स्थैतिककल्प होता है (परिवेश के साथ प्रत्येक चरण पर संतुलित निकाय) तथा निकाय में कोई क्षयकारी प्रभाव नहीं होते हैं। उदाहरणार्थ, घर्षणहीन गतिशील पिस्टन लगे सिलिंडर भरी किसी आदर्श गैस का स्थैतिककल्प समतापीय प्रसरण उत्क्रमणीय प्रक्रम होता है।

उत्क्रमणीयता ऊष्मागतिकी की ऐसी मूल धारणा क्यों है ? जैसा कि हम देख चुके है, ऊष्मागतिकी के महत्वों में से एक महत्त्व दक्षता का है जिससे ऊष्मा कार्य में रूपांतरित की जा सकती है। ऊष्मागतिकी का दूसरा नियम 100% दक्षता के आदर्श ऊष्मा इंजन की संभावना को नियम विरुद्ध बताता है। T_1 व T_2 के दो ऊष्माशयों के बीच कार्य करने वाले किसी ऊष्मा इंजन की संभावित अधिकतम दक्षता कितनी होगी ? यह देखा जाता है कि आदर्श उत्क्रमणीय प्रक्रमों पर आधारित कोई ऊष्मा इंजन अधिकतम संभावित दक्षता प्राप्त करता है। अन्य दूसरे इंजनों जिनमें किसी न किसी रूप में अनुत्क्रमणीयता निहित होती है (जैसा कि व्यावहारिक इंजनों में होता है) की दक्षता इस सीमांत दक्षता से कम होती है।

12.18 कार्नो इंजन

कल्पना कीजिए कि हमारे पास ताप T_1 पर एक ऊष्ण ऊष्माशय व ताप T_2 पर एक ठंडा ऊष्माशय है। इन दोनों ऊष्माशयों के बीच कार्य करने वाले किसी ऊष्मा इंजन की अधिकतम संभावित दक्षता कितनी होगी तथा सर्वाधिक दक्षता प्राप्त करने के लिए प्रकर्मों के किस चक्र को अपनाना चाहिए ? फ्रेंच इंजीनियर, साडी कार्नो ने 1824 में सर्वप्रथम इस प्रश्न पर विचार किया। रुचिकर बात यह है कि कार्नो ने इस प्रश्न का सही उत्तर पा लिया था यद्यपि ऊष्मा और ऊष्मागतिकी की मौलिक अवधारणा को तब तक दृढ़तापूर्वक स्थापित नहीं किया जा सका था।

हम यह आशा करते हैं कि दो तापों के बीच कार्य करने वाला आदर्श इंजन उत्क्रमणीय इंजन है। जैसा कि पहले अनुभागों में बताया जा चुका है, अनुत्क्रमणीयता से दक्षता को कम करने वाले क्षयकारी प्रभाव संबद्ध होते हैं। कोई प्रक्रम तभी

उत्क्रमणीय होता है यदि वह स्थैतिककल्प तथा अक्षयकारी हो। हम यह देख चुके हैं कि वह प्रक्रम स्थैतिककल्प नहीं होता है जिसमें निकाय व ऊष्माशय के बीच तापांतर परिमित हो। इसका तात्पर्य यह है कि दो तापों के मध्य कार्य कर रहे किसी उत्क्रमणीय ऊष्मा इंजन में ऊष्मा का अवशोषण (गरम ऊष्माशय से) समतापीय विधि द्वारा होना चाहिए तथा (अपेक्षाकृत ठंडे ऊष्माशय को) समतापीय विधि द्वारा ऊष्मा मुक्त होनी चाहिए। इस प्रकार, हमने उत्क्रमणीय इंजन के दो चरणों की पहचान की : ताप T_1 पर समतापीय प्रक्रम जिसमें गरम ऊष्माशय से Q_1 ऊष्मा अवशोषित होती है तथा ताप T_2 पर दूसरा समतापीय प्रक्रम जिसमें ठंडे ऊष्माशय को Q_2 ऊष्मा मुक्त होती है। चक्र पूरा होने के लिए इस बात की आवश्यकता है कि हम निकाय को ताप T_1 से T_2 तक ले जाएं फिर उसे ताप T_2 से T_1 पर वापस ले जाएं। प्रश्न यह है कि इस उद्देश्य के लिए हमें किन प्रक्रमों का उपयोग करना चाहिए जो उत्क्रमणीय हों ? थोड़े चिंतन से यह पता चल जाता है कि उस उद्देश्य के लिए हम केवल उत्क्रमणीय रुद्धोष्म प्रक्रम ही अपना सकते हैं जिसमें किसी भी ऊष्माशय से ऊष्मा का प्रवाह सम्मिलित नहीं होता। निकाय को एक ताप से दूसरे ताप तक ले जाने के लिए यदि हम कोई अन्य प्रक्रम अपनाते हैं जो रुद्धोष्म नहीं है, मान लीजिए समआयतनिक प्रक्रम, तो हमें ताप परिसर T_2 से T_1 में ऊष्माशयों की एक शृंखला की आवश्यकता होगी ताकि यह निश्चित किया जा सके कि हर चरण में प्रक्रम स्थैतिककल्प है। (हम आपको पुन: याद दिलाते हैं कि किसी स्थैतिककल्प व उत्क्रमणीय प्रक्रम में निकाय व ऊष्माशयों के बीच परिमित तापांतर नहीं होना चाहिए)। परंतु हम यहां एक ऐसे उत्क्रमणीय इंजन पर विचार कर रहे हैं जो केवल दो तापों के बीच कार्य करता है। इस प्रकार, रुद्धोष्म प्रक्रमों द्वारा निकाय के ताप में T_1 से T_2 तथा इस इंजन के ताप में T_2 से T_1 का परिवर्तन लाना चाहिए।

चित्र 12.16 किसी ऊष्मा इंजन के लिए कार्नो चक्र जिसमें कार्यकारी पदार्थ के रूप में आदर्श गैस का उपयोग होता है।

दो तापों के मध्य कार्य करने वाला कोई उत्क्रमणीय ऊष्मा इंजन कार्नो इंजन कहलाता है। हमने अभी विवेचना की है कि इस इंजन में चरणों का क्रम निम्नलिखित होना चाहिए, जो चित्र 12.16 में दर्शाए अनुसार एक चक्र का निर्माण करते हैं, जिसे कार्नो चक्र कहते हैं। हमने कार्नो इंजन का कार्यकारी पदार्थ एक आदर्श गैस लिया है।

(a) *चरण* $1\to2$ गैस का समतापी प्रसार जिसमें गैस अवस्था (P_1, V_1, T_1) से (P_2, V_2, T_2) में पहुंच जाती है।

ताप T_1 पर ऊष्माशय से अवशोषित ऊष्मा (Q_1) का मान समीकरण (12.32) से दिया जाता है। यह गैस द्वारा परिवेश पर संपादित किए गए कार्य $W_{1\to2}$ के बराबर होता है।

$$W_{1\to2} = Q_1 = \mu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (12.43)$$

(b) *चरण* $2\to3$ (P_2, V_2, T_2) से (P_3, V_3, T_3) अवस्था में गैस का रुद्धोष्म प्रसार। समीकरण (12.36) से गैस द्वारा संपादित हुआ कार्य होगा

$$W_{2\to3} = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{(\gamma-1)} \qquad (12.44)$$

(c) *चरण* $3\to4$ गैस की अवस्था (P_3, V_3, T_3) से (P_4, V_4, T_4) में समतापी संपीडन।

ताप T_2 पर गैस द्वारा ऊष्माशय को मुक्त की गई ऊष्मा की मात्रा समीकरण (12.32) से प्राप्त होती है। यह परिवेश द्वारा गैस पर संपादित कार्य $W_{3\to4}$ के भी बराबर होती है

$$W_{3\to4} = Q_2 = \mu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad (12.45)$$

(d) *चरण* $4\to1$ गैस की अवस्था (P_4, V_4, T_4) से (P_1, V_1, T_1) में रुद्धोष्म संपीडन। समीकरण (12.36) से गैस पर किया गया कार्य

$$W_{4\to1} = \mu R \frac{(T_1 - T_2)}{(\gamma-1)} \qquad (12.46)$$

समीकरणों (12.43) से (12.46) के उपयोग से एक पूरे चक्र में गैस द्वारा संपादित कुल कार्य की मात्रा,

$$W = W_{1\to2} + W_{2\to3} - W_{3\to4} - W_{4\to1}$$

$$= \mu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - \mu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \qquad (12.47)$$

कार्नो इंजन की दक्षता

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right) \frac{\ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \quad (12.48)$$

अब चूंकि चरण 2→3 एक रुद्धोष्म प्रक्रम है, इसलिए

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

अथवा $$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (12.49)$$

इसी प्रकार, चूंकि चरण 4→1 भी एक रुद्धोष्म प्रक्रम है, इसलिए

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

अथवा $$\frac{V_1}{V_4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad (12.50)$$

समीकरणों (12.49) तथा (12.50) से,

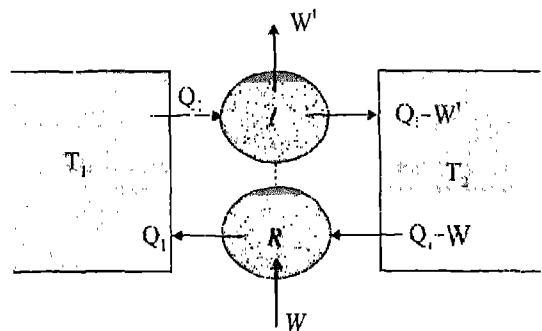
$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \quad (12.51)$$

समीकरण (12.51) के उपयोग से समीकरण (12.48) से η का निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \text{ (कार्नो इंजन)} \quad (12.52)$$

हम जानते हैं कि कार्नो इंजन एक उत्क्रमणीय इंजन है । वास्तव में यही एकमात्र ऐसा संभावित इंजन है जो भिन्न तापों के दो ऊष्माशयों के मध्य कार्य करता है । चित्र 12.16 में दर्शाए कार्नो चक्र का हर चरण उत्क्रमित किया जा सकता है । यह उस प्रक्रम के समान होता है, जिसमें T_2 ताप पर ठंडे ऊष्माशय से Q_2 ऊष्मा ली जाती है, निकाय पर W कार्य किया जाता है, तथा गरम ऊष्माशय को Q_1 ऊष्मा स्थानांतरित कर दी जाती है । यह युक्ति एक उत्क्रमणीय प्रशीतक होगी ।

अब हम महत्त्वपूर्ण परिणाम सिद्ध करेंगे (जिसे कभी-कभी कार्नो प्रमेय कहते हैं) कि (a) दिए हुए गरम तथा ठंडे ऊष्माशयों के क्रमशः दो तापों T_1 तथा T_2 के बीच कार्यरत किसी भी इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती है तथा (b) कार्नो इंजन की दक्षता कार्यकारी पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती ।

परिणाम (a) को सिद्ध करने के लिए हम कल्पना करते हैं कि एक उत्क्रमणीय (कार्नो) इंजन R तथा एक अनुत्क्रमणीय इंजन I एक ही स्रोत (गरम ऊष्माशय) तथा अभिगम (Sink) (ठंडा ऊष्माशय) के बीच कार्यरत हैं । अब हम इन दोनों इंजनों को इस प्रकार संयोजित करते हैं कि I ऊष्मा इंजन की भांति तथा R प्रशीतक की भांति कार्य करें । कल्पना कीजिए कि I स्रोत से Q_1 ऊष्मा अवशोषित करता है, W' कार्य प्रदान करता है तथा $Q_1 - W'$ ऊष्मा अभिगम को मुक्त करता है । हम ऐसा समायोजन करते हैं कि R अभिगम से Q_2 ऊष्मा लेकर तथा उस पर जो कार्य $W = Q_1 - Q_2$ किया जाना है, उसे कराकर उतनी ही ऊष्मा Q_1 स्रोत को वापस करता है । मान लीजिए कि $\eta_R < \eta_I$ है । अर्थात् यदि R इंजन की भांति कार्य करता तो वह I की अपेक्षा कम कार्य निर्गत करता अर्थात् किसी दी गई ऊष्मा Q_1 के लिए $W < W'$ । यदि R प्रशीतक के रूप में कार्य करता, तो इसका तात्पर्य यह होता कि $Q_2 = Q_1 - W > Q_1 - W'$ । इस प्रकार, समग्र रूप से संयोजित $I - R$ निकाय ठंडे ऊष्माशय से $(Q_1 - W) - (Q_1 - W') = W' - W$ ऊष्मा निकालता है तथा एक चक्र में इतनी ही मात्रा का कार्य उसे सौंप देता है (इस पूरे चक्र में स्रोत या अन्यत्र कोई परिवर्तन नहीं होता) । यह ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम से संबंधित केल्विन-प्लैंक के प्रकथन से सर्वथा विपरीत है । इसलिए यह बलपूर्वक कहना कि $\eta_I > \eta_R$ अनुचित है । अतः समान तापों के मध्य कार्यरत किसी भी इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती । इसी प्रकार के एक तर्क की रचना यह दर्शाने के लिए भी की जा सकती है कि ऐसे उत्क्रमणीय इंजन की दक्षता जिसमें एक विशेष कार्यकारी पदार्थ है, उस इंजन की दक्षता से अधिक नहीं

चित्र 12.17 उत्क्रमणीय प्रशीतक (R) से संयुक्त एक अनुत्क्रमणीय इंजन (I) । यदि $W' > W$, तो इसका आशय यह हुआ कि अवशोषक से $W' - W$ ऊष्मा निकालकर उसे पूर्णतः कार्य में रूपांतरित कर दिया गया है, जो ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम के विपरीत है ।

हो सकती जिसमें कोई अन्य पदार्थ उपयोग होता है। कार्नो इंजन की अधिकतम दक्षता जो समीकरण (12.52) से दी जाती है, कार्नो चक्र की प्रक्रिया को संपादित करने वाले निकाय की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती है। अतः हमारे लिए कार्नो इंजन की दक्षता η के परिकलन के लिए निकाय के रूप में आदर्श गैस का उपयोग न्यायसंगत है। आदर्श गैस की अवस्था समीकरण सरल होती है जिसके कारण η का परिकलन तुरंत हो जाता है, किंतु η के लिए अंतिम परिणाम, समीकरण (12.52), किसी भी कार्नो इंजन के लिए सही है।

यह अंतिम टिप्पणी दर्शाती है कि कार्नो इंजन के लिए,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (12.53)$$

एक सार्वत्रिक संबंध है जो निकाय की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता। यहां Q_1 व Q_2 कार्नो इंजन में क्रमशः गरम व ठंडे ऊष्माशयों द्वारा समतापीय ढंग से अवशोषित व मुक्त की गई ऊष्माएं हैं। किसी वास्तविक सर्वव्यापक ऊष्मागतिकीय ताप मापक्रम को परिभाषित करने के लिए हम समीकरण (12.53) का एक सूत्र के रूप में उपयोग कर सकते हैं। यह तापक्रम कार्नो चक्र में प्रयुक्त निकाय के किन्हीं विशेष गुणधर्मों पर निर्भर नहीं करता। वास्तव में, कार्यकारी पदार्थ के रूप में किसी आदर्श गैस के लिए सार्वत्रिक ताप का मान वही है जो खंड 12.6 में उल्लेखित आदर्श गैस ताप का है।

सारांश

1. ऊष्मागतिकी का शून्यवां नियम यह अभिव्यक्त करता है कि "दो निकाय जो किसी तीसरे निकाय के साथ तापीय साम्य में हैं, वे एक दूसरे के साथ भी तापीय साम्य में होते हैं"। शून्यवां नियम ताप की धारणा को संचालित करता है।

2. ताप मापने की युक्ति (तापमापी) मापने योग्य किसी ऐसे गुण का उपयोग करती है जिसमें ताप के साथ परिवर्तन होता है। भिन्न-भिन्न तापमापी में अलग-अलग ताप मापक्रम होतें हैं। किसी ताप मापक्रम की रचना के लिए दो नियत बिंदु चुने जाते हैं तथा उनके लिए ताप के कोई स्वेच्छ मान निर्धारित किए जाते हैं। ये दोनों अंक तापक्रम के मूल बिंदु तथा उसके मात्रक के आकार को निश्चित करते हैं।

3. परम तापक्रम में, पैमाने का शून्य ताप के परम शून्य को व्यक्त करता है। इस ताप पर प्रकृति के प्रत्येक पदार्थ में न्यूनतम संभावित आण्विक सक्रियता होती है। कैल्विन परम तापक्रम (T) के मात्रक का यही आकार होता है जो सेल्सियस मापक्रम (t_c) का, परंतु इन दोनों के मूल बिंदु भिन्न होते हैं :

$$t_c = T - 273.15$$

जल का त्रिक बिंदु – एक ऐसी अवस्था जिसमें जल की ठोस, द्रव व वाष्प अवस्थाएं सहअस्तित्व में रहती हैं, का अद्वितीय ताप व दाब होता है, तथा इसलिए आधुनिक तापमिति में यह एक अधिमत स्थिर बिंदु है। कैल्विन के परम तापक्रम में जल के त्रिक बिंदु का नियत मान 273.16 K है।

4. आदर्श गैस ताप निम्न प्रकार से परिभाषित होता है,

$$T = \lim_{P_{tr} \to 0} 273.16 \left[\frac{P}{P_{tr}}\right]$$

यहां P व P_{tr} (स्थिर आयतन पर) क्रमशः ताप T व त्रिक बिंदु (273.16 K) पर गैस के दाब हैं।

5. दैर्ध्य प्रसार गुणांक (α_l) तथा आयतन प्रसार गुणांक (α_v) निम्नलिखित संबंधों द्वारा परिभाषित होते हैं :

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_l \Delta T$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha_v \Delta T$$

यहां ताप में परिवर्तन ΔT के कारण क्रमशः लंबाई l तथा आयतन V में हुए परिवर्तन क्रमशः Δl तथा ΔV द्वारा व्यक्त किए गए हैं । α_l तथा α_v में परस्पर संबंध इस प्रकार है :

$$\alpha_v = 3\,\alpha_l$$

6. निकाय की आंतरिक ऊर्जा उसके आण्विक घटकों की गतिज एवं स्थितिज ऊर्जाओं के योग के बराबर होती है । इसमें निकाय की संपूर्ण गतिज ऊर्जा सम्मिलित नहीं होती । ऊष्मा और कार्य किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण के दो रूप हैं। निकाय व उसके परिवेश के बीच तापांतर के कारण ऊर्जा का स्थानांतरण ऊष्मा के रूप में होता है । कार्य अन्य साधनों (जैसे गैस भरे सिलिंडर के पिस्टन जिससे कुछ भार संबद्ध है, को ऊपर नीचे करने में) द्वारा उत्पन्न ऊर्जा का स्थानांतरण है । इसमें तापांतर समाहित नहीं होता है ।

7. ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम ऊर्जा संरक्षण का व्यापक नियम है, जो उस निकाय में लागू होता है जिसमें परिवेश को या परिवेश से (ऊष्मा व कार्य द्वारा) ऊर्जा स्थानांतरण हो । यह बताता है कि

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

यहा ΔQ निकाय को दी गई ऊष्मा है, ΔW निकाय पर किया गया कार्य है तथा ΔU निकाय की आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन है ।

8. पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा को हम निम्नलिखित सूत्र द्वारा परिभाषित करते हैं

$$s = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

यहां m पदार्थ का द्रव्यमान है तथा ΔQ वह ऊष्मा है जिसके द्वारा पदार्थ ताप में ΔT की वृद्धि हो जाती है। पदार्थ की मोलीय विशिष्ट ऊष्मा निम्नांकित सूत्र से परिभाषित की जाती है

$$C = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

μ पदार्थ के मोल की संख्या को व्यक्त करता है । किसी ठोस के लिए ऊर्जा के सम विभाजन के नियम से

$$C = 3\,R$$

जो सामान्यतया साधारण तापों पर किए जाने वाले प्रयोगों से प्राप्त परिणामों से मेल खाता है ।

कैलोरी ऊष्मा का पुराना मात्रक है । 1 कैलोरी ऊष्मा की वह मात्रा है जो 1g जल के ताप में 14.5 °C से 15.5 °C तक वृद्धि कर देती है । 1 cal = 4.186 J

9. किसी आदर्श गैस के लिए स्थिर ताप तथा स्थिर दाब पर मोलीय विशिष्ट ऊष्माएं निम्नलिखित संबंध का पालन करती हैं

$$C_p - C_V = R$$

यहां R गैस का सार्वत्रिक नियतांक है।

10. किसी ऊष्मागतिकीय निकाय की साम्यावस्था का विवरण अवस्था चरों द्वारा होता है। किसी अवस्था चर का मान केवल उसकी किसी विशेष अवस्था पर निर्भर करता है न कि उस पथ पर जिससे यह अवस्था प्राप्त होती है। अवस्था चरों के उदाहरण हैं : दाब (P), आयतन (V), ताप (T), तथा द्रव्यमान (m)। ऊष्मा और कार्य अवस्था चर नहीं हैं। कोई अवस्था-समीकरण (जैसे आदर्श गैस समीकरण $PV = \mu RT$) विभिन्न अवस्था चरों के मध्य एक संबंध को व्यक्त करता है।

11. दाब-ताप आरेख तीन प्रावस्थाओं (ठोस, द्रव तथा गैस) के अनुसार P-T तल को तीन भागों में विभक्त करता है। दो प्रावस्थाओं को पृथक करने वाली P-T आरेख की रेखा उन बिंदुओं को निर्दिष्ट करती है जहां दो प्रावस्थाएं साम्य में सहअस्तित्व में रह सकती हैं। तीन साम्य रेखाएं (ठोस-द्रव, द्रव-वाष्प, ठोस-वाष्प) त्रिक बिंदु पर मिलती हैं जहां तीनों प्रावस्थाएं सहअस्तित्व में होती हैं।

12. कोई स्थैतिककल्प प्रक्रम अत्यंत धीमी गति से संपन्न होने वाला प्रक्रम है जिसमें निकाय परिवेश के साथ पूरे समय तापीय व यांत्रिक साम्य में रहता हैं। स्थैतिककल्प प्रक्रम में परिवेश के दाब व ताप तथा निकाय के दाब व ताप में अनंत सूक्ष्म अंतर हो सकता है।

13. किसी आदर्श गैस के ताप T पर आयतन V_1 से V_2 तक होने वाले किसी समतापीय प्रसार में अवशोषित ऊष्मा (Q) का मान गैस द्वारा किए गए कार्य (W) के बराबर होता है। प्रत्येक का मान निम्नलिखित है :

$$Q = W = \mu RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

14. किसी आदर्श गैस के रुद्धोष्म प्रक्रम में

$PV^{\gamma} =$ नियतांक

जहां $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

किसी आदर्श गैस द्वारा अवस्था (P_1, V_1, T_1) से अवस्था (P_2, V_2, T_2) में रुद्धोष्म प्रक्रम से परिवर्तन में संपादित कार्य है :

$$W = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$

15. ऊष्मा इंजन एक ऐसी युक्ति है जिसमें निकाय एक चक्रीय प्रक्रम में चलता है जिसके परिणामस्वरूप ऊष्मा कार्य में परिवर्तित होती है। यदि एक चक्र में स्रोत से अवशोषित ऊष्मा Q_1, अभिगम को मुक्त की गई ऊष्मा Q_2 तथा W निर्गत कार्य है, तो इंजन की दक्षता

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

16. प्रशीतक या ऊष्मा पंप में निकाय ठंडे ऊष्माशय से Q_2 ऊष्मा ग्रहण करता है तथा Q_1 मात्रा गरम ऊष्माशय को मुक्त करता है। इस प्रक्रिया में निकाय पर W कार्य संपन्न होता है। प्रशीतक का निष्पादन गुणांक निम्न प्रकार से परिभाषित होता है,

$$\alpha = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

17. ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम कुछ उन प्रक्रमों की स्वीकृति नहीं देता जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुकूल हैं। इसके दो प्रकथन इस प्रकार हैं :

केल्विन-प्लैंक का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका मात्र परिणाम केवल किसी ऊष्माशय से ऊष्मा का अवशोषण करके उसे कार्य में रूपांतरित करना हो।

क्लॉसियस का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका मात्र परिणाम ऊष्मा का किसी ठंडे पिंड से अपेक्षाकृत गरम पिंड में स्थानांतरण हो।

इसे सरल ढंग से कहा जाए तो द्वितीय नियम यह बताता है कि किसी भी ऊष्मा इंजन की दक्षता $\eta = 1$ नहीं हो सकती अथवा किसी प्रशीतक का निष्पादन गुणांक α अनंत के बराबर नहीं हो सकता।

18. कोई प्रक्रम उत्क्रमणीय होता है यदि उसे इस प्रकार उत्क्रमित किया जाए कि निकाय व परिवेश दोनों अपनी प्रारंभिक अवस्थाओं में वापस पहुंच जाएं और विश्व में कहीं भी कोई परिवर्तन न हो। प्रकृति के स्वतः संपन्न होने वाले प्रक्रम अनुत्क्रमणीय होते हैं। आदर्शीकृत उत्क्रमणीय प्रक्रम स्थैतिककल्प प्रक्रम होता है जिसमें कोई भी क्षयकारी घटक; जैसे – घर्षण, श्यानता आदि विद्यमान नहीं रहते।

19. किन्हीं दो तापों T_1 (स्रोत) तथा T_2 (अभिगम) के मध्य कार्य करने वाला कार्नो इंजन उत्क्रमणीय इंजन है। दो रुद्धोष्म प्रक्रमों से संयुक्त दो समतापी प्रक्रम कार्नो चक्र का निर्माण करते हैं। कार्नो इंजन की दक्षता निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाती है :

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{(कार्नो इंजन)}$$

किन्हीं दो तापों के मध्य कार्य करने वाले इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती।

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
पदार्थ की मात्रा	μ	[mol]	mol	
सेल्सियस ताप	t_c	[K]	°C	
केल्विन परम ताप	T	[K]	K	$t_c = T - 273.15$
दैर्ध्य प्रसार गुणांक	α_l	$[K^{-1}]$	K^{-1}	
आयतन प्रसार गुणांक	α_v	$[K^{-1}]$	K^{-1}	$\alpha_v = 3\,\alpha_l$
किसी निकाय को प्रदत्त ऊष्मा	ΔQ	$[ML^2T^{-2}]$	J	Q अवस्था चर नहीं है।
आंतरिक ऊर्जा	U	$[ML^2T^{-2}]$	J	अवस्था चर
कार्य	W	$[ML^2T^{-2}]$	J	W अवस्था चर नहीं है।
विशिष्ट ऊष्मा	s	$[L^2T^{-2}K^{-1}]$	$J\,kg^{-1}\,K^{-1}$	
ऊष्मा इंजन की दक्षता	η	विमाहीन	–	
प्रशीतक का निष्पादन गुणांक	α	विमाहीन	–	

विचारणीय विषय

1. किसी पिंड का ताप उसकी माध्य आंतरिक ऊर्जा से संबंधित है न कि उसके द्रव्यमान केंद्र की गतिज ऊर्जा से। बंदूक से दागी गई किसी गोली का उच्च ताप उसकी अधिक चाल के कारण नहीं होता।

2. ऊष्मागतिकी में साम्य उस परिस्थिति की ओर निर्देश करता है जब निकाय की ऊष्मागतिकीय अवस्था का वर्णन करने वाले स्थूल चर, समय पर निर्भर नहीं करते। यांत्रिकी में किसी निकाय की साम्यावस्था से अभिप्राय है कि निकाय पर कार्य करने वाले नेट बल तथा बल आघूर्ण दोनों शून्य होते हैं।

3. ऊष्मागतिकीय साम्य में निकाय के सूक्ष्म संघटक साम्यावस्था में नहीं होते (यांत्रिकी के प्रसंग में)।

4. केल्विन परम ताप (T) तथा सेल्सियस ताप t_c में निम्न संबंध है

$$T = t_c + 273.15$$

और जल के त्रिक बिंदु के लिए $T = 273.16$ K का निर्धारण यथार्थ संबंध है (चयन द्वारा)। इस चयन से बर्फ का गलनांक तथा जल का क्वथनांक (दोनों। वायुमंडलीय दाब पर) क्रमशः 0 °C तथा 100 °C के बहुत निकट हैं परंतु यथार्थ रूप में इनके बराबर नहीं हैं। मूल सेल्सियस ताप मापक्रम में बाद के इन दोनों स्थिर बिंदुओं के यथार्थ मान 0 °C तथा 100 °C थे (चयन द्वारा) किंतु अब स्थिर बिंदु के लिए जल का त्रिक बिंदु अधिमान्य चयन है क्योंकि इसका ताप अद्वितीय होता है।

5. ऊष्माधारिता, व्यापक रूप में उस प्रक्रम पर निर्भर करती है जिससे निकाय तब गुजरता है जब वह ऊष्मा ग्रहण करता है।

6. कोई द्रव जब वाष्प के साथ साम्यावस्था में होता है तो संपूर्ण निकाय में उसका दाब व ताप समान रहता है, साम्यावस्था में दोनों प्रावस्थाओं के मोलीय आयतनों (अर्थात् घनत्वों) में अंतर होता है । यह किसी भी निकाय के लिए सत्य होता है जिसमें चाहे कितनी भी प्रावस्थाएं साम्यावस्था में हों ।

7. समतापीय स्थैतिककल्प प्रक्रमों में, निकाय द्वारा ऊष्मा अवशोषित या निर्गत होती है यद्यपि हर चरण में गैस का ताप वही होता है जो परिवेशीय ऊष्माशय होता है । निकाय तथा ऊष्माशय के मध्य अत्यंत सूक्ष्म तापांतर के कारण ऐसा संभव हो पाता है ।

अभ्यास

12.1 निऑन तथा कार्बन डाइऑक्साइड के त्रिक बिंदु क्रमशः 24.57 K तथा 216.55 K हैं । इन तापों को सेल्सियस तथा फारेनहाइट ताप मापक्रमों में व्यक्त कीजिए ।

12.2 किसी स्थिर आयतन गैस तापमापी जिसमें हीलियम का प्रयोग हो रहा है, जल के त्रिक बिंदु पर दाब 20.0 kPa तथा शुष्क बर्फ (ठोस CO_2) के ताप पर 14.3 kPa का दाब रिकार्ड करता है । शुष्क बर्फ का ताप क्या है ?

12.3 A व B दो परम तापक्रमों पर जल का त्रिक बिंदु 200 A तथा 350 B है । T_A व T_B में क्या संबंध है ?

12.4 किसी तापमापी का विद्युत् प्रतिरोध ताप के साथ नीचे दिए गए सन्निकट नियम के अनुसार परिवर्तित होता है :

$R = R_0 [1 + 5 \times 10^{-3} (T - T_0)]$

जल के त्रिक बिंदु पर प्रतिरोध 101.6 Ω तथा सीसे के सामान्य गलनांक (600.5 K) पर प्रतिरोध 65.5 Ω है । जब प्रतिरोध 123.4 Ω है तो ताप क्या होगा ?

12.5 निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(*a*) जल का त्रिक बिंदु आधुनिक तापमिति में एक मानक स्थिर बिंदु होता है । ऐसा क्यों ? बर्फ के गलनांक तथा जल के क्वथनांक को मानक बिंदु मानने में क्या कमी है (जैसा मूलतः सेल्सियस ताप मापक्रम में किया गया था) ?

(*b*) जैसा ऊपर बताया गया है कि मूल सेल्सियस ताप मापक्रम में दो स्थिर बिंदु थे जिनको क्रमशः 0 °C तथा 100 °C मान निर्धारित किए गए । परम तापक्रम पर स्थिर बिंदुओं में एक जल का त्रिक बिंदु है जो केल्विन परम तापक्रम पर 273.16 K माना गया । इस केल्विन ताप मापक्रम पर दूसरा स्थिर बिंदु क्या है ?

(*c*) परम ताप T (केल्विन ताप मापक्रम) सेल्सियस ताप मापक्रम के ताप t_c से निम्न समीकरण द्वारा संबंधित है

$$t_c = T - 273.15$$

हम इस संबंध में 273.15 का उपयोग क्यों करते हैं, 273.16 का क्यों नहीं करते ?

(*d*) उस परम ताप मापक्रम पर जल के त्रिक बिंदु का ताप क्या है जिसके एकांक अंतराल का आकार फारेनहाइट ताप मापक्रम के एकांक अंतराल के बराबर होता है ?

12.6 दो आदर्श गैस तापमापी A व B में क्रमशः ऑक्सीजन व हाइड्रोजन प्रयुक्त हुई है । इन तापमापियों द्वारा निम्नलिखित प्रेक्षण लिए गए :

तापमान	दाब तापमापी A	दाब तापमापी B
जल का त्रिक बिंदु	1.250×10^5 Pa	0.200×10^5 Pa
सल्फर का सामान्य गलनांक	1.797×10^5 Pa	0.287×10^5 Pa

(*a*) तापमापी A व B द्वारा पठित सल्फर के सामान्य गलनांक का परम ताप क्या है ?

(*b*) A व B के उत्तर में जो थोड़ा अंतर है आपके अनुसार इसका कारण क्या हो सकता है ? (दोनों तापमापी दोषरहित)। इन दोनों पाठ्यांकों में भिन्नता को कम करने के लिए इस प्रयोग में किस अतिरिक्त विधि की और आवश्यकता है ?

12.7 एक मीटर लंबा स्टील का फीता 27.0 °C ताप के लिए यथार्थ रूप से अंशांकित किया गया है । किसी स्टील की छड़ की लंबाई इस फीते द्वारा मापी गई । गर्मी के दिन जब ताप 45 °C है, छड़ की लंबाई 63.0 cm मापी गई । उस दिन स्टील की छड़ की वास्तविक लंबाई क्या है ? उसी छड़ की उस दिन लंबाई क्या होगी जब ताप 27 °C हो ? स्टील का दैर्ध्य प्रसार गुणांक = 1.20×10^{-5} °C^{-1} ।

12.8 कॉपर की चादर में एक छेद किया गया है । 27 °C पर छेद का व्यास 4.24 cm है । यदि चादर को 227 °C ताप तक गरम करें तो छेद के व्यास में क्या परिवर्तन होगा ? कॉपर का दैर्ध्य प्रसार गुणांक = 1.70×10^{-5} °C^{-1} ।

12.9 27 °C ताप पर 1.8 m लंबा पीतल का कोई तार दो दृढ़ टेकों के बीच थोड़े तनाव के साथ कसा है । यदि तार को −39 °C ताप तक ठंडा किया जाए तथा तार का व्यास 2.00 mm है, तो तार में कितना तनाव उत्पन्न होगा ? पीतल का दैर्ध्य प्रसार गुणांक = 2.0×10^{-5} °C^{-1} तथा पीतल का यंग प्रत्यास्थता गुणांक 0.91×10^{11} Pa ।

12.10 50 cm लंबी और 3.0 mm व्यास की पीतल की छड़, एक दूसरी समान लंबाई तथा व्यास की स्टील की छड़ से जुड़ी है। यदि मूल लंबाइयां 40.0 °C पर मापी गई हों तो 250 °C पर जुड़ी हुई छड़ की लंबाई में क्या परिवर्तन होगा ? क्या जोड़ पर ऊष्मीय प्रतिबल उत्पन्न होगा ? छड़ के सिरे प्रसार के लिए स्वतंत्र हैं । (पीतल का दैर्ध्य प्रसार गुणांक = 2.0×10^{-5} °C^{-1}, स्टील का दैर्ध्य प्रसार गुणांक = 1.2×10^{-5} °C^{-1})

12.11 ग्लिसरीन का आयतन प्रसार गुणांक 49×10^{-5} °C^{-1} है । ताप में 30 °C की वृद्धि होने पर इसके घनत्व में कितना आंशिक परिवर्तन होगा ?

12.12 8.0 kg द्रव्यमान के एक ऐलुमिनियम के गुटके में छेद करने के लिए 10 kW की एक छेद करने वाली मशीन प्रयोग में लाई जाती है । 2.5 मिनट में गुटके के ताप में कितनी वृद्धि हो जाएगी । यह मानिए कि शक्ति का 50% स्वयं मशीन को गरम करने में अथवा परिवेश में क्षयित हो जाता है । ऐलुमिनियम की विशिष्ट ऊष्मा = 0.91 J g^{-1} °C^{-1} ।

12.13 2.5 kg द्रव्यमान का कोई कॉपर का गुटका 500 °C ताप तक किसी भट्टी में गरम किया जाता है और तत्पश्चात् उसे बर्फ के बड़े गुटके में रख दिया जाता है । बर्फ की वह अधिकतम मात्रा ज्ञात कीजिए जो गरम गुटके से पिघल सकती है? (कॉपर की विशिष्ट ऊष्मा = 0.39 J g^{-1} °C^{-1}, जल की गलन ऊष्मा = 335 J g^{-1} ।

12.14 किसी धातु की विशिष्ट ऊष्मा के लिए किए गए किसी प्रयोग में 150 °C ताप पर 0.20 kg का कोई धातु का टुकड़ा, किसी तांबे के कैलोरीमापी (जल तुल्यांक 0.025 kg) जिसमें 27 °C पर 150 cm^3 जल भरा है, गिराया जाता है । मिश्रण का अंतिम ताप 40 °C हो जाता है । धातु की विशिष्ट ऊष्मा परिकलित कीजिए । यदि परिवेश को दी गई ऊष्मा नगण्य नहीं है तो क्या आपका उत्तर, धातु की विशिष्ट ऊष्मा के वास्तविक मान से अधिक है या कम ?

12.15 कोई गीज़र 3.0 लीटर प्रति मिनट की दर से बहते हुए जल को 27 °C से 77 °C तक गर्म करता है । यदि गीज़र का परिचालन गैस बर्नर द्वारा किया जाए तो ईंधन के व्यय की क्या दर होगी ? बर्नर के ईंधन की दहन-ऊष्मा 4.0×10^4 J g^{-1} है ?

12.16 एक प्रयोग में कुछ अक्रिय गैसों की विशिष्ट ऊष्मा (सामान्य तापों पर) निम्नलिखित मापी गई :

गैस	परमाणु द्रव्यमान (u)	विशिष्ट ऊष्मा (C_v) (cal g^{-1}K^{-1})
हीलियम	4.00	0.748
नियॉन	20.18	0.147
आर्गन	39.94	0.0760
क्रिप्टॉन	83.80	0.0358
जीनॉन	131.30	0.0226

आंकड़ों में नियमितता खोजने का प्रयास करिए तथा गैसों के अणुगति सिद्धांत के आधार पर इसकी व्याख्या कीजिए ।

12.17 नीचे कमरे के ताप पर कुछ सामान्य गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा पर प्रेक्षण दिए गए हैं।

गैस	मोलर विशिष्ट ऊष्मा (C_v) ($cal\ mol^{-1}K^{-1}$)
हाइड्रोजन	4.87
नाइट्रोजन	4.97
ऑक्सीजन	5.02
नाइट्रिक ऑक्साइड	4.99
कार्बन मानोऑक्साइड	5.01
क्लोरीन	6.17

इन गैसों की मापी गई मोलर विशिष्ट ऊष्मा एकपरमाणुक गैसों की विशिष्ट ऊष्मा से सुस्पष्ट रूप से भिन्न है [विशिष्ट रूप से, एक परमाणुक गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा 2.92 cal/mol K होती है, जिसे आप 12.16 में हल कर चुके होंगे]। इस भिन्नता की व्याख्या कीजिए । क्लोरीन के लिए कुछ अधिक मान (शेष की अपेक्षा) से आप क्या परिणाम निकाल सकते हैं ?

12.18 250 K से 750 K के ताप परिसर में हाइड्रोजन की मोलर विशिष्ट ऊष्मा लगभग (5/2) *R* है । कम तापों पर, हाइड्रोजन की मोलर विशिष्ट ऊष्मा घटकर (3/2) *R* तक आ जाती है जो एकपरमाणुक गैसों के लिए है । उच्च तापों पर यह मान (7/2) *R* की ओर अग्रसर होता है । इन घटनाओं के विषय में आपकी सोच क्या है ?

12.19 स्थिर दाब पर 2.0×10^{-2} kg नाइट्रोजन (कमरे के ताप पर) के ताप में 45 °C वृद्धि करने के लिए कितनी ऊष्मा की आपूर्ति की जानी चाहिए ? (N_2 का अणुभार = 28; $R = 8.3\ J\ mol^{-1}K^{-1}$) ।

12.20 कार्बन डाइऑक्साइड के *P-T* प्रावस्था आरेख [चित्र 12.11(b)] पर आधारित निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए :

(*i*) किस ताप व दाब पर CO_2 की ठोस, द्रव तथा वाष्प प्रावस्थाएं साम्यावस्था में सहअस्तित्व में हो सकती हैं ?

(*ii*) CO_2 के गलनांक तथा क्वथनांक पर दाब के घटने का क्या प्रभाव पड़ता है ?

(*iii*) CO_2 के लिए क्रांतिक ताप व दाब क्या हैं ? इनकी क्या उपयोगिता है ।

(*iv*) निम्नलिखित परिस्थितियों में CO_2 ठोस है, द्रव है या गैस है ?

(*a*) -70 °C, 1 वायुमंडलीय दाब पर,

(*b*) -60 °C, 10 वायुमंडलीय दाब पर,

(*c*) 15 °C, 56 वायुमंडलीय दाब पर ।

12.21 CO_2 के *P–T* प्रावस्था आरेख [चित्र 12.11(b)] पर आधारित निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(*i*) एक वायुमंडलीय दाब तथा -60 °C ताप पर CO_2 को समतापीय रूप से संपीडित किया जाता है । क्या यह द्रव प्रावस्था ग्रहण करेगी ?

(*ii*) क्या होता है जब CO_2 गैस 4 वायुमंडलीय दाब पर, दाब स्थिर रखते हुए कमरे के ताप पर ठंडी की जाती है ?

(*iii*) 10 वायुमंडलीय दाब तथा -65 °C ताप पर किसी निश्चित द्रव्यमान की CO_2 गैस को स्थिर दाब पर कमरे के ताप तक गर्म किए जाने पर इसमें होने वाले परिवर्तन का गुणात्मक वर्णन करिए ।

(*iv*) CO_2 को 70 °C तक गर्म करने के उपरांत समतापीय रूप से संपीडित किया जाता है । इसके गुणधर्मों में किस प्रकार के परिवर्तनों के प्रेक्षणों की आप अपेक्षा करते हैं ?

12.22 कोई मोटा व्यक्ति प्रतिदिन 3000 kcal के बराबर भोजन करता है । उसके भोजन में प्रतिदिन वसा और कार्बोहाइड्रेट के साथ-साथ अन्य दूसरे पोषक तत्व (प्रोटीन, विटामिन, खनिज आदि) के अतिरिक्त 50 g मक्खन और 1 प्लेट मिठाई होती है । 10 g मक्खन का ऊष्मीय मान 60 kcal तथा मिठाई की 1 प्लेट का ऊष्मीय मान 700 kcal है । उसे अपने भोजन में प्रतिदिन लगभग 2100 kcal कम करने के लिए, क्या नीति अपनानी चाहिए । कल्पना कीजिए कि यदि उसे एक बार मिठाई से भरी प्लेट खाने को दी जाए, तो वह अपने पर नियंत्रण नहीं रख सकता ।

12.23 किसी बच्चे को, जिसे 101 °F ताप है, एंटीपायरिन (अर्थात, एक दवा जो ज्वर को कम करती है) दी जाती है जिसके कारण उसके शरीर से पसीने की वाष्पन दर में वृद्धि हो जाती है । यदि 20 मिनट में ज्वर 98 °F ताप तक आ जाता है

तो दवा के द्वारा अतिरिक्त वाष्पन की माध्य दर क्या होगी ? मान लीजिए कि वाष्पन क्रियाविधि ही ऐसा उपाय है जिसके द्वारा ऊष्मा का ह्रास होता है । बच्चे का द्रव्यमान 30 kg है । मानव शरीर की विशिष्ट ऊष्मा जल की विशिष्ट ऊष्मा के बराबर है और उसी ताप पर जल के वाष्पन की गुप्त ऊष्मा 580 cal g^{-1} है ।

12.24 जुलाई माह के किसी दिन मुंबई में जब जलवाष्प का आंशिक दाब 0.013×10^5 Pa तथा ताप 15 °C है तो आपेक्षिक आर्द्रता क्या होगी ? इस ताप पर जल का वाष्प दाब 0.016×10^5 Pa है ।

12.25 निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए :

(*a*) गतिशील पिस्टन लगे बर्तन जिसे किसी तापस्थायी द्वारा स्थिर ताप पर रखा गया है, में किसी द्रव का एक निश्चित द्रव्यमान इसकी वाष्प के साथ साम्यावस्था में है । क्या यह वाष्प बॉयल के नियम का पालन करेगी ? दूसरे शब्दों में, क्या होता है जब वाष्प का आयतन घटाया जाता है ? क्या वाष्प दाब बढ़ता है ।

(*b*) 'अति तप्त जल' तथा 'अति ठंडी वाष्प' से क्या तात्पर्य है ? क्या जल की ये अवस्थाएं अपने *P-V-T* पृष्ठ पर स्थित होती हैं ? जल की इन अवस्थाओं के दैनिक जीवन में कुछ अनुप्रयोग लिखिए ।

12.26 व्याख्या कीजिए कि ऐसा क्यों होता है :

(*a*) भिन्न-भिन्न तापों T_1 व T_2 के दो पिंडों को यदि ऊष्मीय संपर्क में लाया जाए तो यह आवश्यक नहीं कि उनका अंतिम ताप $(T_1 + T_2)/2$ ही हो ।

(*b*) रासायनिक अथवा नाभिकीय संयंत्रों में शीतलक (अर्थात् द्रव जो संयंत्र के भिन्न-भिन्न भागों को अधिक गर्म होने से रोकता है) की विशिष्ट ऊष्मा अधिक होनी चाहिए ।

(*c*) कार को चलाते-चलाते उसके टायरों में वायु दाब बढ़ जाता है ।

(*d*) किसी बंदरगाह के समीप के शहर की जलवायु, समान अक्षांश के किसी रेगिस्तानी शहर की जलवायु से अधिक शीतोष्ण होती है ।

12.27 गतिशील पिस्टन लगे किसी सिलिंडर में मानक ताप व दाब पर 3 मोल हाइड्रोजन भरी है । सिलिंडर की दीवारें ऊष्मारोधी पदार्थ की बनी हैं तथा पिस्टन को उस पर बालू की परत लगाकर ऊष्मारोधी बनाया गया है । यदि गैस को उसके आरंभिक आयतन के आधे आयतन तक संपीडित किया जाए तो गैस का दाब कितना बढ़ेगा ?

12.28 रुद्धोष्म विधि द्वारा किसी गैस की अवस्था परिवर्तन करते समय उसकी एक साम्यावस्था A से दूसरी साम्यावस्था B तक ले जाने में निकाय पर 22.3 J कार्य किया जाता है। यदि गैस को दूसरी प्रक्रिया द्वारा अवस्था A से अवस्था B में लाने में निकाय द्वारा अवशोषित नेट ऊष्मा 9.35 cal है तो बाद के प्रकरण में निकाय द्वारा किया गया नेट कार्य कितना है ? (1 cal = 4.19 J)।

12.29 समान धारिता वाले दो सिलिंडर A तथा B एक दूसरे से स्टाप काक के द्वारा जुड़े हैं। A में मानक ताप व दाब पर गैस भरी है जबकि B पूर्णत: निर्वातित है। स्टाप काक यकायक खोल दी जाती है । निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(*a*) सिलिंडर A तथा B में अंतिम दाब क्या होगा ?

(*b*) गैस की आंतरिक ऊर्जा में कितना परिवर्तन होगा ?

(c) गैस के ताप में क्या परिवर्तन होगा ?

(*d*) क्या निकाय की माध्यमिक अवस्थाएं (अंतिम साम्यावस्था प्राप्त करने के पूर्व) इसके *P-V-T* पृष्ठ पर होंगी ?

अध्याय 13

ऊष्मा स्थानांतरण

13.1 भूमिका

हम यह पढ़ चुके हैं कि ऊष्मा एक निकाय से दूसरे निकाय में (अथवा किसी निकाय के एक भाग से दूसरे भाग में) ऊर्जा का स्थानांतरण है तथा ऐसा तापांतर के कारण होता है। वह कौन-से विभिन्न साधन हैं जिनके द्वारा ऊष्मा का स्थानांतरण होता है ? अनुभव दर्शाता है कि ऊष्मा स्थानांतरण की ऐसी तीन स्पष्ट विधियां हैं। यदि आप तांबे के एक बर्तन को स्टोव पर रख दें तो बर्तन का वह हिस्सा भी, जो ज्वाला के सीधे संपर्क में नहीं है, शीघ्रता से गरम हो जाता है। जाड़े की रात में, एक धातु का हत्था लकड़ी के दरवाजे की अपेक्षा अधिक ठंडा लगता है। यह चालन विधि द्वारा ऊष्मा स्थानांतरण के कारण होता है। यहां ऊर्जा का संचरण वस्तु के निकटवर्ती भागों में बिना द्रव्य के संचरण के होता है। सामान्यत: तरल पदार्थ में ऊर्जा का स्थानांतरण गरम भाग से ठंडे भाग में द्रव्य के वास्तविक संचरण के कारण होता है। किसी बर्तन में भरे द्रव को तेजी से विलोड़न द्वारा गरम कर सकते हैं। ऊष्मा स्थानांतरण की इस विधि को हम संवहन कहते हैं। ऊष्मा स्थानांतरण की तीसरी विधि, विकिरण, के लिए किसी मध्यवर्ती माध्यम की आवश्यकता नहीं पड़ती। सूर्य से हमें ऊर्जा के विकिरण स्थानांतरण से गरमी मिलती है। आग के पास खड़े होकर हम गरमी महसूस करते हैं यद्यपि मध्यवर्ती (बीच की) हवा अपर्याप्त रूप से ऊष्मा को चालित करती है। चालन तथा संवहन अपेक्षाकृत धीमी प्रक्रियाएं हैं जबकि विकिरण एक तेज प्रक्रिया है।

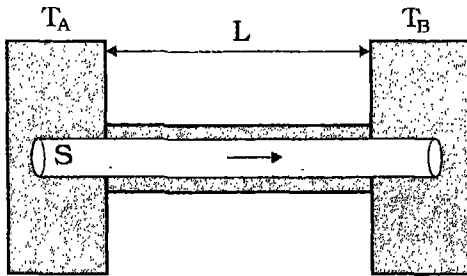
13.2 ऊष्मा चालन

किसी वस्तु के दो निकटवर्ती भागों में ऊष्मा संचरण जो तापांतर के कारण होता है, को ऊष्मा चालन कहते हैं। कल्पना कीजिए कि धातु की किसी छड़ के एक सिरे को भट्टी के अंदर रख देते हैं। शीघ्र ही दूसरा सिर इतना गर्म हो जाता है कि आप अपने हाथ से उसे नहीं पकड़ सकते। यहां छड़ के एक सिरे से उसके भिन्न-भिन्न भागों से गुजरती हुई ऊष्मा दूसरे सिरे तक चालन विधि से स्थानांतरित होती है। जब छड़ के सभी भागों का ताप एक हो जाता है तो ऊष्मा का संचरण रुक जाता है। सामान्यतया जब दो वस्तुओं A और B, जिनके ताप क्रमश: T_A तथा T_B हैं, को ऊष्मीय संपर्क में रखा जाता है (अर्थात् ऊष्मीय चालक से जुड़ी हैं) तो ऊष्मा का स्थानांतरण चालन द्वारा तब तक होता रहेगा जब तक वस्तुओं का ताप एक न हो जाए। इससे यह पता चलता है कि यदि हम चाहते हैं कि

चालक में ऊष्मा का संचरण होता रहे तो उसके निकटवर्ती भागों के मध्य तापांतर को बनाए रखना पड़ेगा।

माना कि L लंबाई और S समान अनुप्रस्थ काट वाले क्षेत्रफल की एक धातु की छड़ के दोनों सिरों के बीच तापांतर रखा गया है। उदाहरणार्थ, T_A तथा T_B ताप वाले क्रमशः ऐसे दो विशाल ऊष्मा के भंडारों को लें जिनके ऊष्मीय संपर्क में छड़ के दोनों सिरे रखे गए हों। आइए, एक आदर्श स्थिति की कल्पना करें जिसमें छड़ की सतह पूरे तरीके से ऊष्मारोधी है ताकि सतह और उसके परिवेश के मध्य किसी ऊष्मा का आदान-प्रदान न हो सके (चित्र 13.1)। थोड़ी देर बाद साम्यावस्था की स्थिति आ जाएगी जिसके उपरांत छड़ का ताप दूरी के साथ T_A से T_B अवस्था तक समान दर से घटना शुरू होगा ($T_A > T_B$)। A का भंडार स्थिर दर से ऊष्मा की आपूर्ति करता है जो छड़ से संचरित होते हुए उसी दर से B के भंडार को चली जाती है। प्रयोग द्वारा पाया गया है कि साम्यावस्था में ऊष्मा संचरण की दर H तापांतर $T_A - T_B$ तथा काट क्षेत्रफल S के समानुपाती एवं लंबाई L के व्युत्क्रमानुपाती होती है :

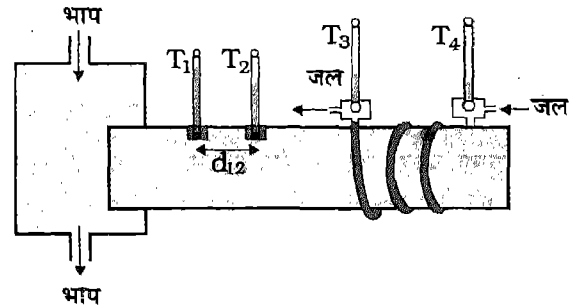
$$H = KS\frac{T_A - T_B}{L} \tag{13.1}$$

समानुपाती नियतांक K को पदार्थ की ऊष्मा-चालकता कहते हैं जो इस बात का मापन है कि ऊष्मीय ऊर्जा इसमें होकर कितनी दक्षता से गुजर सकती है। समीकरण (13.1) से स्पष्ट है कि ऊष्मा-चालकता का SI मात्रक $J\,s^{-1}\,m^{-1}\,K^{-1}$ या $W\,m^{-1}\,K^{-1}$ होता है।

चित्र 13.1 एक छड़ जिसके दोनों सिरे ताप T_A तथा T_B पर रखे गए हों ($T_A > T_B$), में स्थायी अवस्था में चालन द्वारा ऊष्मा का संचरण।

किसी ठोस की ऊष्मा-चालकता ज्ञात करने के लिए सर्ल के उपकरण का व्यवस्था चित्र आरेख 13.2 में दिखलाया गया है। एक बेलनाकार ठोस छड़ ली गई है जिसका एक सिरा भाप-कक्ष में रखा जाता है और इसके दूसरे सिरे पर तांबे की एक नलिका कुंडलित की गई है। छड़ में d_{12} दूरी पर दो छेद किए गए हैं जिनमें तापमापी 1 और 2 रखे गए हैं ("तापमापी और छड़ के मध्य बेहतर ऊष्मीय संपर्क स्थापित करने के लिए छेदों में थोड़ा पारा भर देते हैं")। सिरों से ऊष्मा के क्षय को रोकने के लिए पूरे उपकरण को रुई जैसे ऊष्मारोधी पदार्थ से भलीभांति ढक देते हैं।

छड़ के एक सिरे पर स्थित कक्ष से भाप गुजारते हैं और दूसरे सिरे पर कुंडलित नलिका से पानी प्रवाहित करते हैं। तापमापी 3 व 4 अंदर प्रवेश करने वाले जल के ताप T_3 तथा बाहर निकलने वाले जल के ताप T_4 को व्यक्त करते हैं। स्पष्ट है कि साम्यावस्था में पहुंचने पर भाप-कक्ष द्वारा आपूर्ति की जाने वाली ऊष्मा की मात्रा प्रवाहित जल द्वारा अवशोषित मात्रा के बराबर होती है। स्थायी अवस्था में t समय में प्रवाहित होने वाले जल की संहति यदि m हो, तो तत्संबंधित ऊष्मा की मात्रा Q निम्नलिखित व्यंजक से व्यक्त होगी,

$$Q = Ht = \frac{K\,S(T_1 - T_2)t}{d_{12}} = m\,s\,(T_3 - T_4) \tag{13.2}$$

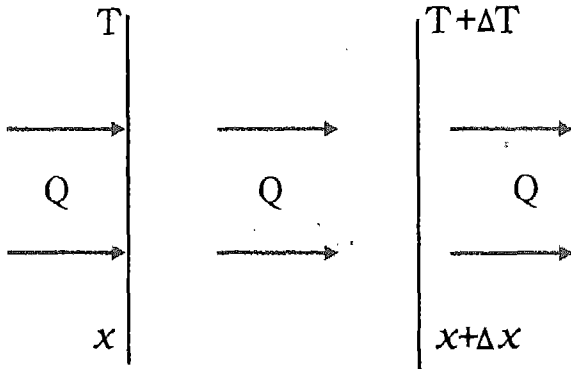
यहां s जल की विशिष्ट ऊष्मा तथा S छड़ के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल है। स्थायी अवस्था में तापमापी के ताप एवं समीकरण (13.2) की राशियों के मान का उपयोग करके K ज्ञात करते हैं।

चित्र 13.2 ऊष्मा चालकता ज्ञात करने के लिए सर्ल का उपकरण।

अब यदि छड़ का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल एकसमान नहीं है तथा/अथवा छड़ में स्थायी अवस्था की स्थिति वैध नहीं है तो इस स्थिति से कैसे निपटा जाए ? ऐसी परिस्थिति में समीकरण (13.1) लागू नहीं होगा। तथापि पदार्थ के प्रत्येक छोटे भाग के लिए इस समीकरण का उपयोग हो सकता है। ऊष्मा संचरण की दिशा के लंबवत् पदार्थ की एक पतली परत पर विचार करें जो कि x-अक्ष के अनुदिश है। S अनुप्रस्थ क्षेत्रफल वाली पतली सतह x तथा $x+\Delta x$ के मध्य है जिनके ताप क्रमशः T तथा $T+\Delta T$ हैं (चित्र 13.3 देखिए)। समीकरण (13.1) के स्थानीय रूपांतरण के अनुसार,

$$H = -KS\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

सीमांत अवस्था $\Delta x \to 0$ में कलन (कैलकुलस) की भाषा में

$$H = -KS\frac{dT}{dx} \qquad (13.3)$$

समीकरण (13.3) में ऋण चिह्न पर ध्यान दीजिए। ऊष्मा का संचरण धनात्मक x-दिशा के अनुदिश तब होता है जब ताप इस दिशा में घटता है अर्थात् जैसे-जैसे ऊष्मा संचरण की दिशा में Δx का मान बढ़ता जाता है वैसे-वैसे ΔT घटता जाता है ($\Delta x > 0$, $\Delta T < 0$)। ऋणात्मक चिह्न यह सुनिश्चित करता है कि ऊष्मा चालकता K का मान परिभाषा के अनुसार धनात्मक होता है। समय T के आपेक्ष x के अवकलज को x- दिशा में ताप प्रवणता के नाम से जाना जाता है।

चित्र 13.3 x तथा $x + \Delta x$ के मध्य वह पतली सतह जो x- दिशा के अनुदिश संचरित हो रही ऊष्मा की दिशा के लंबवत् है।

ऊष्मा-चालन की आण्वीय प्रक्रिया का अनुमान लगाना कठिन नहीं है। हम पहले से ही जानते हैं कि ताप पदार्थ के परमाणुओं अथवा अणुओं की औसत गतिज ऊर्जा का मापन है। जब किसी छड़ के एक सिरे को गरम किया जाता है तो इस सिरे के अणुओं की माध्य गतिज ऊर्जा अपेक्षाकृत अधिक हो जाती है। अणु की अपनी माध्य स्थिति को बिना छोड़े ऊर्जा का विनिमय समीपवर्ती सतह के अणुओं के मध्य टक्करों के माध्यम से संपन्न होता है। संपूर्ण रूप से, इस विनिमय में अधिक ऊर्जा वाले अणुओं में ऊर्जा का क्षय होता है जबकि कम ऊर्जा वाले अणुओं की ऊर्जा में वृद्धि होती है। इस विधि से ऊर्जा का स्थानांतरण एक सतह से उसकी अगली सतह में होता है। अंततः छड़ के सभी भागों में अणुओं की एक ही औसत गतिज ऊर्जा हो जाती है अर्थात् सभी स्थानों पर ताप एकसमान हो जाता है और ऊष्मा का संचरण रुक जाता है।

सारणी 13.1 में सामान्य पदार्थों की ऊष्मा चालकताएं दी गई हैं। आप देख सकते हैं कि धातुएं अधातुओं की तुलना में अधिक अच्छी ऊष्मा चालक हैं (ऐसा अंशतः इसलिए है कि धातुओं में मुक्त इलेक्ट्रॉन होते हैं जो अधिक गरम भाग से अपेक्षाकृत ठंडे भाग में ऊष्मीय ऊर्जा को ले जाते हैं)। प्रत्येक समूह में भी K के मान में काफी अंतर है (चांदी की तुलना सीसे से कीजिए तथा कंक्रीट की तुलना ऊन से)। गैसों की (उदाहरणार्थ, हवा की) ऊष्मा चालकताएं बहुत ही कम होती हैं। अधिकांश पदार्थों में K का मान ताप बढ़ने के साथ मामूली-सा बढ़ता है। ऊन एक अच्छा ऊष्मा-रोधी (कुचालक) है। इसका एक कारण यह है कि उसके रेशों के मध्य हवा भरी रहती है। बहुत से प्राकृतिक पदार्थ (हंस का पंख, रुई) तथा कृत्रिम रूप से निर्मित पदार्थ इसी कारण से ऊष्मा-रोधी (ऊष्मीय कुचालक) होते हैं। ऊष्मा चालन एवं ऊष्मा-रोधन दोनों ही महत्त्वपूर्ण होते हैं जिसका आभास हमारे रसोईघर में हमें प्रतिदिन होता है। भोजन पकाने वाले बर्तन धातु के होते हैं जबकि उनके हैंडिल ऊष्मा-रोधी (कुचालक) पदार्थ के होते हैं।

अनेक अन्य उपयोगों में ऊष्मा का अवरोधन (धारण) एवं स्थानांतरण दोनों महत्त्वपूर्ण हैं। हमारे देश में कंक्रीट की दीवारों से बने मकान गरमी के दिनों में बहुत गरम हो जाते हैं क्योंकि कंक्रीट की ऊष्मा चालकता, यद्यपि धातुओं की तुलना में कम है फिर भी बहुत कम भी नहीं है। खोखली ईटों के मकान अपेक्षाकृत ठंडे होते हैं। किन्हीं परिस्थितियों में, ऊष्मा का स्थानांतरण क्रांतिक होता है। उदाहरणार्थ, नाभिकीय रिएक्टर में एक जटिल ऊष्मा स्थानांतरण निकाय की स्थापना करने की आवश्यकता होती है ताकि केंद्रक में न्यूक्लीय विखंडन के दौरान उत्पन्न ऊर्जा का काफी तेजी से पारगमन हो और इस प्रकार केंद्रक को अधिक गरम होने से रोका जा सके।

13.2.1 ऊष्मा-प्रतिरोध

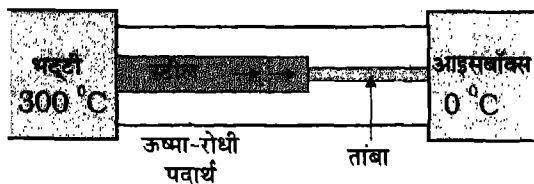
समीकरण (13.1) तथा विद्युत् धारा से संबंधित सुपरिचित ओह्म के नियम के मध्य एक अच्छी अनुरूपता है। प्रति एकांक समय में आवेश के संचरण को विद्युत् धारा कहते हैं तथा इसका संचालन विभवांतर के कारण होता है। अनुरूपता के तौर पर ऊष्मीय धारा H प्रति एकांक समय में ऊर्जा का संचरण है जो तापांतर के कारण संचालित होता है। समीकरण (13.1) को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$H = \frac{T_A - T_B}{R_H} \qquad (13.4)$$

यहां $R_H = L/KS$ है। R_H को छड़ के पदार्थ का ऊष्मा प्रतिरोध कहते हैं। समीकरण (13.4) की ओह्म के नियम से गणितीय तुल्यता के कारण विद्युत् प्रतिरोधों के श्रेणी एवं समान्तर संयोजनों के सर्व विदित परिणामों के अनुकूल छड़ों के श्रेणी तथा समान्तर संयोजनों के ऊष्मा प्रतिरोधों को प्राप्त कर सकते हैं।

सारिणी 13.1 कुछ पदार्थों की ऊष्मा चालकताएं

पदार्थ	ऊष्मा चालकता ($J\ s^{-1} m^{-1} K^{-1}$)
धातुएं :	
चांदी	406
तांबा	385
ऐलुमिनियम	205
पीतल	109
स्टील	50.2
सीसा	34.7
पारा	8.3
अधातुएं :	
ऊष्मा-रोधी ईंटें	0.15
कंक्रीट	0.8
शरीर की चर्बी	0.20
नमदा	0.04
कांच	0.8
बर्फ	1.6
शैल ऊर्ण	0.04
लकड़ी	0.12-0.04
जल	0.80
गैसें :	
वायु	0.024
ऑर्गन	0.016
हाइड्रोजन	0.14

▶ *उदाहरण 13.1* चित्र 13.4 में दिखाए गए निकाय की स्थायी अवस्था में स्टील-तांबा की संधि का ताप क्या है ? स्टील छड़ की लंबाई = 15.0 cm, तांबे की छड़ की लंबाई = 10.0 cm, भट्ठी का ताप = 300 °C, दूसरे सिरे का ताप 0 °C है। स्टील की छड़ के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल तांबे की छड़ का दो गुना है। (स्टील की ऊष्मा चालकता = 50.2 $J\ s^{-1} m^{-1} K^{-1}$, और तांबे की ऊष्मा-चालकता = 385 $J\ s^{-1} m^{-1} K^{-1}$)

चित्र 13.4

हल छड़ों के चारों तरफ का ऊष्मा-रोधी (कुचालक) पदार्थ छड़ों की सतह से होने वाली ऊष्मा की हानि को कम करता है। इसलिए ऊष्मा केवल छड़ के अनुदिश संचरित होती है। छड़ की कोई अनुप्रस्थ काट लीजिए। स्थायी अवस्था (दशा) में छड़ के अवयव में प्रवेश करने वाली ऊष्मा इससे बाहर जा रही ऊष्मा के बराबर होनी चाहिए, अन्यथा अवयव के द्वारा ऊष्मा की नेट प्राप्ति या हानि होगी। फलस्वरूप, इसका ताप स्थिर नहीं रहेगा। इस प्रकार, स्थायी दशा में स्टील-तांबे की संयुक्त छड़ की लंबाई के अनुदिश प्रत्येक बिंदु पर छड़ के किसी अनुप्रस्थ काट से बहने वाली ऊष्मा की दर समान होती है। माना कि स्थायी दशा में स्टील-तांबा संधि का ताप T है, तब

$$\frac{K_1 S_1 (300-T)}{L_1} = \frac{K_2 S_2 (T-0)}{L_1}$$

जहां 1 व 2 क्रमशः स्टील व तांबे की छड़ को व्यक्त करते हैं। $S_1 = 2S_2$, $L_1 = 15.0$ cm, $L_2 = 10.0$ cm, $K_1 = 50.2\ J\ s^{-1} m^{-1} K^{-1}$, $K_2 = 385\ J\ s^{-1} m^{-1} K^{-1}$ के लिए हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{50.2 \times 2(300-T)}{15} = \frac{385T}{10}$$

अतएव $T = 44.4$ °C ◀

13.3 संवहन

संवहन विधि में ऊष्मा का स्थानांतरण पदार्थ की वास्तविक गति के द्वारा होता है। अतः यह केवल तरलों में ही संभव है। संवहन प्राकृतिक अथवा प्रणोदित हो सकता है। प्राकृतिक संवहन में गुरुत्व की एक महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है। जब किसी तरल को नीचे से गरम किया जाता है, तो गरम हिस्सा फैलता है और इस प्रकार, वह कम सघन हो जाता है। उत्प्लावन बल के कारण यह ऊपर की ओर उठता है और इसके स्थान पर ऊपर से ठंडा हिस्सा आ जाता है। यह पुनः गरम होकर ऊपर उठता है और इसका स्थान तरल का ठंडा भाग ले लेता है। यह प्रक्रिया चलती रहती है। ऊष्मा स्थानांतरण की यह विधि स्पष्टतया चालन से भिन्न है जिसमें ऊर्जा का स्थानांतरण स्थानीय रूप से अंतरा-अणुक संघट्टों (टक्करों) के द्वारा होता है। संवहन में तरल के विभिन्न भागों का स्थूल रूप में स्थानांतरण होता है। किसी द्रव में आप ऐसा वास्तव में देख सकते हैं। उदाहरणार्थ, किसी बर्तन की पेंदी में पोटैशियम परमेंगनेट के कुछ कण रखकर द्रव को रंगीन बना देते हैं।

प्रणोदित संवहन में पदार्थ को किसी पंप या किसी दूसरे भौतिक साधन से गति प्रदान करते हैं। किसी द्रव को तेजी से हिलाकर अथवा वायु में ब्लोअर या पंखे द्वारा ऊष्मा का स्थानांतरण प्रणोदित संवहन के उदाहरण हैं। मानव शरीर में हृदय एक पंप के रूप में कार्य करता है जिससे शरीर के विभिन्न भागों में रुधिर का संचरण होता है। इस प्रकार, प्रणोदित संवहन द्वारा ऊष्मा का स्थानांतरण होता है और शरीर का ताप एकसमान बना रहता है।

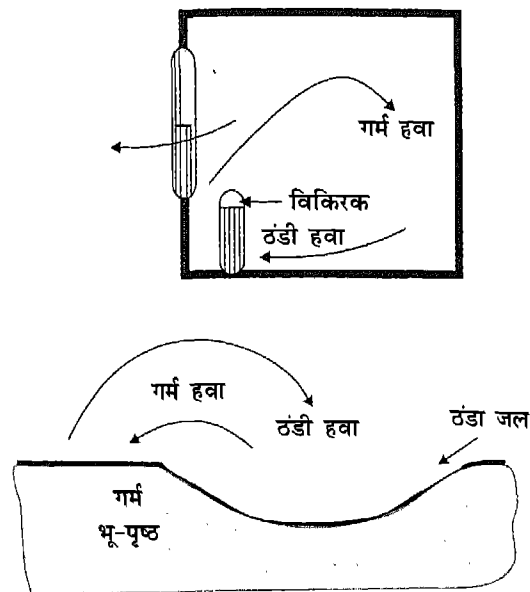
प्राकृतिक संवहन अनेक परिचित घटनाओं के लिए उत्तरदायी है। ठंडे प्रदेशों में सर्दी के मौसम में बाहर का ताप हिमांक से

काफी नीचे हो सकता है जबकि आपके घर के कमरे को आरामदेह 20 °C या इसके आसपास के ताप पर रखा जाता है। परंतु कमरे में कांच की खिड़की जो उसे बाहरी वातावरण से अलग करती है, के बहुत पास की हवा का ताप 20 °C से कम हो सकता है। इसी प्रकार बाहर की वह हवा, जो खिड़की के पास है, का ताप वातावरण के कंपकंपी पैदा करने वाले ताप से कुछ अधिक होता है। इस प्रकार, कमरे के अंदर से बाहर की ओर लगातार ऊष्मा का स्थानांतरण होता रहता है। कमरे के अंदर की हवा में संवहन द्वारा, कांच के आरपार चालन द्वारा और पुनः कमरे के बाहर हवा में संवहन द्वारा ऐसा होता है। निःसंदेह ऊष्मा की इस क्षति की पूर्ति कमरे के अंदर लगाए गए गर्म करने के निकाय द्वारा होती रहती है।

इस प्रकार, तरल का असमान गर्म होना प्राकृतिक संवहन उत्पन्न करता है। यही मूलतः पवन का स्रोत है। उदाहरणार्थ, उत्तर पूर्व से भूमध्य रेखा की ओर बहने वाला एक स्थायी भू-पृष्ठ पवन है जिसे व्यापारिक पवन कहते हैं। अशोधित (अपरिष्कृत) व्याख्या इस प्रकार है : पृथ्वी के भूमध्यीय तथा ध्रुवीय प्रदेशों को सूर्य की ऊष्मा असमान रूप से प्राप्त होती है। पृथ्वी तल पर भूमध्य रेखा के निकट वायु गरम होती है जबकि ध्रुवों के ऊपरी वायुमंडल में यह ठंडी होती है। किसी अन्य कारण की अनुपस्थिति में, एक संवहन धारा स्थापित हो जाएगी, भूमध्य सतह से वायु ऊपर उठकर ध्रुवों की ओर बहती है, वहां से नीचे उतरकर फिर भूमध्य रेखा की ओर प्रवाहित हो जाती है। तथापि पृथ्वी का घूर्णन इस संवहन धारा को परिवर्तित कर देता है। इस कारण भूमध्य रेखा के निकट वायु का पूर्व की ओर वेग 1600 km/h हो जाता है जबकि ध्रुवों के निकट यह शून्य होता है। परिणामस्वरूप वायु ध्रुवों पर नीचे न आकर 30° N (उत्तर) अक्षांश पर उतरती है और भूमध्य रेखा की ओर वापस लौट जाती है। यह व्यापारिक पवन है।

भारत में दक्षिण-पश्चिम मानसून का उद्गम क्या है ? यह अभी तक ठीक से समझा नहीं जा सका है। फिर भी हम एक प्रमुख कारण समझ सकते हैं। हमें यह ज्ञात है कि मिट्टी या चट्टान की अपेक्षा जल की विशिष्ट ऊष्मा अधिक होती है। इसीलिए गर्मी के मौसम में भारतीय उप महाद्वीप की धरती हिन्द महासागर की अपेक्षा बहुत गर्म होती है। इस प्रकार, धरती से गर्म वायु ऊपर उठकर हिन्द महासागर की ओर प्रवाहित होती है जबकि समुद्र से आर्द्रतायुक्त वायु धरती की ओर चल कर संवहन धारा उत्पन्न करती है और भारत में वर्षा लाती है (भारतीय भूमि तथा सुदूर उत्तर के बीच हिमालय संवहन धारा को काट देता है)।

सामान्यतया, ग्रीष्म व शीत ऋतु की मानसून, वास्तव में हमारे संपूर्ण ग्रह का जलवायु संवहन व विकिरण द्वारा ऊष्मा का स्थानांतरण, पृथ्वी का घूर्णन व गुरुत्व जैसे अनेक जटिल कारकों का परिणाम है। यह सामयिक सक्रिय शोध का विषय है।

चित्र 13.5 में हमने उन कुछ संवहन धाराओं को आरेखित किया है जिनका जिक्र इस खंड में किया गया है।

चित्र 13.5 कुछ संवहन धाराएं।

13.4 ऊष्मा विकिरण

चालन एवं संवहन दोनों विधियों द्वारा ऊष्मा के स्थानांतरण में पदार्थ के कण प्रकट रूप से सम्मिलित होते हैं। निर्वात में यदि कोई दो पिंड एक दूसरे से कुछ दूरी पर रखे हुए हैं तो इनके मध्य इन दोनों विधियों से ऊष्मा का स्थानांतरण नहीं हो सकता है। परंतु पृथ्वी यद्यपि सूर्य से एक विशाल दूरी पर स्थित है फिर भी उसमें सूर्य से गरमी पहुंचती है। यदि हम आग के समीप हैं तो संवहन प्रक्रिया प्रारंभ होने के पूर्व ही हमें तुरंत गर्मी महसूस होने लगती है यद्यपि वायु बहुत कम ऊष्मा संचरित करती है। इन उदाहरणों में ऊष्मा स्थानांतरण विकिरण विधि द्वारा होता है। बिना किसी भौतिक द्रव्यीय माध्यम के इस विधि से ऊष्मा का स्थानांतरण बहुत अधिक दूर तक हो सकता है।

विकिरण ऊष्मा की प्रकृति की समझ (तथा ऊष्मा की भी) के बहुत पहले ही विकिरण विधि से ऊष्मा के स्थानांतरण का सही-सही अनुमान लगाया जा चुका था। प्रीवो (Prevost) ने 1792 में यह अंदाज लगा लिया था कि सभी पिंड सब तापों पर विकिरण ऊर्जा उत्सर्जित करते हैं जो ताप बढ़ने के साथ-साथ बढ़ती जाती है तथा चारों ओर स्थित पिंडों की उपस्थिति का इस उत्सर्जन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। जब हम बर्फ की सिल्ली के पास खड़े हो जाते हैं तो हमें ठंडक महसूस होती है क्योंकि हमारे शरीर से शुद्ध रूप से ऊर्जा की क्षति होती है क्योंकि हमारे शरीर का ताप बर्फ से अधिक होता है और इसके द्वारा ऊर्जा की नेट क्षति होती है। ठीक इसके विपरीत जब हम आग के पास खड़े होते हैं तो जो ऊर्जा हम उत्सर्जित करते हैं

उससे अधिक हम प्राप्त करते हैं । जब किसी पिंड का ताप वही हो जो चारों ओर के वातावरण का है, तो दोनों ही ऊर्जा उत्सर्जित करते रहते हैं । पिंड उतनी ही ऊर्जा का उत्सर्जन करता है जितनी वह आसपास के वातावरण से अवशोषित करता है । इसलिए नेट ऊर्जा की न तो कोई क्षति होती है और न ही कोई लाभ ।

अब हम यह जानते हैं कि यह विकिरण ऊर्जा विद्युत् चुंबकीय विकिरण ऊर्जा के अलावा और कुछ नहीं है। प्रत्येक पिंड किसी भी ताप पर विद्युत् चुंबकीय तरंगों को उत्सर्जित करता है। किसी विद्युत् चुंबकीय तरंग के विद्युत् एवं चुंबकीय क्षेत्र स्थान एवं समय के आपेक्ष दोलन करते हैं (हवा में यदि हम किसी ध्वनि तरंग पर विचार करें तो हम देखते हैं कि हवा का दाब व घनत्व भी स्थान व समय के आपेक्ष दोलन करते हैं)। किसी अन्य तरंग की भांति विद्युत् चुंबकीय तरंगों की तरंगदैर्ध्य भिन्न-भिन्न होती है। प्रकाश एक विद्युत् चुंबकीय तरंग है जिसके दृश्य स्पेक्ट्रम (वर्णक्रम) में विभिन्न रंगों की तरंगदैर्ध्य लगभग 4000Å (बैंगनी रंग के लिए) से 7000Å (लाल रंग के लिए) के मध्य होती है। स्पेक्ट्रम के लाल सिरे से आगे अवरक्त तरंगें ($1\mu\text{m}$ से $100\mu\text{m}$) और इससे काफी परे रेडियो तरंगें (200 m से 500 m) होती हैं। विद्युत् चुंबकीय तरंगें निर्वात से होकर गुजर सकती हैं और ये सभी निर्वात से एक ही चाल (प्रकाश की चाल $3\times10^8\,\text{m s}^{-1}$) से चलती हैं। आप इन सभी विषयों के बारे में आगे अधिक विस्तार से पढ़ेंगे किंतु आप यहां इतना जान चुके हैं कि विकिरण विधि से ऊष्मा के स्थानांतरण में माध्यम की क्यों आवश्यकता नहीं होती तथा यह प्रक्रिया बड़ी तेजी से क्यों होती है।

किसी पिंड द्वारा विद्युत् चुंबकीय विकिरण के उत्सर्जन को हम सूक्ष्म भौतिकी संबंधित सिद्धांत से समझ सकते हैं । यहां हम इसकी गहराई में नहीं जा सकते । संक्षेप में, इतना ध्यान रखेंगे कि जब किसी पदार्थ के अणु या परमाणु उच्च ऊर्जा की स्थिति से निम्न ऊर्जा वाली स्थितियों की ओर व्युत्तेजित होते हैं तो विद्युत् चुंबकीय विकिरण उत्पन्न होता है । एक पिंड में किसी ताप पर ऊष्मीय संघट्ट (टक्कर) इन अवयवों (अणुओं व परमाणुओं) के कुछ अंश को लगातार उत्तेजित अवस्था में भेजते रहते हैं जो व्युत्तेजित होकर विद्युत् चुंबकीय विकिरण उत्सर्जित करते हैं । तथापि, हमें याद रखना चाहिए कि आण्वीय उत्तेजन अनेक अन्य विधियों द्वारा भी संपादित हो सकता है । इस प्रकार, यह कतई जरूरी नहीं है कि किसी पिंड द्वारा उत्सर्जित विद्युत् चुंबकीय विकिरण ऊष्मीय संघट्टों (टक्करों) के कारण ही हो । उदाहरणार्थ, किसी प्रतिदीप्ति नलिका से निकलने वाले विकिरण का ताप से कोई संबंध नहीं होता है। ताप के कारण किसी पिंड से उत्सर्जित विद्युत् चुंबकीय विकिरण, जैसे लाल तप्त लोहा अथवा तंतु लैम्प से प्राप्त प्रकाश में होता है, को ऊष्मीय विकिरण कहते हैं । ऐसा देखा गया है कि किसी वस्तु के पृष्ठ द्वारा उत्सर्जित ऊष्मीय ऊर्जा की उत्सर्जन दर पृष्ठ के क्षेत्रफल A तथा उसके परम ताप T के चतुर्थ घात के समानुपाती होती है । किसी पूर्ण विकिरक के लिए प्रति एकांक समय में उत्सर्जित ऊष्मा निम्नलिखित सूत्र* से व्यक्त की जाती है ।

$$H = A\sigma T^4 \qquad (13.5)$$

जहां σ एक सार्वत्रिक नियतांक है । इस व्यंजक को प्रयोग द्वारा सबसे पहले स्टेफॉन ने तथा बाद में सिद्धांत रूप से बोल्ट्ज़मान ने प्राप्त किया था । इसलिए इसे स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियम के नाम से जाना जाता है तथा σ को स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियतांक कहते हैं । SI मात्रक पद्धति में इसका मान $5.67\times10^{-8}\,\text{W m}^{-2}\text{K}^{-4}$ होता है । अधिकांश वस्तुएं समीकरण (13.5) में दी गई ऊष्मा की दर का कुछ अंश ही उत्सर्जित करती हैं। दीप कज्जल जैसे पदार्थों द्वारा उत्सर्जित ऊष्मा की दर ही इस सीमा के करीब होती है । इस कारण एक विमाहीन अंश e जिसे वस्तु की *उत्सर्जकता* कहते हैं, को परिभाषित करते हैं और समीकरण (13.5) को निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं ।

$$H = Ae\sigma T^4 \qquad (13.6)$$

किसी आदर्श विकिरक के लिए $e = 1$ होता है । टंगस्टन लैम्प के लिए, उदाहरण के तौर पर e का मान लगभग 0.4 होता है। $0.3\ \text{cm}^2$ पृष्ठ क्षेत्रफल तथा 3000 K ताप वाला टंगस्टन लैम्प निम्नलिखित दर से ऊष्मा विकिरित करेगा :

$$H = 0.3\times10^{-4}\times0.4\times5.67\times10^{-8}\,(3000)^4 = 55\ \text{W}$$

कल्पना कीजिए कि कोई वस्तु T ताप पर है तथा उसके चारों ओर के वातावरण का ताप T_s है तथा दोनों विकिरण का उत्सर्जन तथा अवशोषण करते हैं तो आदर्श विकिरक के लिए विकिरित ऊष्मा के क्षय (हानि) की नेट दर निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाएगी :

$$H = A\sigma\,(T^4 - T_s^4)$$

उस वस्तु के लिए जिसकी उत्सर्जकता e है उपरोक्त सूत्र निम्न प्रकार से रूपांतरित हो जाएगा :

$$H = e\,\sigma A\,(T^4 - T_s^4) \qquad (13.7)$$

उदाहरणार्थ, आइए हम अपने शरीर से उत्सर्जित ऊष्मा की गणना करें । एक ऐसे व्यक्ति जिसका क्षेत्रफल $1.8\,\text{m}^2$ है और जो 20 °C ताप वाले कमरे में है, का विचार करें । जैसा हम जानते हैं, शरीर का आंतरिक ताप 37 °C होता है। माना त्वचा का ताप 20 °C है, प्रासंगिक विद्युत् चुंबकीय विकिरण क्षेत्र में त्वचा की उत्सर्जकता 'e' लगभग 0.97 है । इस उदाहरण में ऊष्मा-हानि की दर

$$H = 5.67\times10^{-8}\times1.8\times0.97\{(300)^4-(293)^4\}$$
$$= 72.3\ \text{W}$$

जो विराम अवस्था में शरीर द्वारा उत्पन्न ऊर्जा की दर (120 W) के आधे से थोड़ा अधिक है । ऊष्मा के इस क्षय को कारगर तरीके से रोकने के लिए आधुनिक आर्कटिक कपड़े (आम कपड़ों से अच्छे) इस प्रकार बनाए जाते हैं कि शरीर की त्वचा के साथ एक अतिरिक्त पतली चमकदार धातुई परत,

* किरखोफ-नियम के उपयोग से। खंड 13.6 देखिए।

जो कि शरीर के विकिरण को परावर्तित कर देती है, लगाते हैं ।

ड्यूअर फ्लास्क या थर्मस बोतल, इसमें रखी वस्तु से बाहर या बाहर से बोतल में ऊष्मा के स्थानांतरण को कम करने की युक्ति है । यह कांच की दोहरी दीवारों वाला बर्तन है जिसकी आंतरिक और बाह्य दीवारों पर चांदी का लेप चढ़ाया जाता है। आंतरिक दीवारों से विकिरण को वापस भीतर रखी वस्तु पर परावर्तित कर दिया जाता है । इसी प्रकार बाहर की दीवारें अंदर आने वाले किसी भी विकिरण को पुनः परावर्तित कर देती हैं। दीवारों के बीच निर्वात स्थापित किया जाता है ताकि संचरण अथवा संवहन के कारण ऊष्मा की क्षति को कम किया जा सके, फ्लास्क को कार्क जैसे ऊष्मा-रोधी द्वारा सहारा दिया जाता है । गरम वस्तुओं, जैसे भोजन, को ठंडा होने से बचाने के लिए इस युक्ति का उपयोग किया जाता है, अथवा विकल्पतः ठंडी वस्तु के भंडारण (द्रव नाइट्रोजन व हीलियम) के लिए इसे प्रयुक्त किया जाता है ।

▶ ***उदाहरण 13.2*** : 15.0 cm तथा 12.0 cm भुजाओं वाली पतली आयताकार पीतल की पट्टी को एक भट्टी में रखकर 600 °C तक गरम किया जाता है । पट्टी को इस ताप पर रखने के लिए कितनी विद्युत् ऊर्जा की आवश्यकता होगी ? दिया हुआ है कि इसकी उत्सर्जकता 0.250 है । संवहन के द्वारा ऊष्मा-हानि को नगण्य मानिए । स्टेफॉन बोल्ट्ज़मान नियतांक $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W $m^{-2}K^{-4}$) ।

हल परम ताप पर किसी वस्तु द्वारा प्रति इकाई समय में विकिरित ऊर्जा

$H = A e \sigma T^4$ द्वारा दी जाती है ।

जहां A, उत्सर्जक पृष्ठ का क्षेत्रफल है और e इसकी उत्सर्जकता है । यहां

$$A = 2 \times 15.0 \times 12.0 \times 10^{-4}\ m^2$$
$$= 3.60 \times 10^{-2}\ m^2$$

(गुणक 2 पट्टी की दोनों सतहों को सम्मिलित करता है ।);
$e = 0.250$ तथा $T = (600 + 273)K = 873$ K

अतः पट्टी द्वारा ऊष्मा-क्षय की दर

$$H = 3.60 \times 10^{-2} \times 0.250 \times 5.67 \times 10^{-8}\,(873)^4\ W$$
$$= 296\ W$$

पट्टी के ताप को इसके मूल मान 600 °C पर बनाए रखने के लिए यह क्षय किसी ऊष्मा के साधन, मान लीजिए कि विद्युत् ऊष्मक, द्वारा प्रति इकाई समय में उष्मा की समान मात्रा प्रदान करके पूरा किया जाना चाहिए । अतः पट्टी के ताप को 600 °C पर बनाए रखने के लिए 296 W के एक विद्युत् ऊष्मक की आवश्यकता है । व्यावहारिक तौर पर इस मान से अधिक शक्ति के ऊष्मक की आवश्यकता पड़ती है चूंकि ऊष्मक की शक्ति का कुछ भाग स्वयं ऊष्मक द्वारा विकिरण के रूप में क्षय हो जाता है । ◀

13.5 न्यूटन का शीतलन नियम

यदि किसी वस्तु का ताप T आसपास के वातावरण के ताप T_s से अधिक है, तो समीकरण (13.7) के अनुसार वस्तु द्वारा ऊष्मा के क्षय की दर होगी :

$$H = e A \sigma (T^4 - T_s^4)$$

यदि तापांतर $\Delta T = (T - T_s)$ ताप T या T_s से कम है तो ऊष्मा क्षय की दर लगभग निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात की जा सकती है

$$H = e \sigma A[(T_s + \Delta T)^4 - T_s^4]$$
$$= e\sigma A T_s^4 \left\{\left(1 + \frac{\Delta T}{T_s}\right)^4 - 1\right\}$$
$$= e\sigma A T_s^4 \left\{4\frac{\Delta T}{T_s} + 6\left(\frac{\Delta T}{T_s}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{T_s}\right)^3 + \left(\frac{\Delta T}{T_s}\right)^4\right\}$$

$(\Delta T/T_s)^2$ तथा इससे अधिक घात वाले पदों को नगण्य मान कर हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होगा,

$$H = 4\, e\, \sigma\, A T_s^3 (T - T_s) \tag{13.8}$$

क्योंकि वस्तु द्वारा ऊष्मा-क्षय की दर वस्तु के ताप के घटने की दर के समानुपाती होती है, इसलिए

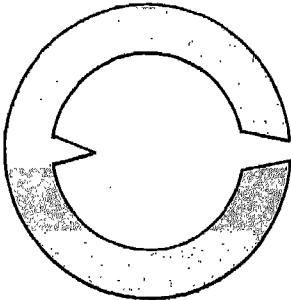
$$dT/dt = -k(T - T_s) \tag{13.9}$$

समीकरण (13.8) के नियतांक तथा वस्तु की विशिष्ट ऊष्मा व उसका द्रव्यमान सभी एक संपूर्ण नियतांक k में समाहित हैं । ऋणात्मक चिह्न यह व्यक्त करता है कि ऊष्मा-क्षय (हानि) का आशय ताप घटने से है । समीकरण (13.9) को न्यूटन का शीतलन नियम कहते हैं : ***शीतलन की दर वस्तु तथा उसके चारों ओर के वातावरण के ताप के अंतर के समानुपाती होती है ।*** किसी बाल्टी में भरा गरम पानी गुनगुना होने तक शुरू में तेजी से ठंडा होता है और इसके बाद वह बड़ी देर तक गुनगुना बना रहता है ।

स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान के नियम का उपयोग करके हमने ऊपर न्यूटन के शीतलन नियम को सन्निकटन के रूप में प्राप्त किया है । वास्तविक परिस्थिति में केवल विकिरण ही ऊष्मा-क्षय का एकमात्र प्रभावशाली तरीका नहीं होता । संवहन, दोनों प्राकृतिक तथा प्रणोदित (उदाहरण के लिए वातप्रवाह के कारण) वातावरण में ऊष्मा के क्षय की एक प्रमुख विधि हो सकती है ।

13.6 किरखोफ का नियम

कोई पिंड जो एक श्रेष्ठ विकिरक (या उत्सर्जक) है वह श्रेष्ठ अवशोषक भी होता है । इसे समझने के लिए कल्पना कीजिए कि किसी वस्तु पर समदैशिक (अर्थात् सभी दिशाओं में एक समान) ऊष्मा विकिरण आपतित है । मान लीजिए कि a सभी तरंगदैर्ध्यों के संपूर्ण विकिरण का एक अंश है जो वस्तु द्वारा अवशोषित होता है । शेष अंश परावर्तित (अथवा पारगम्य) होता है । विमाहीन संख्या a को वस्तु की **अवशोषकता** कहते हैं । शीघ्र ही हम देखेंगे कि $a = e$ होता है ।

ऐसा पदार्थ जिसकी अवशोषकता एक ($a = 1$) होती है, उसे कृष्णिका कहते हैं । काली खुरदरी सतहों के लिए सामान्यतया a का मान लगभग एक होता है । दीप कज्जल इस तरह का एक उदाहरण है, परंतु व्यावहारिक रूप से कोई भी पदार्थ पूर्ण अवशोषक नहीं होता है । कृष्णिका की धारणा मात्र एक आदर्शीकरण है । चित्र 13.6 में दर्शाए अनुसार एक खोखला कोटर जिसमें उसके आकार की अपेक्षा एक छोटा सूराख है और शंक्वाकार उभार है, किसी एकसमान ताप T पर रखा गया है । यह कृष्णिका का एक सर्वश्रेष्ठ सादृश्य है । सूराख एक आदर्श (पूर्ण) अवशोषक की तरह कार्य करता है । जो विकिरण छिद्र से अंदर प्रवेश करता है, उसमें अंदर की दीवार से अगणित बार अवशोषण व विसरित परावर्तन होते हैं तथा विकिरण के बाहर आने की संभावना न के बराबर होती है । अंततः यह पूर्ण रूप से अवशोषित हो जाता है चाहे कोटर की दीवारों का पदार्थ कुछ भी हो ।

चित्र 13.6 एक कोटर जिसकी दीवारें किसी पदार्थ से निर्मित हैं तथा जिसमें एक छोटा छेद है, एक उत्कृष्ट कृष्णिका है । यह फेरी-कृष्णिका है ।

एक खोखले कोटर का विचार करें जिसकी दीवारों का ताप T है । कोटर में ऊष्मीय विकिरण भरा हुआ है । मान लीजिए कि कोटर में किसी काल्पनिक पृष्ठ के एकांक क्षेत्रफल पर प्रति एकांक समय में पड़ने वाली ऊर्जा I है । I को कोटर में प्रदीप्ति कहते हैं । अब कल्पना कीजिए कि उसी कोटर के अंदर एक कृष्णिका को उसी ताप T पर रख दिया जाता है । पिंड ऊष्मीय संतुलन में होगा । अर्थात् कृष्णिका के एकांक क्षेत्रफल द्वारा प्रति एकांक समय में उत्सर्जित विकिरण ऊर्जा (E_B) उसके एकांक क्षेत्रफल द्वारा प्रति एकांक समय में अवशोषित ऊर्जा के बराबर होगी । अर्थात्,

$$E_B = a_B I = I \qquad (13.10)$$

कृष्णिका के लिए $a_B = 1$ होता है ।

उसके बाद कोटर के अंदर तापक्रम T पर एक ऐसी वस्तु रखते हैं जो कृष्णिका नहीं हैं ($a < 1$) । ऊष्मीय संतुलन के अनुसार

$$E = a I \qquad (13.11)$$

यहां E वस्तु (अकृष्णिका) के एकांक क्षेत्रफल के द्वारा प्रति एकांक समय में विकिरित ऊष्मा की मात्रा है । समीकरण (13.10) के द्वारा हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$E = a E_B \qquad (13.12)$$

परंतु पूर्व परिभाषित उत्सर्जकता (e) के पद में उपरोक्त संबंध को निम्नलिखित प्रकार से लिखेंगे:

$$E = e E_B \qquad (13.13)$$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि

$$a = e \qquad (13.14)$$

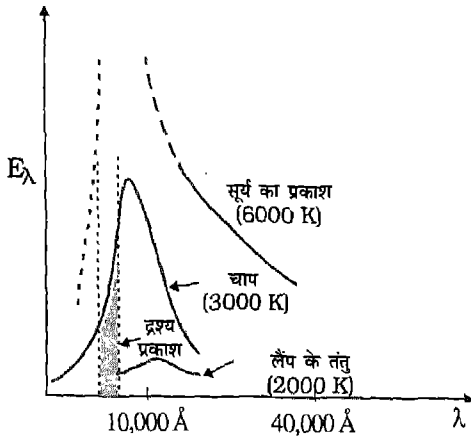
अर्थात्, वस्तु की अवशोषकता उसकी उत्सर्जकता के बराबर होती है । इसे ऊष्मा विकिरण का **किरखोफ का नियम** कहते हैं । अतएव एक उत्तम अवशोषक एक उत्तम उत्सर्जक होता है । क्योंकि कोई उत्तम अवशोषक एक अल्प परावर्तक होता है इसलिए किसी वस्तु के उत्सर्जन की क्षमता तथा उसकी परावर्तन क्षमता के मध्य विपरीत संबंध होता है । एक उत्तम उत्सर्जक एक अल्प परावर्तक होता है । कृष्णिका एक पूर्ण अवशोषक तथा एक पूर्ण उत्सर्जक दोनों होती है । हम अभी पढ़ चुके हैं कि एक खोखले कोटर का छिद्र एक पूर्ण अवशोषक है । हम अब देख चुके हैं कि यह एक पूर्ण उत्सर्जक भी है । इस प्रकार, एक खोखले कोटर के अंदर का ऊष्मा विकिरण (जो छोटे छिद्र से बाहर आ सकता है) किसी कृष्णिका द्वारा उत्सर्जित विकिरण है (कृष्णिका विकिरण) ।

एक विशेष बात यहां ध्यान देने योग्य है । एक खोखले कोटर के अंदर रखे हुए अकृष्णिका से प्रसर्जित कुल विकिरण कृष्णिका द्वारा उत्सर्जित विकिरण के समान होता है अर्थात् कोटर के अंदर वस्तु अपनी विशिष्टता खो देती है । इसका कारण यह है कि कोटर के अंदर रखी वस्तु द्वारा उत्सर्जित विकिरण खुले स्थान में विकिरित ऊष्मा की मात्रा (जिसके लिए $e < 1$) तथा आपाती विकिरण के अंश $(1 - a)$, जो दीवारों से परावर्तित होता है, के योग के बराबर है । दोनों का योग कृष्णिका के विकिरण के बराबर है $(e + 1 - a = 1)$ । इससे इस बात की व्याख्या होती है कि कोई प्रकाशिक उत्तापमापी (उच्च ताप मापने के लिए एक युक्ति) जिसे किसी आदर्श कृष्णिका के लिए अंशांकित किया गया है, खुले वातावरण में लाल तप्त

लोहे का वास्तविक ताप से कम ताप क्यों बताता है, लेकिन जब वही टुकड़ा भट्टी के अंदर होता है तो यह ताप का सही मान देता है।

किरखोफ का नियम अनेक परिचित प्रेक्षणों की व्याख्या करता है। यदि चीनी मिट्टी की किसी अलंकृत कलाकृति को भट्टी में रखकर लगभग 1000 °C तक गरम करें और इसे फुर्ती से अंधेरे कमरे में निकालें तो अलंकृत भाग सफेद भाग की अपेक्षा अधिक चमकदार दिखाई देगा। अलंकरण ऊष्मा विकिरण का उत्तम अवशोषक है; इस कारण वह उत्तम उत्सर्जक भी है। गरम धातु की गेंद, जिस पर प्लेटिनम के लेप वाला काला बिंदु (चित्ती) है, पालिश किए हुए पृष्ठ की अपेक्षा अधिक चमकता है। भट्टी में गर्म किए हरे कांच को जब अंधेरे में लाया जाता है तो वह लाल रंग का चमकता है। हरा कांच लाल रंग का उत्तम अवशोषक होता है और हरे रंग का उत्तम परावर्तक। फलस्वरूप, यह लाल प्रकाश के लिए श्रेष्ठ उत्सर्जक है।

13.7 वीन-विस्थापन नियम

अभी तक हमने ऊष्मा विकिरण के तरंगदैर्ध्य के पक्ष का उल्लेख नहीं किया है। किसी ताप पर ऊष्मा विकिरण के विषय में महत्त्वपूर्ण बात यह है कि विकिरण में मात्र एक ही (या कतिपय) तरंगदैर्ध्य (या तरंगदैर्ध्य) नहीं होती बल्कि कम तरंगदैर्ध्य से लेकर अधिक तरंगदैर्ध्यों के बीच उसका संतत स्पेक्ट्रम होता है। तथापि, विभिन्न तरंगदैर्ध्यों के लिए विकिरित ऊष्मा की ऊर्जा की मात्रा भिन्न-भिन्न होती है। चित्र 13.7 में विभिन्न तापों पर किसी कृष्णिका द्वारा उत्सर्जित विकिरित ऊर्जा तथा तरंगदैर्ध्य के मध्य प्रायोगिक वक्रों को खींचा गया है।

चित्र 13.7 कृष्णिका द्वारा विभिन्न तापों पर उत्सर्जित ऊर्जा तथा तरंगदैर्ध्य के मध्य खींचे गए वक्र।

इस बात पर गौर कीजिए कि तरंगदैर्ध्य λ_{max} जिसके लिए विकिरित ऊर्जा सर्वाधिक है, ताप बढ़ने पर घटती है। λ_{max} तथा T के मध्य के संबंध को **वीन-विस्थापन नियम** कहते हैं। इसे निम्न प्रकार से लिखते हैं,

$$\lambda_{max} T = \text{नियतांक} \qquad (13.15)$$

नियतांक (वीन नियतांक) का मान 2.9×10^{-3} m K होता है। यह नियम इस बात की व्याख्या करता है कि जब लोहे के किसी टुकड़े को अग्नि में गरम करते हैं तो उसका रंग पहले हल्का लाल, फिर रक्ताभ पीला और अंत में सफेद क्यों हो जाता है। वीन-नियम का उपयोग खगोलीय पिंडों; जैसे–चांद, सूर्य या अन्य तारों, के सतह के ताप का अनुमान लगाने में करते हैं। चंद्रमा से प्रकाश की सबसे अधिक तीव्रता 14 μm तरंगदैर्ध्य के आसपास होती है। वीन-नियम से चंद्रमा की सतह का ताप 200 K अनुमानित किया गया है। सौर विकिरण के लिए अधिकतम $\lambda_m = 4753$ Å होता है। इसके अनुरूप $T = 6060$ K होता है। इस बात को याद रखिए कि यह ताप सूर्य की सतह का है न कि उसके आंतरिक (भीतरी) भाग का।

चित्र 13.7 में किसी कृष्णिका द्वारा विकिरित ऊर्जा के वक्रों से संबंधित सर्वाधिक विशिष्ट बात यह है कि ये वक्र सार्वत्रिक होते हैं। ये कृष्णिका के केवल ताप पर निर्भर करते हैं न कि उसके आकार, आकृति या पदार्थ पर। बीसवीं शताब्दी के प्रारंभ में ऐतिहासिक रूप से कृष्णिका के विकिरण की सैद्धांतिक रूप से व्याख्या करने के लिए जो प्रयास किए गए उन्होंने भौतिकी में क्वांटम क्रांति की प्रेरणा दी। इसके विषय में आप आगे अपने पाठ्यक्रम में पढ़ेंगे।

13.8 सौर नियतांक तथा सूर्य का ताप

सूर्य से ब्रह्मांड में नियमित रूप से विकिरित ऊर्जा उत्सर्जित होती रहती है तथापि हमारी पृथ्वी इसका एक अल्प अंश ही ग्रहण करती है। पृथ्वी पर आपतित ऊर्जा का एक भाग परावर्तित व वायुमंडल द्वारा प्रकीर्ण होने के उपरांत अंतरतारकीय दिक्स्थान में पुन: वापस भेज दिया जाता है। शेष अंश अवशोषित हो जाता है। सौर नियतांक (S_0) को उस विकिरण शक्ति के रूप में परिभाषित करते हैं जिसे वायुमंडल की अनुपस्थिति में पृथ्वी का एकांक क्षेत्रफल ग्रहण करता है जब उसे (एकांक क्षेत्रफल को) आपतित विकिरण के लंबवत् सूर्य से पृथ्वी की माध्य दूरी के बराबर रखते हैं। सौर नियतांक का मापा हुआ मान 1340 W m^{-2} है। इस मान का उपयोग करके सूर्य के पृष्ठ के ताप को आसानी से ज्ञात कर लेते हैं।

यदि सूर्य के पृष्ठ का ताप T हो तो उसके द्वारा विकिरित शक्ति H का मान स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियम के द्वारा निम्न सूत्र से व्यक्त किया जा सकता है,

$$H = \sigma 4\pi R_s^2 T^4 \qquad (13.16)$$

यहां R_s सूर्य, जिसे एक कृष्णिका माना गया है, की त्रिज्या है।

औसत दूरी R_0 पर स्थित पृथ्वी के प्रति एकांक क्षेत्रफल द्वारा ग्रहण किए जाने वाले विकिरण का मान है

$$S_0 = \frac{H}{4\pi R_0^2} = \frac{\sigma 4\pi R_s^2 T^4}{4\pi R_0^2} = \frac{\sigma R_s^2 T^4}{R_0^2} \qquad (13.17)$$

समीकरण (13.17) से

$$T = \left(\frac{R^2{}_0 S_0}{R_s^2 \sigma}\right)^{1/4} \qquad (13.18)$$

R_s/R_0 वह औसत कोण है जिसे सौर त्रिज्या पृथ्वी पर बनाती है। इसका मान 4.65×10^{-3} rad होता है । σ तथा S_0 के मान का उपयोग करके हम सौर पृष्ठ का ताप मालूम कर लेते हैं :

$$T = 5742\,K \qquad (13.19)$$

वीन-विस्थापन नियम का उपयोग करके भी हम सूर्य के पृष्ठ के ताप का आकलन कर सकते हैं । सूर्य से विकिरित अधिकतम उत्सर्जन के तद्नुरूप तरंगदैर्ध्य का मान होगा

$$\lambda_{max} = 4753\,Å \qquad (13.20)$$

समीकरण (13.15) का उपयोग करके हम T का मान ज्ञात करते हैं :

$$T = 6060\,K$$

दोनों आकलन एक दूसरे के बहुत समीप हैं । इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि सूर्य का पृष्ठीय ताप लगभग 6000 K है ।

सारांश

1. चालन, संवहन तथा विकिरण ऊष्मा स्थानांतरण की तीन विधियां हैं।

2. चालन में वस्तु के आस-पास के भागों के मध्य ऊष्मा का स्थानांतरण आण्विक संघट्टों के द्वारा संपन्न होता है, परंतु इसमें पदार्थ का स्थानांतरण नहीं होता । L लंबाई एवं एकसमान अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल S वाली किसी धातु की छड़ के सिरों का ताप T_A व T_B हो, तो ऊष्मा संचरण की दर निम्नलिखित सूत्र से दी जाती है;

   $$H = KS\,(T_A - T_B)/L$$

   यहां K छड़ के पदार्थ की ऊष्मा चालकता है । उपरोक्त समीकरण की एक दूसरी व्यापक व्याख्या निम्नलिखित प्रकार से दी जाती है :

   $$H = K\,S\,\frac{dT}{dx}$$

   यहां dT/dx x के अनुदिश ताप प्रवणता है, जो ऊष्मा संचरण की दिशा है । धातुओं की ऊष्मा चालकता अधात्वीय पदार्थों की अपेक्षा बहुत अधिक होती है । गैसें अल्प ऊष्मा चालक होती हैं ।

3. ऊष्मा संचरण की संवहन विधि में पदार्थ का वास्तविक स्थानांतरण होता है । यह केवल तरलों में ही संभव है । प्राकृतिक संवहन असमान तापन व गुरुत्वजनित होता है, जब अधिक गरम करने पर कम सघन भाग ऊपर उठते हैं तथा इनकी जगह पर तरल का ठंडा भाग आ जाता है । प्रणोदित संवहन में पदार्थ को किसी साधन, जैसे पंप या धौंकनी द्वारा बल लगा कर स्थानांतरित करते हैं ।

4. विकिरण द्वारा ऊष्मा का संचरण अधिक दूरी तक होता है और इसके लिए किसी भौतिक माध्यम की आवश्यकता नहीं होती। किसी वस्तु द्वारा उत्सर्जित विद्युत् चुंबकीय विकिरण उसके ताप के कारण होता है । इसे ऊष्मीय विकिरण कहते हैं जो स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियम को संतुष्ट करता है ।

   $$H = A\,e\,\sigma\,T^4$$

   यहां H परम ताप T पर वस्तु के पृष्ठीय क्षेत्रफल A द्वारा उत्सर्जित विकिरित ऊर्जा की दर को व्यक्त करता है । $e\,(\leq 1)$ को वस्तु की उत्सर्जकता तथा σ को स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियतांक कहते हैं ।

5. न्यूटन का शीतलन नियम इस तथ्य की व्याख्या करता है कि किसी वस्तु के ठंडे होने की दर वस्तु तथा उसके आस-पास के वातावरण के तापांतर के समानुपाती होती है :

   $dT/dt = -k\,(T - T_s)$

   यह एक अनुभवजन्य नियम है जिसमें स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियम द्वारा संचालित विकिरण-हानि तथा संभवतया संवहन के प्रभाव सम्मिलित हैं ।

6. अवशोषकता (a) उस कुल समदिश आपतित ऊष्मा विकिरण का अंश है जो वस्तु द्वारा अवशोषित होता है । किरखोफ के नियम के अनुसार $a = e$ । इसका आशय यह है कि एक श्रेष्ठ उत्सर्जक श्रेष्ठ अवशोषक और इस प्रकार अल्प परावर्तक होता है । किसी कृष्णिका के लिए $a = e = 1$, अर्थात् कृष्णिका एक आदर्श (संपूर्ण) अवशोषक तथा साथ ही एक आदर्श (संपूर्ण) उत्सर्जक भी होती है । एक पतले छेद वाली खोखली कोटर जिसकी दीवारों का ताप T है, कृष्णिका का लगभग सर्वश्रेष्ठ उदाहरण है ।

7. ताप T पर किसी कृष्णिका के लिए उसकी विकिरित ऊर्जा (अथवा ऊष्मा विकिरण) का तरंगदैर्ध्य के तदनुरूप अभिलाक्षणिक वितरण होता है जो कि केवल पिंड के ताप T पर निर्भर करता है न कि उसके आकार, आकृति अथवा पदार्थ पर । विकिरित ऊर्जा का वितरण वीन-विस्थापन नियम को संतुष्ट करता है :

$$\lambda_{max}\, T = 2.9 \times 10^{-3}\ \text{m K}.$$

यहां λ_{max} विकिरित ऊर्जा के शीर्ष से संबंधित तरंगदैर्ध्य है ।

8. सौर नियतांक सौर विकिरित ऊर्जा की वह मात्रा है जो पृथ्वी का प्रति एकांक क्षेत्रफल प्रति एकांक समय में उस समय ग्रहण करता है जब इसे वायुमंडल की अनुपस्थिति में आपतित विकिरण के लंबवत् रखते हैं । इसका मान $1340\ \text{W m}^{-2}$ होता है । इस मान तथा स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान के सिद्धांत का उपयोग करके हम सूर्य के ताप का आकलन कर सकते हैं जो लगभग 6000 K के बराबर होता है ।

राशि	प्रतीक	विमाएं	मात्रक	टिप्पणी
ऊष्मा चालकता	K	$[MLT^{-3}K^{-1}]$	$J\ s^{-1}m^{-1}K^{-1}$	$H = -KA\ dT/dx$
उत्सर्जकता	e	विमाहीन	—	$H = A\sigma e T^4$
अवशोषकता	a	विमाहीन	—	$a = e$
स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियतांक	σ	$[M\ T^{-3}K^{-4}]$	$J\ s^{-1}\ m^{-2}\ K^{-4}$	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ $J\ s^{-1}\ m^{-2}\ K^{-4}$

विचारणीय विषय

1. ऊष्मा स्थानांतरण में सदैव दो निकायों अथवा एक ही निकाय के दो भागों के मध्य का तापांतर निहित होता है । यदि ऊर्जा का स्थानांतरण किसी न किसी प्रकार बिना तापांतर के होता है तो वह ऊष्मा नहीं है ।

2. व्यंजक $H = -KA\, dT/dx$ किसी पदार्थ की प्रत्येक स्थिति (तथा समय) के लिए स्थानीय संबंध को व्यक्त करता है। यहां तक कि यह उन सभी असमान अनुप्रस्थ काट तथा आकृतियों वाले द्रव्यों के लिए भी सही है, जो स्थायी अवस्था में नहीं हैं ।

3. संवहन प्रक्रिया में तरल के अंदर उसके भागों के असमान तापों के कारण पदार्थ का संचरण होता है । यदि किसी धातु की गरम छड़ को नल से गिर रहे पानी की धार में रख दें तो छड़ के पृष्ठ तथा पानी के मध्य चालन द्वारा ऊष्मा की हानि होगी, न कि पानी के अंदर संवहन प्रक्रिया के द्वारा ।

4. ऐसे पिंड के लिए, जिसके अंदर के विभिन्न भागों का ताप उसके पृष्ठीय ताप से अलग है, स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान सूत्र में प्रदर्शित ताप T पिंड के पृष्ठीय ताप को व्यक्त करता है ।

5. सभी विद्युत् चुंबकीय विकिरण ऊष्मा विकिरण नहीं होते और उन्हें किसी ताप से संबंधित नहीं कर सकते । चित्र 13.7 में दिखाए गए ऊष्मीय विकिरण की ऊर्जा का तरंगदैर्ध्य के अनुरूप अभिलक्षणिक वितरण होता है । उदाहरणार्थ, एकवर्णी (एकमात्र तरंगदैर्ध्य) लेसर विकिरण ऊष्मा-विकिरण नहीं होता ।

6. कोई कृष्णिका आदर्श (पूर्ण) अवशोषक तथा आदर्श (पूर्ण) उत्सर्जक दोनों ही होती है । किसी चमकीली रोशनी वाले वातावरण में यह काली दिखाई देती है क्योंकि यह दूसरों की अपेक्षा कम (वास्तव में शून्य) विकिरण को परावर्तित करती है । हालांकि एक अंधेरे कमरे में कोई गरम कृष्णिका दूसरों की अपेक्षा अधिक चमकती है ।

7. चंद्रमा जैसे किसी खगोलीय पिंड के ताप का आकलन स्वयं चंद्रमा द्वारा उत्सर्जित विकिरण के स्पेक्ट्रम (वर्णक्रम) से किया जाता है न कि चंद्रमा द्वारा परावर्तित प्रकाश के वर्णक्रम से ।

8. यदि कोई अकृष्णिका वस्तु ($e < 1$) किसी कोटर में रखी है, तो उसके पतले छिद्र से बाहर आने वाला विकिरण कृष्णिका के विकिरण के समान ($e = 1$) होगा । ऐसी स्थिति में पिंड की पूर्ण उत्सर्जकता में जो कमी आती है उसकी पूर्ति उस आपतित विकिरण के द्वारा होती है जो कोटर की दीवारों से परावर्तित होता है ।

अभ्यास

13.1 एक थर्मकोल आइसबॉक्स पके हुए भोजन की कम मात्रा के भंडारण के लिए (विशेषकर गर्मियों में) एक सस्ती और दक्ष युक्ति है । 30 cm भुजा वाले किसी घनाकार आइस-बॉक्स की मोटाई 5.0 cm है । यदि बॉक्स में 4.0 किलोग्राम का बर्फ का टुकड़ा रख दिया जाए, तो 6 घंटे के बाद बची बर्फ की मात्रा का आकलन करिए । बाहरी ताप 45 °C है और थर्मकोल की ऊष्मा चालकता गुणांक 0.01 $J\,s^{-1}m^{-1}\,°C^{-1}$ है (जल की संगलन ऊष्मा $335\times10^3\,J\,kg^{-1}$) ।

13.2 पीतल के बॉयलर की पेंदी का क्षेत्रफल 0.15 m^2 और मोटाई 1.0 cm है । जब इसे किसी गैस स्टोव पर रखते हैं तो 6.0 kg/min की दर से इसका पानी उबलने लगता है । ज्वाला के उस हिस्से के ताप का आकलन कीजिए जो बॉयलर के संपर्क में है । पीतल की ऊष्मा-चालकता = 109 $J\,s^{-1}\,m^{-1}\,°C^{-1}$ (जल की वाष्पन ऊर्जा =$2256\times10^3\,J\,kg^{-1}$) ।

13.3 निम्नलिखित आंकड़ों का उपयोग करते हुए सूर्य के पृष्ठ के ताप का आकलन कीजिए :

पृथ्वी की कक्षा की औसत त्रिज्या = 1.5×10^8 km

सूर्य की औसत त्रिज्या = 7.0×10^5 km

दोपहर के समय पृथ्वी पर सौर विकिरण की शक्ति = 1400 $W\,m^{-2}$

गणना में सूर्य को आदर्श (पूर्ण) कृष्णिका मानिए । आपके आकलन के अनुसार यह ताप सूर्य के वास्तविक पृष्ठीय ताप से अधिक होगा या कम ? अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए ।

13.4 व्याख्या कीजिए कि क्यों :

(a) अधिक परावर्तकता वाला पिंड एक अल्प उत्सर्जक होता है ।

(b) सर्दी के दिनों में कोई पीतल का बर्तन (गिलास) लकड़ी की किश्ती की अपेक्षा अधिक ठंडा होता है ।

(c) एक आदर्श कृष्णिका के विकिरण के लिए अंशांकित कोई प्रकाशिक उत्तापमापी (उच्च ताप मापने की युक्ति) खुले स्थान में लाल तप्त लोहे के टुकड़े का काफी कम ताप दर्शाता है, लेकिन जब यह टुकड़ा भट्टी में रखा जाता है तो उत्तापमापी सही ताप दर्शाता है ।

(d) बिना वायुमंडल के पृथ्वी असहज रूप से ठंडी हो जाएगी ।

(e) भाप के परिचालन पर आधारित तापन युक्तियां गरम पानी के परिचालन की अपेक्षा अधिक दक्ष होती हैं ।

13.5 कोई पिंड 5 मिनट में 80 °C से 50 °C तक ठंडा होता है । 60 °C से 30 °C तक ठंडा होने में लगे समय की गणना कीजिए । पिंड के चारों ओर के वातावरण का ताप 20 °C है ।

अध्याय 14

दोलन

14.1 भूमिका

हम अपने दैनिक जीवन में विभिन्न प्रकार की गतियां देखते हैं। इनमें से कुछ जैसे सरल रैखिक गति अथवा किसी प्रक्षेप्य की गति के विषय में तो आप अध्ययन कर ही चुके हैं। ये दोनों ही गतियां एकदिश तथा अनावर्ती होती हैं। आपने एकसमान वर्तुल गति तथा सौर परिवार में ग्रहों की कक्षीय गतियों के विषय में भी अध्ययन कर लिया है। इन उदाहरणों में निश्चित समय-अंतराल के पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, अर्थात् यह आवर्ती होती है। आपने बचपन में अपने पालने अथवा स्वभाविक झूले पर झूलने का आनन्द लिया होगा। यह दोनों गतियां पुनरावर्ती होती हैं, परंतु किसी ग्रह की आवर्ती गति से भिन्न होती है। यहां वस्तु किसी माध्य स्थिति के इधर-उधर गति करती है। दीवार-घड़ी का लोलक भी इसी प्रकार की गति करता है। इधर-उधर हिलते झाड़फानूस, लंगर पर इधर-उधर हिलती नावें तथा कारों के इंजनों में दोलायमान पिस्टन, ये सभी वस्तुएं अग्र-पश्च (आगे-पीछे) आवर्ती गति का निष्पादन करती हैं। इस प्रकार की गति को **दोलन गति** अथवा **आवर्त गति** कहते हैं। इस अध्याय में हम इस गति के बारे में अध्ययन करेंगे।

दोलन गति का अध्ययन भौतिकी के लिए आधारभूत है; बहुत-सी भौतिक परिघटनाओं को समझने के लिए इनकी संकल्पनाओं की आवश्यकता होती है। वाद्य यंत्रों; जैसे-सितार, गिटार अथवा वायलिन में हम कंपमान डोरियों द्वारा रोचक ध्वनियां उत्पन्न होते हुए देखते हैं। ढोलों में झिल्लियां तथा टेलीफोन और ध्वनि विस्तारकों के स्पीकरों में डायाफ्राम अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर कंपन करते हैं। वायु के अणुओं के कंपनों द्वारा ही ध्वनि-संचरण संभव हो पाता है। इसी प्रकार, ठोसों के अणु अपनी माध्य स्थितियों के परित: दोलन करते हैं और ताप-संवेदन पहुंचाते हैं। रेडियो, टी.वी. तथा उपग्रहों के ट्रांसमीटरों के एन्टेना में हो रहे इलेक्ट्रॉनों के दोलनों द्वारा सूचना-संचरण संभव हो पाता है।

किसी आवर्ती गति के व्यापक तथा दोलन गति के विशेष विवरण के लिए कुछ मूल संकल्पनाओं; जैसे-आवर्तकाल, आवृत्ति, विस्थापन, आयाम और कला की आवश्यकता होती है। अगले अनुभाग में इन संकल्पनाओं को विकसित किया गया है।

सरल आवर्त गति, दोलन गति का सरलतम रूप है। जैसा कि हम देखेंगे, यह गति तब उत्पन्न होती है, जब बल माध्य स्थिति से विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा सदैव ही माध्य स्थिति की ओर निदेशित रहता है। अब हम सरल आवर्त गति का निष्पादन करने वाले कुछ सरल निकायों का अध्ययन करेंगे।

व्यवहार में, घर्षण जनित अवमंदन तथा अन्य क्षयकारी कारकों के कारण दोलनकारी पिण्ड अंततः अपनी साम्य स्थिति में विराम में आ जाते हैं। किंतु उन्हें कुछ बाह्य साधनों द्वारा दोलन करते रहने के लिए बाध्य किया जा सकता है। इस अध्याय में, बाद में, अवमंदित एवं प्रणोदित दोलन की चर्चा की गई है। हम यहां उस दिलचस्प परिस्थिति का प्रारंभिक विवरण भी प्रस्तुत करेंगे जिसमें दो दोलकों को युग्मित करते हैं।

किसी भौतिक माध्यम को अनेक युग्मित दोलनों का समूह माना जा सकता है। माध्यम में अवयवों के सामूहिक दोलन तरंगों के रूप में परिलक्षित होते हैं। जल-तरंगें, भूकंपी तरंगें, वैद्युतचुंबकीय तरंगें तथा द्रव्य तरंगें इनके कुछ उदाहरण हैं। तरंग परिघटना का अध्ययन हम अगले अध्याय में करेंगे।

14.2 आवर्ती गति

14.2.1 आवर्तकाल तथा आवृत्ति

कोई गति जिसकी किसी नियमित समय अंतराल पर स्वयं पुनरावृत्ति होती है **आवर्ती** अथवा **आवर्त गति** कहलाती है। ***वह न्यूनतम समय अंतराल जिसके पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, इसका आवर्तकाल कहलाता है।*** आवर्तकाल का निरूपण प्रायः प्रतीक T द्वारा किया जाता है तथा इसका SI मात्रक सेकंड है। उन आवर्ती गतियों के लिए, जो सेकंडों के पैमाने पर या तो बहुत तीव्र अथवा बहुत मंद होती हैं, समय के अन्य सुविधाजनक मात्रक उपयोग में लाए जाते हैं। किसी क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल का कंपन काल माइक्रोसेकंड (10^{-6} s) के मात्रकों, जिसका प्रतीक μs है, में व्यक्त किया जाता है। इसके विपरीत बुध ग्रह की कक्षीय अवधि 87.97 भू-दिवस होती है। हेली धूमकेतु हर 76 वर्ष के पश्चात् पुनः दृष्टिगोचर होता है।

आवर्तकाल 'T' के व्युत्क्रम से हमें प्रति सेकंड दोलनों की संख्या प्राप्त होती है। यह राशि **आवर्ती गति की आवृत्ति** कहलाती है। इसे प्रतीक ν (अथवा f) द्वारा निरूपित किया जाता है। ν तथा T के मध्य निम्नलिखित पारस्परिक संबंध होता है :

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{14.1}$$

इस प्रकार ν का मात्रक (s^{-1}) है। रेडियो तरंगों के आविष्कारक हेनरिख रुडोल्फ हर्ट्ज़ (1857-1894) के नाम पर आवृत्ति के मात्रक को एक विशेष नाम दिया गया। इसे हर्ट्ज़ (hertz प्रतीक Hz) कहते हैं। इस प्रकार,

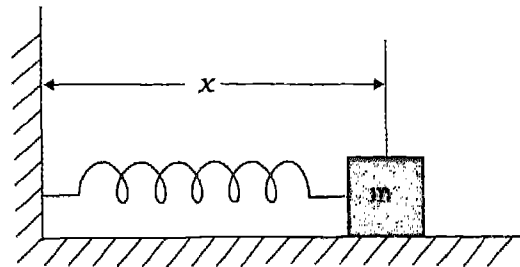
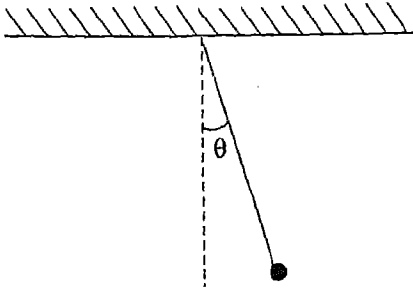
$$1 \text{ हर्ट्ज़} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ दोलन प्रति सेकंड} = 1 s^{-1} \tag{14.2}$$

ध्यान दीजिए, आवृत्ति का सदैव ही पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है।

> *उदाहरण 14.1* कोई मानव हृदय एक मिनट में औसतन 75 बार धड़कन करता पाया जाता है। धड़कन की आवृत्ति तथा आवर्तकाल परिकलित कीजिए।

हल हृदय की धड़कन की आवृत्ति = 75/(1 मिनट)
= 75/(60 s)
= $1.25 s^{-1}$
आवर्तकाल, $T = 1/(1.25 s^{-1})$
= 0.8 s

14.2.2 विस्थापन

अनुभाग 4.2 में हमने किसी कण के विस्थापन को उसके स्थिति सदिश में परिवर्तन के रूप में परिभाषित किया था। इस अध्याय में हम विस्थापन नामक इस पद का उपयोग अधिक व्यापक अर्थों में करेंगे। यह किसी भी विचारणीय भौतिक गुण में समय के साथ परिवर्तन को निरूपित करेगा। उदाहरण के लिए, एक पृष्ठ पर किसी स्टील बॉल की सरल रेखीय गति के लिए, समय के फलन के रूप में आरंभ बिंदु से बॉल की दूरी इसका **स्थिति-विस्थापन** है। मूल बिंदु का चुनाव सुविधानुसार किया जा सकता है। मान लीजिए कोई गुटका किसी कमानी से जुड़ा है जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है [देखिए चित्र 14.1(a)]। यहां दीवार से दूरी, x, एक विस्थापन चर है। किसी दोलायमान सरल लोलक के लिए, समय के फलन के रूप में ऊर्ध्वाधर से कोण को विस्थापन-चर के रूप में निरूपित किया जा सकता है। [देखिए चित्र 14.2(b)]। '**विस्थापन**' पद का उल्लेख सदैव स्थिति के संदर्भ में ही नहीं किया जाता। विस्थापन चर कई अन्य प्रकार के भी हो सकते हैं।

चित्र 1.4.1(a) कोई गुटका किसी कमानी से संलग्न, जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है। गुटका घर्षण रहित पृष्ठ पर गति करता है। गुटके की गति को दीवार से दूरी, अथवा विस्था-न x के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

चित्र 14.1(b) एक दोलायमान सरल लोलक, इसकी गति को ऊर्ध्वाधर से कोणीय विस्थापन θ के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।

किसी a.c. परिपथ में संयोजित संधारित्र के सिरों के बीच समय के साथ परिवर्तित हो रहे "वोल्टता" को भी एक विस्थापन चर के रूप में लिया जा सकता है । इसी प्रकार, ध्वनि तरंगों के संचरण में समय के साथ 'दाब' में परिवर्तन, प्रकाश तरंगों में परिवर्तित हो रहे वैद्युत तथा चुंबकीय क्षेत्र अन्य संदर्भों में विस्थापन के उदाहरण हैं । दोलनों के प्रयोगों में, विभिन्न समयों के लिए विस्थापन चरों की माप ली जाती है ।

विस्थापन को सदैव ही समय के गणितीय फलन द्वारा निरूपित किया जा सकता है । आवर्ती गतियों में यह फलन समय का आवर्ती होता है । आवर्ती फलनों में से एक सरलतम आवर्ती फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं,

$$F(t) = a\cos\omega t \qquad (14.3a)$$

यदि इस फलन के कोणांक, ωt, में 2π रेडियन या इसके किसी पूर्णांक गुणज की वृद्धि कर दी जाए, तो फलन का मान वही रहता है । तब भी फलन $F(t)$ आवर्ती ही रहता है जिसका आवर्तकाल, T निम्नलिखित होगा,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (14.3b)$$

अत: कोई फलन $F(t)$ काल T का आवर्ती होता है,

$$F(t) = F(t+T)$$

यदि हम ज्या (sin) फलन, $F(t) = a\sin\omega t$ भी लें तो स्पष्ट रूप से यही परिणाम सही होता है । साथ ही ज्या (sin) एवं कोज्या (cos) फलनों का एक घात संचय, जैसे

$$F(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t \qquad (14.3c)$$

भी आवर्ती फलन होता है, जिसका आवर्तकाल T होता है । यदि हम

$$a = A\cos\phi \quad \text{तथा} \quad b = A\sin\phi$$

लें, तो समीकरण 14.3c को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$F(t) = A\sin(\omega t + \phi) \qquad (14.3d)$$

जहां,

$$A = \sqrt{a^2+b^2} \text{ तथा } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

आवर्ती ज्या और कोज्या फलनों का विशेष महत्त्व फ्रांसीसी गणितज्ञ जीन बापटिस्ट जोसेफ फूरिए (1768–1830) द्वारा सिद्ध असाधारण परिणाम के कारण है, जो इस प्रकार है : ***किसी भी आवर्ती फलन को उचित गुणांक वाले विभिन्न आवर्तकाल के ज्या व कोज्या फलनों के अध्यारोपण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है ।*** (देखिए परिशिष्ट 14.1) ।

▶ *उदाहरण 14.2* निम्नलिखित समय के फलनों में कौन (a) आवर्ती तथा (b) अनावर्ती गति को निरूपित करते हैं ? प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल लिखिए [ω कोई धनात्मक नियतांक है] ।

(i) $\sin\omega t + \cos\omega t$

(ii) $\sin\omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log(\omega t)$

हल (i) $\sin\omega t + \cos\omega t$ एक आवर्ती फलन है । इसे $\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है ।

अब, $$\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$$
$$= \sqrt{2}\sin\left\{\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \frac{\pi}{4}\right\}$$

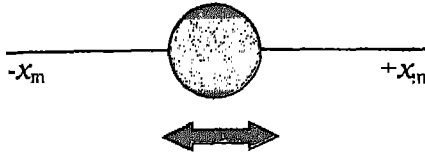
इस फलन का आवर्तकाल $\frac{2\pi}{\omega}$ है ।

(ii) यह आवर्ती गति का एक उदाहरण है । ध्यान दीजिए, यहां प्रत्येक पद एक विभिन्न कोणीय आवृत्ति के आवर्ती फलन को निरूपित करता है । चूंकि आवर्तकाल वह न्यूनतम समय अंतराल होता है जिसके पश्चात् फलन अपने मान की स्वयं पुनरावृत्ति करता है, $\sin\omega t$ का आवर्तकाल $T = 2\pi/\omega$; $\cos 2\omega t$ का आवर्तकाल $\pi/\omega = T/2$; तथा $\sin 4\omega t$ का आवर्तकाल $2\pi/4\omega = T/4$ होता है । अंतिम दो पदों की पुनरावृत्ति उनके आवर्तकाल के किसी भी पूर्णांक गुणज के पश्चात् होती है । इस प्रकार, इस योग का प्रत्येक पद T के पश्चात् स्वयं पुनरावृत्ति करता है, तथा यह योग एक आवर्ती फलन होता है जिसका आवर्तकाल $2\pi/\omega$ है ।

(iii) फलन $e^{-\omega t}$ अनावर्ती है, यह समय में वृद्धि के साथ एक दिष्टत: घटता है तथा $t \rightarrow \infty$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होता है और इस प्रकार कभी भी अपने मान की पुनरावृत्ति नहीं करता।

(iv) फलन $\log(\omega t)$ समय के साथ एकदिष्टत: बढ़ता है। अत: यह अपने मान की कभी भी पुनरावृत्ति नहीं करता और यह एक अनावर्ती फलन है। ध्यान दीजिए, $t \rightarrow \infty$ होने पर $\log \omega t$ अपसारित होकर ∞ तक पहुंच जाता है। अत: यह किसी भी प्रकार के भौतिक विस्थापन को निरूपित नहीं कर सकता। ◀

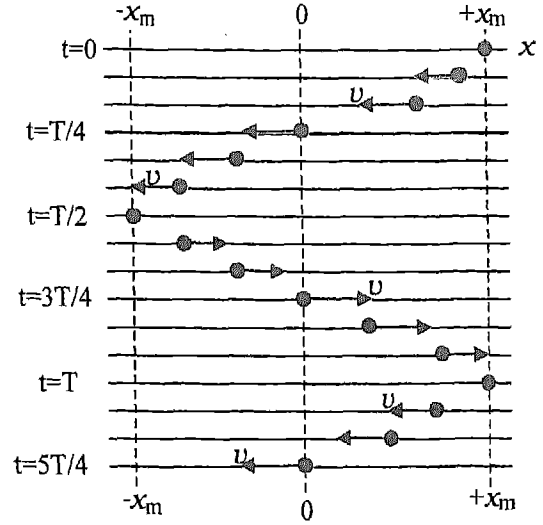
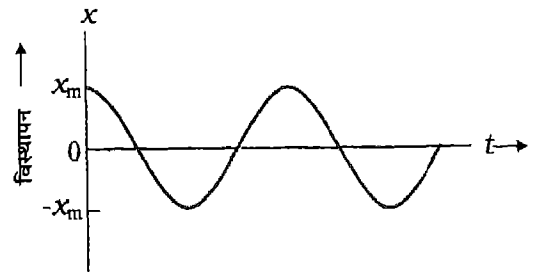
14.3 सरल आवर्त गति

आइए, अब हम चित्र 14.2 के अनुसार x-अक्ष के मूल बिंदु पर $+x_m$ और $-x_m$ चरम सीमाओं के मध्य अग्र और पश्च कंपन करने वाले किसी कण पर विचार करें। इन चरम स्थितियों के बीच कण इस प्रकार गति करता है कि जब यह मूल बिंदु पर होता है, तब इसकी चाल अधिकतम तथा जब यह $\pm x_m$ पर होता है तब इसकी चाल शून्य होती है। हम समय का चयन इस प्रकार करते हैं कि जब कण $+x_m$ पर होता है तब समय t

चित्र 14.2 x-अक्ष के मूलबिंदु पर $+x_m$ और $-x_m$ सीमाओं के भीतर अग्र और पश्च कंपन करते हुए कोई कण।

शून्य लिया जाता है तथा यह $t=T$ पर $+x_m$ पर वापस आ जाता है। इस अनुभाग में हम केवल इसी गति का वर्णन करेंगे। इस गति को किस प्रकार प्राप्त किया जाता है इसकी चर्चा बाद में करेंगे। इस कण की गति का अध्ययन करने के लिए, नियमित समय अंतरालों पर इस कण के आशु चित्र (स्नैप शाट्स) लेकर हम इसकी स्थिति को समय के फलन के रूप में अंकित करते हैं। चित्र 14.3 में इस प्रकार के आशुचित्रों का सेट दिखाया गया है। मूल बिंदु के सापेक्ष इस कण की स्थिति समय के किसी क्षण पर कण का विस्थापन बताती है। इस प्रकार की गति के लिए, सावधानीपूर्वक चुने गए किसी मूल बिंदु से कण का विस्थापन $x(t)$ समय के साथ परिवर्तित होता है। इसे इस प्रकार दर्शाया जाता है,

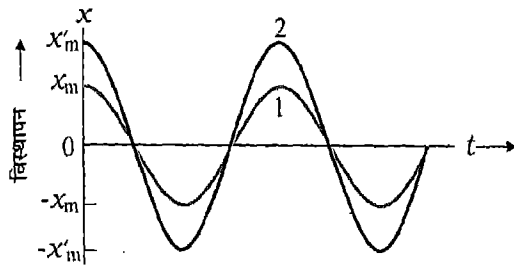
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (14.4)$$

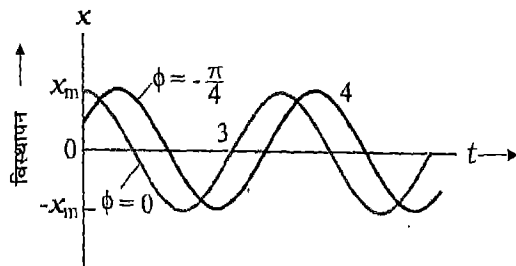
यहां x_m, ω तथा ϕ स्थिरांक हैं।

समीकरण (14.4) द्वारा निरूपित गति को **सरल आवर्त गति** कहते हैं। इस पद का मूल अभिप्राय है कि **आवर्ती गति समय का ज्यावक्रीय फलन है**। समीकरण (14.4), जिसमें ज्यावक्रीय फलन एक कोज्या फलन है, को चित्र 14.4 में दर्शाया गया है। वे राशियां जो ग्राफ की आकृति को निर्धारित करती हैं; अपने नामों के साथ चित्र 14.5 में दर्शायी गई हैं।

चित्र 14.3 $+x_m$ तथा $-x_m$ सीमाओं के बीच, x-अक्ष के परित: आगे तथा पीछे (अग्र-पश्च) कंपन करते हुए किसी कण की समान समय-अंतरालों पर होने वाली स्थितियों के आशु चित्रों का एक क्रम। सदिश बाणों की लंबाई कण की चाल को इंगित करती है। कण की चाल मूल स्थान पर अधिकतम तथा $\pm x_m$ पर शून्य है। यदि कण की $+x_m$ स्थिति पर समय t को शून्य लिया जाए तो कण $t = T$ पर $+x_m$ की स्थिति पर पुन: लौटता है। यहां T गति की आवर्तकाल है जिस पर गति की पुनरावृत्ति होती है। यह चित्र $\phi = 0$ के लिए समीकरण (14.4) को दर्शाता है।

चित्र 14.4 समीकरण (14.4) द्वारा निरूपित गति के लिए समय के फलन के रूप में x का ग्राफ।

चित्र 14.5 समीकरण (14.4) में दी गई राशियों का अनुचित्र।

अब हम इन राशियों की परिभाषा देंगे ।

राशि x_m गति का **आयाम** कहलाती है । यह एक धनात्मक अचर होता है जिसका मान गति कैसे आरंभ हुई, पर निर्भर करता है । पादाक्षर m **अधिकतम** के लिए प्रयुक्त हुआ है, क्योंकि आयाम कण की माध्य स्थिति के किसी ओर के अधिकतम विस्थापन का परिमाण होता है । समीकरण (14.4) में कोज्या फलन ±1 सीमाओं के बीच विचरण करता है, अतः विस्थापन $x(t)$ सीमाओं $\pm x_m$ के बीच विचरण करेगा । चित्र 14.6 में समीकरण (14.4) के दो विभिन्न आयामों x_m तथा x'_m के लिए वक्र 1 और 2 आलेखित किए गए हैं । इन वक्रों में भिन्नता आयाम के महत्त्व को दर्शाती है ।

चित्र 14.6 समीकरण (14.4) से प्राप्त $\phi = 0$ पर समय के फलन के रूप में विस्थापन का आलेख । वक्र 1 और 2 दो भिन्न आयामों x_m तथा x'_m के लिए हैं ।

समीकरण (14.4) में समय के साथ परिवर्तित होने वाली राशि, $(\omega t+\phi)$, गति की **कला** कहलाती है । यह किसी दिए गए समय पर गति की अवस्था का वर्णन करती है । अचर ϕ को **कला नियतांक** (अथवा **कला-कोण**) कहते हैं । ϕ का मान $t = 0$ पर कण के विस्थापन तथा कण के वेग पर निर्भर करता है । इसे चित्र 14.7 द्वारा अधिक आसानी से समझा जा सकता है । इस चित्र में कला नियतांक ϕ के दो मानों के लिए दो वक्र 3 तथा 4 समीकरण (14.4) के ग्राफ को निरूपित करते हैं । यह दर्शाया जा सकता है कि कला नियतांक आरंभिक स्थितियों को प्रकट करता है ।

चित्र 14.7 समीकरण (14.4) से प्राप्त (x-t) आलेख । वक्र 3 तथा 4 क्रमशः कला कोण $\phi = 0$ rad तथा $\phi = -\pi/4$ rad के लिए हैं । दोनो आलेखों के लिए आयाम x_m समान है।

अचर ω, को गति की **कोणीय आवृत्ति** कहते हैं, तथा यह आवर्तकाल T से संबंधित होती है । समीकरण (14.4) से T तथा ω के बीच संबंध सरलता से प्राप्त किया जा सकता है । समीकरण (14.4) में $\phi = 0$ rad रखने पर हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है,

$$x(t) = x_m \cos \omega t \qquad (14.5)$$

अब, चूंकि गति आवर्ती है जिसका आवर्तकाल T है, अतः गति के एक आवर्तकाल के पश्चात् विस्थापन $x(t)$ को अपने आरंभिक मान पर वापस लौटना चाहिए; अर्थात् t के हर मान के लिए $x(t)$ का मान $x(t+T)$ के तुल्य होना चाहिए । इस शर्त का समीकरण (14.5) में उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega(t+T) \qquad (14.6)$$

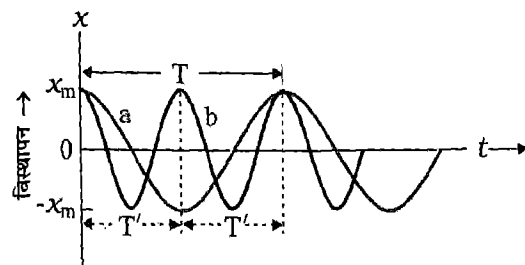
चूंकि जैसे कि कोणांक (कला) में 2π रेडियन की वृद्धि होती है, कोज्या फलन स्वयं अपनी पुनरावृत्ति करता है, समीकरण (14.6) से

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

अथवा $\omega T = 2\pi$

इस प्रकार, कोणीय आवृत्ति,

$$\omega = 2\pi/T \qquad (14.7)$$

कोणीय वेग का SI मात्रक रेडियन प्रति सेकंड है । आर्वतकाल T का महत्त्व स्पष्ट करने के लिए चित्र 14.8 में दो भिन्न आवर्तकालों के लिए ज्यावक्रीय फलन आलेखित किए गए हैं । इस आलेख में वक्र a आवर्तकाल T तथा वक्र b आवर्तकाल $2T$ की सरल आवर्त गतियों को निरूपित करते हैं ।

चित्र 14.8 समीकरण (14.4) के $\phi = 0$ rad पर दो भिन्न आवर्तकालों के लिए आलेख ।

अब तक हमने सरल आवर्त गति का आरंभिक ज्ञान प्राप्त किया । हम अगले अनुभाग में सरल आवर्त गति के सरलतम उदाहरण की चर्चा करेंगे । वहां यह दर्शाया जाएगा कि एकसमान वर्तुल गति का वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप सरल आवर्त गति करता है ।

> **उदाहरण 14.3** समय के निम्नलिखित फलनों में से कौन (a) सरल आवर्त गति तथा (b) आवर्ती गति को निरूपित करता है परंतु सरल आवर्त गति नहीं ? प्रत्येक का आवर्तकाल निकालिए ।
>
> (1) $\sin \omega t - \cos \omega t$
>
> (2) $\sin^2 \omega t$

हल (1) $\sin \omega t - \cos \omega t$

$= \sin \omega t - \sin (\pi/2 - \omega t)$

$= 2 \cos \pi/4 \cos (\omega t - \pi/4)$

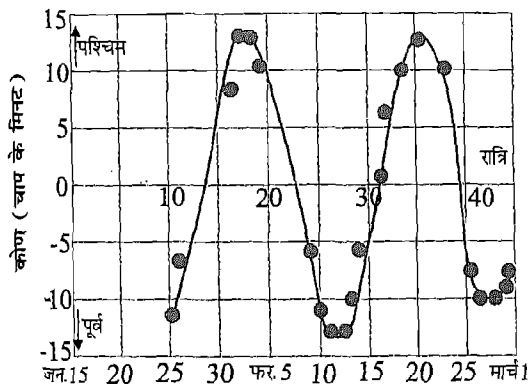
$= \sqrt{2} \cos (\omega t - \pi/4)$

यह फलन सरल आवर्त गति का निरूपण करता है, जिसका आवर्तकाल $T = 2\pi/\omega$ तथा कला-कोण $(-\pi/4)$ rad अथवा $(7\pi/4)$ rad है ।

(2) $\sin^2 \omega t = ½ - ½ \cos 2 \omega t$

यह फलन आवर्ती है, जिसका आवर्तकाल $T=\pi/\omega$ है, परंतु यह सरल आवर्त गति का निरूपण नहीं करता । ◀

14.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति

सन् 1610 ई. में गैलीलियो ने बृहस्पति ग्रह के चार प्रमुख चंद्रमाओं की खोज की । उन्हें प्रत्येक चंद्रमा ग्रह के सापेक्ष अग्र तथा पश्च सरल आवर्त गति करता प्रतीत हुआ; ग्रह की चक्रिका (डिस्क) गति के मध्य बिंदु को निरूपित करती है । गैलीलियो के प्रेक्षणों के हस्तलिखित अभिलेख आज भी उपलब्ध हैं । उनके आंकड़ों पर आधारित, बृहस्पति के आपेक्ष चंद्रमा कैलिस्टो की स्थिति चित्र 14.9 में आलेखित की गई है । इस चित्र में, वृत्त गैलीलियो के प्रेक्षणों को दर्शाते हैं तथा खींचा गया वक्र आंकड़ों के लिए सर्वोपयुक्त है । वक्र समीकरण (14.4) का पालन करता है जो सरल आवर्त गति के लिए विस्थापन फलन है । इस वक्र द्वारा प्राप्त आवर्तकाल लगभग 16.8 दिन है ।

चित्र 14.9 पृथ्वी से देखने पर बृहस्पति तथा उसके कैलिस्टो चंद्रमा के बीच कोण । वृत्त गैलीलियो के सन् 1610 के प्रेक्षणों पर आधारित हैं । वक्र प्रेक्षणों के सर्वाधिक अनुकूल है तथा सरल आवर्त गति को प्रस्तावित करता है । बृहस्पति की माध्य दूरी पर 10 मिनट का चाप लगभग $2 \times 10^6 km$ दूरी के तद्नुरूपी है ।

यह सर्वविदित है कि कैलिस्टो सार रूप से एक अचर चाल से वर्तुल कक्ष में बृहस्पति ग्रह के चारों ओर गति करता है । इसकी यथार्थ गति एकसमान वर्तुल गति है । गैलीलियो ने जो देखा तथा जो कुछ हम भी एक अच्छे द्विनेत्री (बाइनाक्युलर) द्वारा देख सकते हैं वह वास्तव में गति के तल में किसी सरल रेखा पर एकसमान वर्तुल गति का प्रक्षेप होता है । इसे एक सरल प्रयोग करके आसानी से देखा जा सकता है । एक गेंद को किसी डोरी के सिरे से बांधकर क्षैतिज तान में उसे किसी निश्चित बिंदु के परित: अचर कोणीय चाल से गति कराइए । तब गेंद क्षैतिज तल में एकसमान वर्तुल गति करेगी । अपनी आंख को गति के तल में केंद्रित करके तिरछी ओर से अथवा सामने से गेंद का अवलोकन कीजिए । गेंद एक क्षैतिज रेखा के अनुदिश इधर-उधर गति करती प्रतीत होगी इसमें घूर्णन बिंदु मध्य बिंदु होगा । इस प्रक्रिया में हम जो कुछ अवलोकन करते हैं, वास्तव में, वह हमारी दृष्टि की दिशा के अभिलंबवत् व्यास पर गेंद की गति होती है । यह प्रयोग हमें गैलीलियो के प्रक्षेण का सादृश प्रदान करता है ।

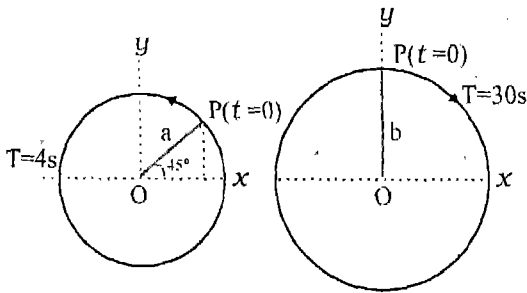
चित्र 14.10 में, हमने एक **संदर्भ वृत्त** में किसी **संदर्भ बिंदु** P को (अचर) कोणीय चाल ω से एकसमान वर्तुल गति करते हुए दर्शाया है । वृत्त की त्रिज्या x_m कण के "स्थिति सदिश" का परिमाण है । किसी समय t पर, कण की कोणीय स्थिति $\omega t + \phi$ है, यहां ϕ इस कण की $t = 0$ पर कोणीय स्थिति है । x-अक्ष पर कण P का प्रक्षेप बिंदु P' है, जिसे हम दूसरे के रूप में परिलक्षित कर सकते हैं । x-अक्ष पर कण P के स्थिति सदिश का प्रक्षेप बिंदु P की अवस्थिति $x(t)$ बताता है । इस प्रकार, हमें यह संबंध प्राप्त होता है :

चित्र 14.10 त्रिज्या x_m के संदर्भ वृत में किसी संदर्भ बिन्दु P की (अचर) कोणीय चाल ω से एक समान वर्तुल गति ।

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

जो समीकरण (14.4) के समान है। यह दर्शाता है कि यदि संदर्भ कण P एक समान वर्तुल गति करता है तो इसका प्रक्षेप बिंदु P′ वृत्त के व्यास के अनुदिश सरल आवर्त गति करता है।

गैलीलियो के प्रेक्षण तथा उपरोक्त विचारों के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि वर्तुल गति किनारे की ओर से देखने पर सरल आवर्त गति होती है। इसे और अधिक विधिवत भाषा में हम इस प्रकार कह सकते हैं : **सरल आवर्त गति एक समान वर्तुल गति का उस वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप होती है जिसमें यह वर्तुल गति हो रही है।**

▶ *उदाहरण 14.4* नीचे दिए गए चित्रों में दो वर्तुल गतियां दर्शायी गई हैं। इन चित्रों पर वृत्त की त्रिज्या, घूर्णन का आवर्तकाल, आरंभिक स्थिति तथा घूर्णन की दिशा अंकित की गई है। प्रत्येक स्थिति में घूर्णी कण P के त्रिज्या सदिश के x-प्रक्षेप की सरल आवर्त गति प्राप्त कीजिए।

चित्र 14.11

हल

(a) $t = 0$ पर, OP x-अक्ष (की धनात्मक दिशा) से $45° = \pi/4$ rad का कोण बनाता है। t समय पश्चात् यह वामावर्त दिशा में $\frac{2\pi}{T}t$ rad कोण पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$ rad कोण बनाता है। समय t पर x-अक्ष पर OP के प्रक्षेप इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$T = 4$ s के लिए

$$x(t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

जो कि a आयाम, 4 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला $\frac{\pi}{4}$ rad की सरल आवर्त गति है।

(b) इस स्थिति में $t = 0$ पर, OP x-अक्ष से $90° = \pi/2$ rad का कोण बनाता है। यह दक्षिणावर्त दिशा में $\frac{2\pi}{T}t$ rad कोण पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t\right)$ rad कोण बनाता है। समय t पर x-अक्ष पर OP प्रक्षेप को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$xt = b\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= b\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$T = 30$ s के लिए,

$$x(t) = b\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

इसे इस प्रकार $x(t) = b\cos\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right)$ लिखकर इसकी समीकरण (14.4) से तुलना करने पर हमें यह ज्ञात होता है कि यह b आयाम, 30 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला $-\frac{\pi}{2}$ rad की सरल आवर्त गति को निरूपित करता है। ◀

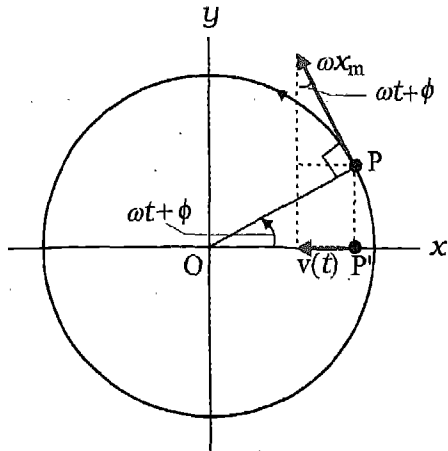
14.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण

यह सरलतापूर्वक देखा जा सकता है कि वेग **v** का परिमाण जिससे संदर्भ बिंदु P (चित्र 14.10) r त्रिज्या के वृत्त में गतिमान है, अपनी कोणीय चाल ω से इस प्रकार संबंधित है,

$$v = \omega r \tag{14.8}$$

यहां r कण P द्वारा वर्णित वृत्त की त्रिज्या है। वेग सदिश का परिमाण ωx_m है, तथा चित्र 14.11 में दर्शाए अनुसार इसके x-अक्ष पर प्रक्षेप को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

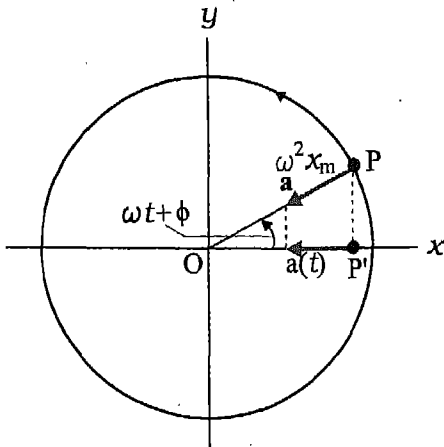
$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \tag{14.9}$$

यहां ऋणात्मक चिह्न के दृष्टिगोचर होने का कारण यह है कि P′ का वेग घटक बाईं ओर निर्दिष्ट है, जो x की ऋणात्मक दिशा है। समीकरण (14.9) कण P′ (P का प्रक्षेप) के तात्क्षणिक वेग को व्यक्त करता है। अतः *यह सरल आवर्त गति करने वाले कण के तात्क्षणिक वेग को व्यक्त करता है।* समीकरण (14.4) को समय के साथ अवकलित करके भी समीकरण (14.9) को प्राप्त किया जा सकता है।

चित्र 14.12 कण P' का वेग v(t) संदर्भ कण P, के वेग **v** *का प्रक्षेप है ।*

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad (14.10)$$

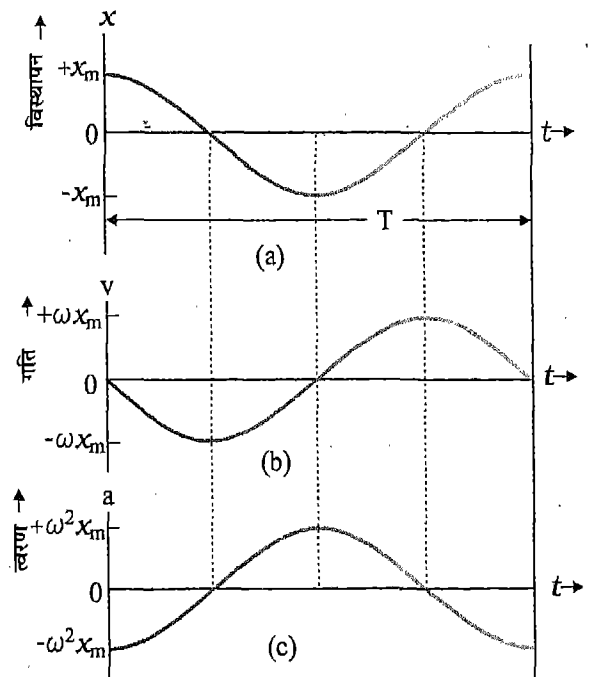
हमने देखा है कि एकसमान वर्तुल गति करते हुए किसी कण पर केंद्र की ओर निर्दिष्ट एक त्रिज्य त्वरण लगता है । चित्र 14.12 में एकसमान वर्तुल गति करते हुए संदर्भ बिंदु P का इसी प्रकार का त्रिज्य त्वरण दर्शाया गया है । इस त्रिज्य त्वरण का परिमाण $\omega^2 x_m$ है । किसी क्षण t पर इसके x-अक्ष पर प्रक्षेप को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \qquad (14.11)$$

चित्र 14.13 बिंदु P' का त्वरण a(t), संदर्भ बिंदु P के त्वरण a का प्रक्षेप होता है ।

यह कण P (कण P के प्रक्षेप)) का त्वरण है । समीकरण (14.11) सरल आवर्त गति करने वाले कण P' के तात्क्षणिक त्वरण का निरूपण करता है जो सरल आवर्त गति कर रहा है । इस प्रकार, समीकरण (14.11) सरल आवर्त गति करते किसी कण का त्वरण व्यक्त करता है । सरल आवर्त गति के लिए यह एक महत्त्वपूर्ण परिणाम है । यह व्यक्त करता है कि *सरल आवर्त गति [illegible] विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा [illegible] के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होता है* । समीकरण (14.9) को समय के साथ अवकलित करके भी समीकरण (14.11) प्राप्त किया जा सकता है

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$$

चित्र 14.14 में सरल आवर्त गति करते किसी कण के विस्थापन उसके वेग तथा त्वरण में परस्पर संबंध को देख सकते हैं । इस चित्र में, (a) $\phi = 0$ पर समीकरण (14.4) का आलेख है तथा (b) $\phi = 0$ पर ही समीकरण (14.9) को दर्शाता है । समीकरण (14.4) में जिस प्रकार विस्थापन आयाम x_m है, उसी प्रकार समीकरण (14.9) में धनात्मक राशि ωx_m वेग आयाम v_m कहलाती है । चित्र 14.14(b) में, यह देखा जा सकता है कि दोलायमान कण का वेग सीमाओं $\pm v_m = \pm \omega x_m$ के बीच विचरण करता है । ध्यान दीजिए कि $v(t)$ का वक्र $x(t)$ के वक्र से एक-चौथाई आवर्तकाल द्वारा (बाईं ओर) विस्थापित हो गया है, तथा इस प्रकार कण-वेग

चित्र 14.14 सरल आवर्त गति में कण का विस्थापन, वेग तथा त्वरण । (a) सरल आवर्त गति करते कण का कला कोण शून्य होने पर विस्थापन x(t), (b) कण का वेग v(t), (c) कण का त्वरण a(t) ।

विस्थापन से $\pi/2$ rad के कला-कोण द्वारा पीछे है; जब विस्थापन का परिमाण अधिकतम होता है, तब वेग का परिमाण अल्पतम होता है। जब विस्थापन का परिमाण अल्पमत होता है, तब वेग अधिकतम होता है। चित्र 14.14(c) में त्वरण $a(t)$ का विचरण दर्शाया गया है। यह देखा गया है कि जब विस्थापन का अधिकतम धनात्मक मान होता है, तब त्वरण का अधिकतम ऋणात्मक मान होता है, तथा जब विस्थापन का अधिकतम ऋणात्मक मान होता है तब त्वरण का अधिकतम धनात्मक मान होता है। जब विस्थापन शून्य होता है, तब त्वरण भी शून्य हो जाता है।

▶ *उदाहरण 14.5* : कोई पिंड निम्नलिखित समीकरण के अनुसार सरल आवर्त गति से दोलन करता है,

$x = (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ rad/s})\, t + \pi/4]$

$t = 1.5$ s पर, पिंड का (a) विस्थापन, (b) वेग तथा (c) त्वरण परिकलित कीजिए।

हल पिंड की कोणीय आवृत्ति $\omega = 2\pi$ rad/s तथा इसका आवर्तकाल $T = 1$ s

$T = 1.5$ s पर,

(a) विस्थापन $= (5.0 \text{ m}) \cos [(2\pi \text{ rad s}^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \frac{\pi}{4}]$

$= (5.0 \text{ m}) \cos [(3\pi + \frac{\pi}{4}) \text{ rad}]$

$= -5.0 \times 0.707 \text{ m}$

$= -3.535 \text{ m}$

(b) समीकरण (14.9) का उपयोग करने पर पिंड का वेग

$= -(5.0 \text{ m})(2\pi \text{ rad s}^{-1}) \sin [(2\pi \text{ rad s}^{-1}) \times (1.5 \text{ s} + \frac{\pi}{4})]$

$= -(5.0 \text{ m})(2\pi \text{ rad s}^{-1}) \sin [(3\pi + \frac{\pi}{4}) \text{ rad}]$

$= 10\pi \times 0.707 \text{ m/s}$

$= 22.20 \text{ m/s}$

(c) समीकरण (14.10) का उपयोग करने पर पिंड का त्वरण

$= -(2\pi \text{ rad s}^{-1})^2 \times$ विस्थापन

$= -(2\pi \text{ rad s}^{-1})^2 \times (-3.535 \text{ m})$

$= 139.56 \text{ m s}^{-2}$ ◀

14.6 सरल आवर्त गति के लिए बल नियम

अनुभाग 14.3 में हमने सरल आवर्त गति का वर्णन किया है। अब हम यह चर्चा करेंगे कि सरल आवर्त गति किस प्रकार उत्पन्न की जा सकती है। न्यूटन के गति का द्वितीय नियम किसी निकाय पर कार्यरत बल तथा तदनुरूपी उत्पन्न त्वरण के बीच संबंध प्रदान करता है। अत:, यदि हमें समय के साथ किसी कण के त्वरण में विचरण की जानकारी है, तो इस नियम का उपयोग उस बल के विषय में जानकारी के लिए किया जा सकता है जो उस कण पर लगना चाहिए ताकि उस कण में वैसा ही त्वरण उत्पन्न हो जाए। यदि हम न्यूटन के द्वितीय नियम तथा समीकरण (14.11) को संयोजित करें, तो सरल आवर्त गति के लिए हमें यह संबंध प्राप्त होता है,

$$F(t) = ma$$

$$= -m\omega^2 x(t)$$

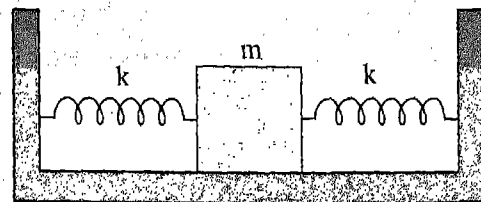
अथवा, $F(t) = -k\, x(t)$ (14.13)

यहां $k = m\omega^2$ (14.14a)

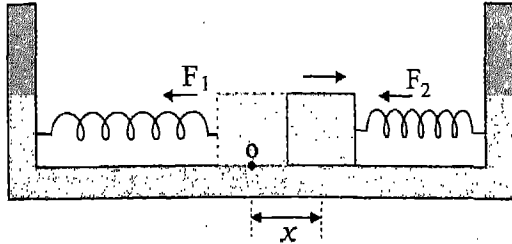
अथवा, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (14.14b)

समीकरण (14.13) से कण पर कार्यरत बल प्राप्त होता है। यह विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा विपरीत दिशा में निर्दिष्ट होता है। अत: यह एक प्रत्यानयन बल होता है। ध्यान दीजिए, प्रत्यानयन बल, एकसमान वर्तुल गति के लिए परिमाण में अचर अभिकेंद्र बल के विपरीत सरल आवर्त गति के लिए प्रत्यानयन बल समय पर निर्भर करता है। समीकरण (14.13) द्वारा व्यक्त बल नियम को सरल आवर्त गति की वैकल्पिक परिभाषा के रूप में लिया जा सकता है। इसके अनुसार : ***सरल आवर्त गति किसी कण की वह गति होती है जिसमें उस कण पर आरोपित बल उसके विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा सदैव गति के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होती है।***

चूंकि बल F विस्थापन x के अनुक्रमानुपाती होता है, x की अन्य घातों के अनुक्रमानुपाती नहीं, इस प्रकार के निकाय को रैखिक सरल आवर्ती दोलक के रूप में भी निरूपित किया जाता है। ऐसे निकाय जिनमें प्रत्यानयन बल x का अरैखिक फलन होता है, अरैखिक सरल आवर्ती दोलक कहलाते हैं।

▶ *उदाहरण 14.6* कमानी स्थिरांक k की दो सर्वसम कमानियां M संहति के किसी गुटके तथा स्थिर आधारों से चित्र में दर्शाए गए अनुसार जुड़ी हुई हैं।

चित्र 14.15

यह दर्शाइए कि जब गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से किसी ओर विस्थापित किया जाता है, तब यह सरल आवर्त गति करता है। दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से दाईं ओर x दूरी तक विस्थापित किया जाता है । इस स्थिति में बाईं ओर की कमानी x लंबाई द्वारा दीर्घित हो जाती है तथा दाईं ओर की कमानी भी उतनी ही लंबाई द्वारा संपीडित हो जाती है । तब गुटके पर कार्यरत बल

चित्र 14.16

$F_1 = -kx$ (कमानी द्वारा बाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर खींचने का प्रयास करता है ।)

$F_2 = -kx$ (कमानी द्वारा दाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर धकेलने का प्रयास करता है ।)

तब गुटके पर आरोपित नेट बल,

$$F = -2\,kx$$

अतः, गुटके पर आरोपित बल विस्थापन के अनुक्रमानुपाती तथा माध्य-स्थिति की ओर निर्दिष्ट होता है; इसलिए, गुटके की गति सरल आवर्त गति है । इसमें दोलन का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

है । ◀

14.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा

सरल आवर्त गति करते किसी कण में गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाएं होती हैं । ये दोनों ही ऊर्जाएं शून्य तथा अपने अधिकतम परिमाण के बीच विचरण करती रहती हैं ।

अनुभाग 14.5 में हमने देखा है कि सरल आवर्त गति करते किसी कण का वेग समय का आवर्ती फलन होता है । विस्थापन की चरम स्थितियों में यह शून्य होता है । अतः ऐसे कण की गतिज ऊर्जा (K), जिसे हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (14.15)$$

भी समय का आवर्ती फलन होती है जिसका परिमाण विस्थापन अधिकतम होने पर शून्य तथा कण के माध्य स्थिति पर होने पर अधिकतम होता है । ध्यान दीजिए, चूंकि गतिज ऊर्जा K में, v के चिह्न का कोई अर्थ नहीं होता, अतः K का आवर्तकाल $T/2$ है ।

सरल आवर्त गति करने वाले किसी कण की स्थितिज ऊर्जा कितनी होती है ? अध्याय 6 में हमने देखा है कि स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना केवल संरक्षी बलों के लिए ही होती है । कमानी बल $F = -kx$ एक संरक्षी बल है जिससे स्थितिज ऊर्जा संयुक्त होती है ।

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (14.16)$$

अतः सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}k\,x_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (14.17)$$

इस प्रकार, सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा भी आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल $T/2$ होता है, यह ऊर्जा माध्य स्थिति में शून्य तथा चरम विस्थापनों पर अधिकतम होती है । अतः समीकरणों (14.15) तथा (14.17) से हमें निकाय की कुल ऊर्जा E, प्राप्त होती है,

$$E = U + K$$

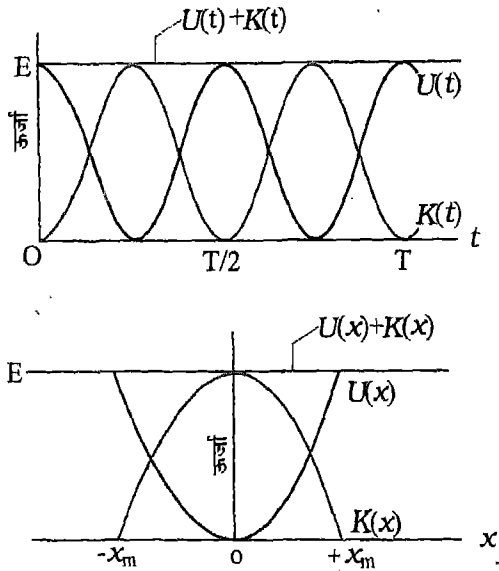
$$= \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}kx_m^2\left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right]$$

ऊपर वर्ग कोष्ठक में दी गई राशि का मान एक है, अतः हमें निम्न संबंध प्राप्त होता है,

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 \qquad (14.18)$$

जैसा कि संरक्षी बलों के अधीन गतियों के लिए आशा की जाती है किसी भी सरल आवर्ती दोलक की कुल यांत्रिक ऊर्जा कालाश्रित नहीं होती । किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक की

गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं की समय और विस्थापन पर निर्भरता चित्र 14.17 में दर्शायी गई है ।

चित्र 14.17 (a) किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक के लिए स्थितिज ऊर्जा U(t), गतिज ऊर्जा K(t) तथा कुल ऊर्जा E समय t के फलन के रूप में । सभी ऊर्जाएं धनात्मक हैं तथा प्रत्येक आवर्तकाल में स्थितिज और गतिज ऊर्जाएं दो बार शिखर पर होती हैं ।(b) आयाम x_m के किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक के लिए स्थितिज ऊर्जा U(x), गतिज ऊर्जा K(x) तथा कुल ऊर्जा E स्थिति x के फलन के रूप में । $x = 0$ के लिए समस्त ऊर्जा गतिज ऊर्जा होती है तथा $x = \pm x_m$ के लिए समस्त ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है ।

प्रेक्षणों से ज्ञात होता है कि किसी रैखिक सरल आवर्त दोलक की सभी ऊर्जाएं धनात्मक होती हैं तथा प्रत्येक आवर्तकाल में दो बार शिखर पर होती हैं । $x = 0$ के लिए समस्त ऊर्जा गतिज ऊर्जा होती है तथा $x = \pm x_m$ के लिए समस्त ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है । इन चरम स्थितियों के बीच गतिज ऊर्जा घटने से स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि होती है । किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक के इस व्यवहार से हमें यह संकेत मिलता है कि ऐसा दोलक लचीलेपन का तत्व तथा जड़त्व का तत्व धारण करता है । इसके पहले तत्व में स्थितिज ऊर्जा संचित होती है तथा बाद के तत्व में गतिज ऊर्जा संचित होती है ।

उदाहरण 14.7 1kg संहति के किसी गुटके को एक कमानी से बांधा गया है । कमानी का कमानी स्थिरांक 50 N m^{-1} है । गुटके को उसकी साम्यावस्था की स्थिति $x = 0$ से $t = 0$ पर किसी घर्षणहीन पृष्ठ पर कुछ दूरी $x = 10$ cm तक खींचा जाता है । जब गुटका अपनी माध्य-स्थिति से 5 cm दूर है, तब उसकी गतिज, स्थितिज तथा कुल ऊर्जाएं परिकलित कीजिए ।

हल गुटका सरल आवर्त गति करता है । समीकरण [14.14(b)] से इसकी कोणीय आवृत्ति

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$= \sqrt{\frac{50 \text{ N m}^{-1}}{1 \text{ kg}}}$$

$= 7.07 \text{ rad s}^{-1}$ होगी,

तब किसी समय t पर इसका विस्थापन

$x(t) = 0.1 \cos (7.07t)$ होगा ।

अतः, जब कण अपनी माध्य स्थिति से 5 cm दूर है, तब

$0.05 = 0.1 \cos (7.07t)$

अथवा $\cos (7.07t) = 0.5$, अतः $\sin (7.07t) = \sqrt{3}/2 = 0.866$

तब गुटके का $x = 5$ cm पर वेग $= 0.1 \times 7.07 \times 0.866 \text{ m s}^{-1}$

$= 0.6123 \text{ m s}^{-1}$

अतः, गुटके की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}\left[1 \times (0.6123)^2\right]$

$= 0.1874 \text{ J}$

तथा गुटके की स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}kx^2$

$= \frac{1}{2}\left(50 \text{ N m}^{-1} \times 0.05 \times 0.05 \text{ m}\right)$

$= 0.0625 \text{ J}$

$\therefore$ $x = 5$ cm पर गुटके की कुल ऊर्जा $= (0.1874 + 0.0625)$ J

$= 0.2499$ J

हम यह भी जानते हैं कि अधिकतम विस्थापन पर, गतिज ऊर्जा शून्य होती है, अतः निकाय की कुल ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है । अतः निकाय की कुल ऊर्जा,

$= \frac{1}{2}(50 \times 0.5 \times 0.5)$ J

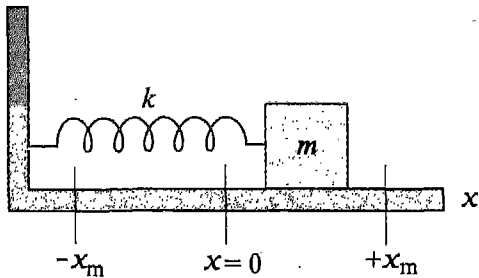
$= 0.25$ J

यह ऊर्जा 5 cm विस्थापन पर दोनों ऊर्जाओं के योग के बराबर ही है । अतः, इससे यह स्थापित होता है कि सरल आवर्त गति में कुल ऊर्जा अचर रहती है ।

14.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय

निरपेक्षत: शुद्ध सरल आवर्त गति के कोई भौतिक उदाहरण नहीं हैं । अपने व्यावहारिक जीवन में हम ऐसे निकाय देखते हैं जो किन्ही निश्चित परिस्थितियों में लगभग सरल आवर्त गति करते हैं। इस अनुभाग में इसके पश्चात् हम ऐसे ही कुछ निकायों की गतियों की चर्चा करेंगे ।

14.8.1 कमानी के दोलन

सरल आवर्त गति का सरलतम प्रेक्षण योग्य उदाहरण, चित्र 14.18 की भांति, किसी कमानी के एक सिरे से जुड़े m संहति के किसी गुटके के छोटे दोलन होते हैं। कमानी का दूसरा सिरा एक दृढ़ दीवार से जुड़ा होता है । गुटके को किसी घर्षणरहित पृष्ठ पर रखते हैं । यदि गुटके को एक ओर थोड़ा खींचकर छोड़ दें, तो वह किसी माध्य स्थिति पर इधर-उधर गति करने लगता है। मान लीजिए $x = 0$ गुटके के केंद्र की उस स्थिति को सूचित करता है जब कमानी विश्रांत अवस्था में है । चित्र में अंकित स्थितियां $-x_m$ तथा $+x_m$ माध्य स्थिति से बाईं तथा दाईं ओर के अधिकतम विस्थापनों को इंगित करती हैं । हम पहले ही पढ़ चुके हैं कि कमानियों में विशेष गुण होते हैं, जिन्हें

चित्र 14.18 एक रैखिक सरल आवर्ती दोलक जिसमें m संहति का एक गुटका किसी कमानी से जुड़ा है । गुटका एक घर्षण रहित पृष्ठ पर गति करता है । एक बार किसी ओर खींचकर छोड़ने पर गुटका सरल आवर्त गति करता है ।

सर्वप्रथम एक अंग्रेज भौतिकीवेत्ता रॉबर्ट हुक ने खोजा था । उन्होंने दर्शाया कि जब ऐसे किसी निकाय को विरूपित किया जाता है, तो उस पर एक प्रत्यानयन बल लगता है, जिसका परिमाण विरूपण अथवा विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा यह विपरीत दिशा में कार्य करता है । इसे हुक का नियम (अध्याय 9) कहते हैं । यह नियम तब भलीभांति लागू होता है जब विस्थापन कमानी की लंबाई की तुलना में काफी कम होते हैं । किसी समय t पर, यदि गुटके का उसकी माध्य स्थिति से विस्थापन x है, तो गुटके पर कार्यरत बल F इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$F(x) = -kx \qquad (14.19)$$

यहां k आनुपातिकता स्थिरांक है जिसे कमानी-स्थिरांक कहते हैं, तथा इसका मान कमानी के प्रत्यास्थ गुणों से ज्ञात किया जाता है । किसी दृढ़ कमानी के लिए k का मान अधिक तथा कोमल कमानी के k का मान कम होता है । समीकरण (14.19), सरल आवर्त गति के लिए बल-नियम के समान है, अत: यह निकाय सरल आवर्त गति करता है । समीकरण (14.14) से हमें यह संबंध प्राप्त होता है,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (14.20)$$

तथा दोलक का आवर्तकाल, T इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (14.21)$$

समीकरणों (14.20) तथा (14.21) से हमें यह ज्ञात होता है कि यदि गुटका हल्का (m का मान कम) तथा कमानी दृढ़ (k अधिक) है, तो कोणीय आवृत्ति अधिक तथा आवर्तकाल कम होता है ।

▶ ***उदाहरण 14.8*** 500 N m^{-1} कमानी स्थिरांक की किसी कमानी से 5 kg संहति का कोई कॉलर जुड़ा है जो एक क्षैतिज छड़ पर बिना किसी घर्षण के सरकता है । कॉलर को उसकी साम्यावस्था की स्थिति से 10.0 cm विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है । कॉलर के (a) दोलन का आवर्तकाल (b) अधिकतम चाल तथा (c) अधिकतम त्वरण परिकलित कीजिए ।

हल (a) समीकरण (14.21) के अनुसार दोलन का आवर्त काल होता है :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{5.0\,\text{kg}}{500\,\text{Nm}^{-1}}}$$

$$= \frac{2\pi}{10\,\text{s}^{-1}}$$

$$= 0.628\,\text{s}$$

(b) सरल आवर्त गति करते कॉलर का वेग इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$v(t) = -x_m \omega \sin(\omega t + \phi)$

अत: अधिकतम चाल,

$$v_m = x_m \omega$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{500\,\text{Nm}^{-1}}{5\,\text{kg}}}$$

$$= 1\text{ms}^{-1}$$

(c) साम्यावस्था की स्थिति से $x(t)$ विस्थापन पर कॉलर का त्वरण इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$= -\frac{k}{m}x(t)$$

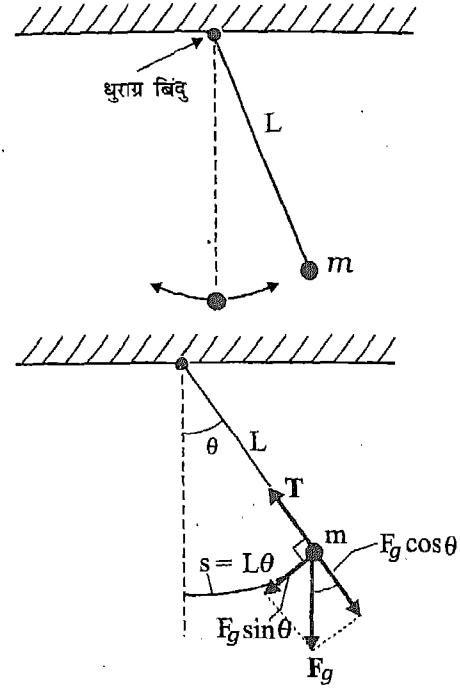
अत: अधिकतम त्वरण

$$a_{max} = \omega^2 x_m$$

$$= \frac{500\,\text{Nm}^{-1}}{5\,\text{kg}} \times 0.1\text{m}$$

$$= 10\text{ m s}^{-2}$$ ◀

14.8.2 सरल लोलक

यह कहा जाता है कि गैलीलियो ने किसी चर्च में एक दोलायमान झाड़फानूस का आवर्तकाल अपनी नाड़ी की स्पंद गति द्वारा मापा था। उसने यह निष्कर्ष निकाला कि झाड़फानूस की गति आवर्ती है। यह निकाय लोलक का ही एक प्रकार होता है। लगभग 1 मीटर लंबे न खिंचने वाले धागे को लेकर उसके एक सिरे से पत्थर का टुकड़ा बांधकर आप भी अपना एक लोलक बना सकते हैं। अपने लोलक को किसी उचित टेक से बांधकर इस प्रकार लटकाइए कि वह स्वतंत्रतापूर्वक दोलन कर सके। पत्थर के टुकड़े को कम दूरी तक विस्थापित करके छोड़ दीजिए। पत्थर इधर-उधर गति करने लगता है। पत्थर की यह गति आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल लगभग 2 सेकंड होता है। क्या इसकी गति सरल आवर्त गति है ? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हम एक ऐसे **सरल लोलक** के बारे में विचार करते हैं जो m द्रव्यमान के कण (जिसे लोलक का गोलक कहते हैं) को किसी L लंबाई की द्रव्यमानहीन, न खिंच सकने योग्य डोरी के एक सिरे से बांधकर लटकाने से बनता है [देखिए चित्र 14.17(a)]। यह गोलक पृष्ठ के तल में इधर-उधर, धुराग्र बिंदु से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा के बाएं और दाएं दोलन करने के लिए स्वतंत्र होता है।

चित्र 14.19 (a) सरल लोलक, (b) गोलक पर कार्यरत बल है– गुरुत्व बल, $\mathbf{F}_g (=m\,\mathbf{g})$ तथा डोरी में तनाव $\mathbf{T}$। यहां गुरुत्व बल $\mathbf{F}_g$ का स्पर्शरेखीय घटक एक प्रत्यानयन बल है जो लोलक को वापस उसकी केंद्रीय स्थिति पर लाने का प्रयास करता है।

चित्र 14.19 (b) में दर्शाए अनुसार गोलक पर कार्यरत बल है– डोरी में तनाव $\mathbf{T}$, तथा गुरुत्व बल $\mathbf{F}_g (=mg)$। डोरी ऊर्ध्वाधर से कोण θ बनाती है। हम बल $\mathbf{F}_g$ का वियोजन त्रिज्य घटक $F_g \cos\theta$ तथा स्पर्शरेखीय घटक $F_g \sin\theta$ में कर सकते हैं। चूंकि डोरी की लंबाई के अनुदिश कोई गति नहीं होती। अत: त्रिज्य घटक डोरी के तनाव को निरसित कर देता है। स्पर्शरेखीय घटक लोलक के धुराग्र बिंदु के परित: एक प्रत्यानयन बल आघूर्ण उत्पन्न करता है। यह बल आघूर्ण सदैव ही गोलक के विस्थापन के विपरीत कार्य करता है ताकि वह गोलक को उसकी केंद्रीय अवस्थिति की ओर वापस ला सके। गोलक की केंद्रीय अवस्थिति को **साम्यावस्था की स्थिति** (θ = 0) कहते हैं, क्योंकि यदि लोलक दोलन नहीं करता तो वह इसी स्थिति पर विराम करता है। प्रत्यानयन बल आघूर्ण τ को इस प्रकार व्यक्त करते हैं

$$\tau = -L\,(F_g \sin\theta) \qquad (14.22)$$

यहां ऋण चिह्न यह सूचित करता है कि बल आघूर्ण τ θ को घटाने का कार्य करता है, तथा L धुराग्र बिंदु के परितः बल $F_g \sin\theta$ की आघूर्ण भुजा है । घूर्णी गति के लिए

$$\tau = I\alpha \qquad (14.23)$$

यहां I धुराग्र बिंदु के परितः लोलक का घूर्णी जड़त्व है तथा α उसी बिंदु के परितः कोणीय त्वरण है । समीकरणों (14.22) तथा (14.23) से

$$-L(F_g \sin\theta) = I\alpha \qquad (14.24)$$

F_g का परिमाण, अर्थात् mg का मान रखने पर

$$-L(mg\sin\theta) = I\alpha$$

अथवा $$\alpha = \frac{-mgL\sin\theta}{I} \qquad (14.25)$$

यदि हम यह मानें कि विस्थापन θ छोटा है, तो समीकरण (14.25) को सरल बना सकते हैं । हम जानते हैं कि $\sin\theta$ को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots \qquad (14.26)$$

अब यदि θ (रेडियन में व्यक्त किया जाता है) छोटा है, तो $\sin\theta$ का सन्निकटन θ द्वारा किया जा सकता है । ऐसी परिस्थिति के समीकरण (14.25) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\alpha = \frac{-mgL}{I}\theta \qquad (14.27)$$

सारणी 14.1 में हमने कोण θ को अंशों में, इसके तुल्यांक रेडियनों में, तथा फलन $\sin\theta$ के मान सूचीबद्ध किए हैं । सारणी से यह देखा जा सकता है कि θ के 10 अंश तक बड़े मानों के लिए $\sin\theta$ के मान लगभग वही होते हैं जैसे θ को **रेडियनों में व्यक्त** करने पर मिलते हैं

सारणी 14.1 : $\sin\theta$ कोण θ के फलन के रूप में

θ (अंशों में)	θ (रेडियनों में)	$\sin\theta$
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.256
20	0.349	0.342

समीकरण (14.27) समीकरण (14.11) का कोणीय तुल्य रूप है, तथा यह बताती है कि लोलक का कोणीय त्वरण कोणीय विस्थापन θ के अनुक्रमानुपाती, परंतु चिह्न में विपरीत होता है । इस प्रकार, जैसे ही लोलक दाईं ओर गति करता है, इसका त्वरण बाईं ओर तब तक बढ़ता है जब तक यह रुककर बाईं ओर वापस लौटना आरंभ नहीं करता । इसी प्रकार, जब लोलक बाईं ओर गति करता है तो इसका दाईं ओर का त्वरण इसे दाईं ओर वापस लौटने का प्रयास करता है तथा यह क्रम लोलक के इधर-उधर सरल आवर्त गति करते समय चलता रहता है । अधिक परिशुद्ध रूप में यह कहा जा सकता है कि **लघु कोणों में दोलन करते सरल लोलक की गति सन्निकट सरल आवर्त गति होती है** । लघु कोणों की इस बाध्यता को हम यह कहकर व्यक्त कर सकते हैं कि गति का कोणीय विस्थापन θ_m लघु होना चाहिए ।

समीकरण (14.27) की समीकरण (14.11) से तुलना करने पर हम यह देखते हैं कि लोलक की कोणीय आवृत्ति,

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

तथा लोलक का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (14.28)$$

सरल लोलक का समस्त द्रव्यमान गोलक की द्रव्यमान m में केंद्रित होता है, जो कि धुराग्र बिंदु से दूरी L पर होता है । अतः इस निकाय के लिए हम $I = mL^2$ लिख सकते हैं । I के इस मान को समीकरण (14.28) में रखने पर

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (14.29)$$

समीकरण (14.29) किसी सरल लोलक के आवर्तकाल के लिए एक सरल व्यंजक निरूपित करती है ।

▶ ***उदाहरण 14.9*** उस सरल लोलक की लंबाई क्या है, जो हर सेकंड के बाद टिक करता है ?

हल समीकरण (14.29) से किसी सरल लोलक का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

इस संबंध से हमें प्राप्त होता है,

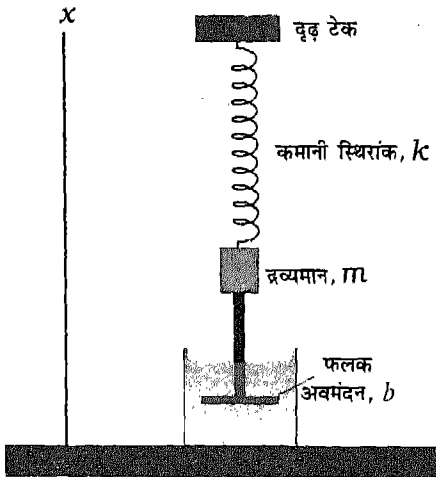
$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

हर एक सेकंड के बाद टिक करने वाले सरल लोलक का आवर्तकाल T, 2 s होता है । अतः $g = 9.8\ \text{m s}^{-2}$ तथा $T = 2$ s के लिए सरल लोलक की लंबाई

$$L = \frac{9.8\,(\text{m s}^{-2}) \times 4\,(\text{s}^2)}{4\pi^2}$$

$$= 0.99\ \text{m}$$

14.9 अवमंदित सरल आवर्त गति

हम जानते हैं कि वायु में दोलन करने वाले किसी सरल लोलक की गति धीरे-धीरे समाप्त हो जाती है । ऐसा क्यों होता है ? इसका कारण यह है कि वायु का कर्षण बल तथा टेक पर घर्षण बल लोलक की गति का विरोध करते हैं जिससे धीरे-धीरे इसका ऊर्जा-क्षय होता रहता है । लोलक के इस प्रकार के दोलनों को अवमंदित दोलन कहते हैं । अवमंदित दोलनों में यद्यपि निकाय की ऊर्जा का धीरे-धीरे क्षय होता रहता है तथापि आभासी रूप से दोलन आवर्ती रहते हैं । व्यापक रूप में क्षयकारी बल घर्षण बल ही होते हैं । इस प्रकार के बाह्य बलों का किसी दोलक की गति पर प्रभाव समझने के लिए आइए चित्र 14.20 में दर्शाए किसी निकाय पर विचार करें । इसमें k कमानी-स्थिरांक की एक कमानी से m द्रव्यमान का एक गुटका ऊर्ध्वाधरत: दोलन करता है । गुटके के साथ छड़ की सहायता से एक फलक जुड़ा है (छड़ तथा फलक को भारहीन मानते हैं)। फलक किसी द्रव में डूबा है । जब गुटका ऊपर-नीचे दोलन करता है तब फलक भी गुटके के साथ द्रव

अवमंदित सरल आवर्त दोलक । द्रव में डूबी फलक ऊपर-नीचे दोलन करते गुटके पर अवमंदन बल आरोपित करती है ।

में गति करता है। फलक के ऊपर-नीचे गति से द्रव विस्थापित होता है जो फिर रोकने योग्य कर्षण बल (श्यान कर्षण) फलक पर आरोपित* करता है, इस प्रकार समस्त दोलायमान निकाय पर यह बल आरोपित होता है । समय के साथ गुटका-कमानी निकाय की यांत्रिक ऊर्जा, ऊर्जा के द्रव तथा फलक की ऊष्मीय ऊर्जा में स्थानांतरित होने के कारण, घटती जाती है ।

मान लीजिए कि द्रव द्वारा निकाय पर आरोपित अवमंदन बल $\mathbf{F}_d$ है । इसका परिमाण फलक और गुटके के वेग $\mathbf{v}$ के अनुक्रमानुपाती है (एक ऐसी संकल्पना जो तभी सही है जब फलक की गति मंद हो) । तब x-अक्ष के अनुदिश गति के लिए (चित्र 14.18 में दर्शाए अनुसार ऊर्ध्वाधर दिशा),

$$\mathbf{F}_d = -b\,\mathbf{v} \qquad (14.30)$$

यहां b **अवमंदन स्थिरांक** है जो द्रव के अभिलक्षणों तथा फलक की प्रकृति पर निर्भर करता है । ऋण चिह्न यह दर्शाता है कि यह गति का विरोध करता है ।

कमानी के कारण गुटके पर लगा बल $\mathbf{F}_s = -k\mathbf{x}$ । तब x-अक्ष के अनुदिश बलों के घटकों के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर

$$m\,\mathbf{a}(t) = -k\,\mathbf{x}(t) - b\,\mathbf{v}(t) \qquad (14.31)$$

$\mathbf{v}(t)$ के लिए $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ तथा $\mathbf{a}(t)$ के लिए $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$ प्रतिस्थापित करने तथा समीकरण (14.31) को पुन: व्यवस्थित करने पर,

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + b\frac{d\mathbf{x}}{dt} + k\,\mathbf{x} = 0 \qquad (14.32)$$

समीकरण (14.32) का हल अवमंदन बल $\mathbf{F}_d$ के प्रभाव में गुटके की गति का वर्णन करता है । इस समीकरण का हल हम अवकल गणित अथवा अंकिक विधि द्वारा प्राप्त कर सकते हैं। इस समीकरण का हल इस रूप में होता है,

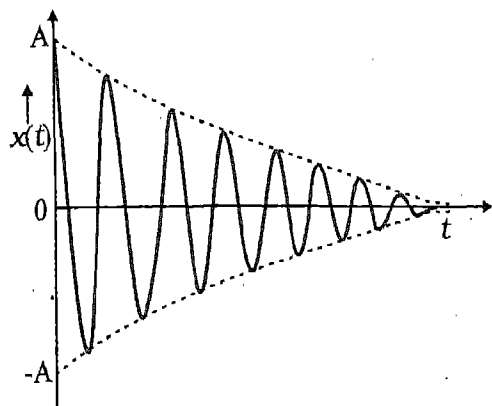
$$x(t) = x_m\, e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi) \qquad (14.33)$$

यहां x_m आयाम है तथा अवमंदित दोलक की कोणीय आवृत्ति ω' इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (14.34)$$

इस फलन में, कोज्या (cos) फलन का आवर्तकाल $2\pi/\omega'$ है परंतु यह फलन वस्तुत: आवर्ती नहीं है क्योंकि कारक $e^{-bt/2m}$ समय के साथ निरंतर घटता है । फिर भी यदि एक आवर्तकाल T में घटोतरी कम है, तो समीकरण (14.33) द्वारा निरूपित गति सन्निकट रूप से आवर्ती है ।

समीकरण (14.33) द्वारा दर्शाए गए हल को चित्र 14.28 में दिए अनुसार ग्राफीय निरूपण द्वारा दर्शाया जा सकता है । इसे हम एक कोज्या फलन की भांति मान सकते हैं जिसका आयाम $x_m e^{-bt/2m}$ समय के साथ धीरे-धीरे घटता है ।

*गुरुत्व के प्रभाव में गुटका डोरी पर किसी निश्चित साम्यावस्था की स्थिति x पर होगा । यहां x उस भाग के विस्थापन को निरूपित करता है ।

चित्र 14.21 अवमंदित आवर्ती दोलनों में विस्थापन समय के फलन के रूप में।

यदि $b=0$ (कोई अवमंदन नहीं), तब समीकरण (14.33) तथा (14.34) घटकर समीकरण (14.4) तथा [14.14(b)] बन जाती हैं, जो किसी अनवमंदित दोलक के विस्थापन तथा कोणीय आवृत्ति के लिए व्यंज़क हैं। हम देख चुके हैं कि किसी अनवमंदित दोलक की यांत्रिक ऊर्जा अचर रहती है तथा इसे समीकरण (14.18) ($E = \frac{1}{2} k x_m^2$) द्वारा व्यक्त किया जाता है। यदि दोलक में अवमंदन है, तो यांत्रिक ऊर्जा अचर नहीं होती, परंतु समय के साथ घटती है। यदि अवमंदन लघु है, तो हम समीकरण (14.18) में x_m के स्थान पर अवमंदित दोलनों के लिए आयाम $x_m e^{-bt/2m}$ लिखकर यांत्रिक ऊर्जा $E(t)$ ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है,

$$E(t) = \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m} \qquad (14.35)$$

समीकरण (14.35) यह दर्शाता है कि निकाय की कुल ऊर्जा समय के साथ चरघातांकी रूप में घटती है। ध्यान दीजिए, लघु अवमंदन का तात्पर्य यह है कि विमाहीन अनुपात $\left(\frac{b}{\sqrt{km}}\right)$ का मान 1 से बहुत कम है।

> **उदाहरण 14.10** : चित्र 14.20 में दर्शाए अवमंदित दोलक के लिए गुटके का द्रव्यमान $m = 200$ g, $k = 90$ N m^{-1} तथा अवमंदन स्थिरांक $b = 40$ g s^{-1} है। (a) दोलन का आवर्तकाल, (b) वह समय जिसमें यांत्रिक ऊर्जा अपने आरंभिक मान की आधी रह जाती है, परिकलित कीजिए।

हल चूंकि $b = (40 \text{ g s}^{-1}) << \sqrt{km} (= 4.24 \text{ kg s}^{-1})$, अतः समीकरण (14.34) से आवर्तकाल :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.2 \text{ kg}}{90 \text{ N m}^{-1}}}$$

$$= 0.3 \text{ s}$$

(b) अब, समीकरण (14.33) से, वह समय, $T_{1/2}$ जिसमें आयाम घटकर अपने आरंभिक आयाम का आधा रह जाता है,

$$T_{1/2} = -2\pi \frac{\ln(1/2)}{b/2m}$$

$$= \frac{0.693}{40} \times 2 \times 200 \text{s}$$

$$= 6.93 \text{ s}$$

(c) वह समय $t_{1/2}$, जिसमें दोलन की यांत्रिक ऊर्जा घटकर अपने आरंभिक मान की आधी रह जाती है, परिकलित करने के लिए हमें समीकरण (14.35) की सहायता लेनी होती है। इस समीकरण से,

$$E(t_{1/2})/E(0) = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

अथवा $$\frac{1}{2} = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

$$\ln(1/2) = -(bt_{1/2}/m)$$

अथवा $$t_{1/2} = \frac{0.693}{40 \text{ g s}^{-1}} \times 200 \text{ g}$$

$$= 3.46 \text{ s}$$

14.10 प्रणोदित दोलन तथा अनुनाद

किसी ऐसे झूले पर झूलता कोई व्यक्ति जिसे कोई धक्का नहीं मिल रहा है अथवा लोलक जिसे विस्थापित करके छोड़ दिया गया हो, मुक्त दोलनों के उदाहरण हैं। इन दोनों स्थितियों में दोलनों का आयाम धीरे-धीरे कम होगा और अंततः निकाय रुक जाएगा। सदैव उपस्थित रहने वाले क्षय-बलों के कारण व्यवहार में मुक्त दोलनों को बनाए नहीं रखा जा सकता। वे अनुभाग 14.9 में किए गए वर्णन के अनुसार अवमंदित हो जाते हैं। परंतु झूला झूलते समय यदि आप अपने पैरों से फर्श को धक्का देकर आवर्ती बल आरोपित करें, तो आप यह पाते हैं कि न केवल अब दोलनों को अनुरक्षित किया जा सकता है वरन् उनका आयाम भी बढ़ाया जा सकता है। इन अवस्थाओं के अंतर्गत झूले में **प्रणोदित**, अथवा **परिचालित दोलन** होते हैं। उस

स्थिति में जब कोई निकाय किसी सरल आवर्त बल के कार्यरत होने के कारण प्रणोदित दोलन करता है, तब दो कोणीय आवृत्तियां महत्त्वपूर्ण हैं : (1) निकाय की **प्राकृतिक** कोणीय आवृत्ति ω, यह वह कोणीय आवृत्ति होती है जिससे वह साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापित करके मुक्त छोड़ने पर दोलन करता है, तथा (2) प्रणोदित दोलन उत्पन्न करने वाले बाह्य बल की कोणीय आवृत्ति ω_d ।

मान लीजिए किसी अवमंदित दोलक पर कोई समय के साथ विचरण करने वाला आवर्ती बाह्य बल $F(t)$ आरोपित किया जाता है । इस बल को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$F(t) = F_0 \cos \omega_d t \qquad (14.36)$$

समीकरण (14.36) द्वारा निरूपित किसी कण का रैखिक प्रत्यानयन बल, अवमंदित बल तथा कालाश्रित प्रणोदित बल के संयोजी प्रभाव के अंतर्गत गति को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$m\, a(t) = -k\, x(t) - bv(t) + F_o \cos \omega_d t \qquad (14.37a)$$

समीकरण (14.37a) में त्वरण को d^2x/dt^2 द्वारा प्रतिस्थापित तथा उसे पुनर्व्यवस्थित करने पर,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos \omega_d t \qquad (14.37b)$$

समीकरण (14.37b) का विश्लेषिक हल केवल अवकल गणित द्वारा ही प्राप्त किया जा सकता है । इससे यह ज्ञात होता है कि अवमंदन के कारण मुक्त दोलनों की समाप्ति के पश्चात् प्रणोदित दोलक परिचालन बल की कोणीय आवृत्ति ω_d से दोलन करता है जिसका विस्थापन निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त होता है,

$$x(t) = x_m \cos (\omega_d t + \phi) \qquad (14.38)$$

आयाम x_m कोणीय आवृत्तियों ω_d तथा ω का फलन है जिसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

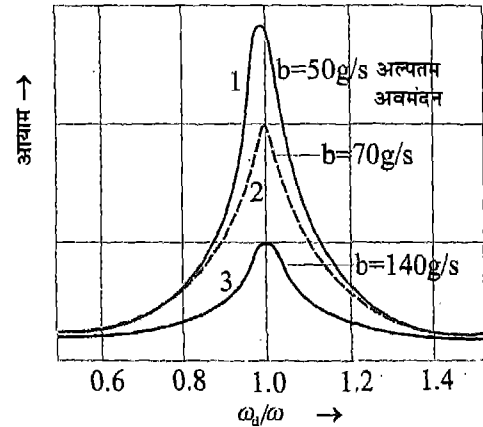
$$x_m = \frac{F_o}{m\left\{\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)^2 + \omega_d^2 b^2\right\}^{1/2}} \qquad (14.39)$$

तथा $\tan \phi = \frac{-v_o}{\omega_d x_o}$

लघु अवमंदनों के लिए समीकरण (14.39) घट कर इस प्रकार हो जाता है

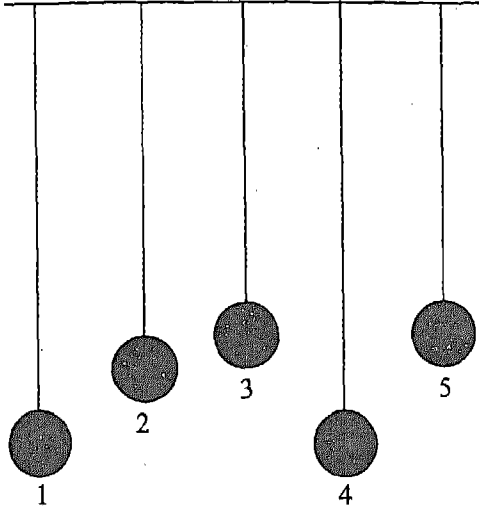
$$x_m = \frac{F_o}{m\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)}$$

यहां m कण का द्रव्यमान तथा v_0 और x_0 समय $t = 0$ पर कण के क्रमशः वेग और विस्थापन हैं । समीकरण (14.39) दर्शाता है कि आयाम परिचालन बल की कोणीय आवृत्ति पर निर्भर करता है । यदि यह आवृत्ति निकाय की प्राकृतिक आवृत्ति से अत्यधिक भिन्न है, तो दोलनों का आयाम बहुत छोटा होगा । जैसे-जैसे ω_d का मान ω के मान की ओर उपगमन करता है, आयाम बढ़ता जाता है । जब $\omega_d = \omega$, तो समीकरण (14.39) में हर लघु अवमंदन के लिए कम होता है तथा दोलनों का आयाम बहुत बड़ा होता है । यह परिघटना **अनुनाद** कहलाती है ।

चित्र 14.22 में निकाय में उपस्थित विभिन्न सीमाओं के अवमंदक बलों के लिए किसी दोलक के विस्थापन आयाम की परिचालन बल की कोणीय आवृत्ति पर निर्भरता दर्शायी गई है। ध्यान दीजिए, तीनों परिस्थितियों में $\omega_d/\omega = 1$ होने पर ही आयाम अधिकतम होता है । इस चित्र के वक्र यह दर्शाते हैं कि अवमंदन कम होने पर ऊंचा और संकीर्ण **अनुनादी** ऊर्जा शिखर प्राप्त होता है ।

चित्र 14.22 प्रणोदित दोलक का आयाम परिचालन बल की कोणीय आवृत्ति के फलन के रूप में । $\omega_d/\omega = 1$ पर आयाम अधिकतम है, जो अनुनाद की शर्त होती है। तीनों वक्र निकाय में उपस्थित अवमंदन की विभिन्न सीमाओं के तदनुरूपी हैं । वक्र 1 तथा 3 निकाय में अल्पतम तथा अधिकतम अवमंदन के तदनुरूपी हैं ।

अपने दैनिक जीवन में हमें अनुनाद से संबंधित परिघटनाएं देखने को मिलती हैं । झूलों से झूलने का हमारा अनुभव अनुनाद का अच्छा उदाहरण है । आपने यह अनुभव किया होगा कि झूले को अधिक ऊंचाई तक झुलाने की कुशलता धरती पर जोर लगाने की लय को झूले की प्राकृतिक आवृत्ति के समकालिक बनाने में है ।

इस तथ्य की और अधिक व्याख्या करने के लिए मान लीजिए चित्र 14.23 की भांति एक ही डोरी से वर्गीकृत लंबाइयों के 5 सरल लोलक लटकाये गए हैं । लोलक 1 व 4 की लंबाइयां समान हैं तथा अन्य तीनों की लंबाइयां भिन्न-भिन्न हैं।

अब हम लोलक 1 को गतिमान बनाते हैं। संबद्ध डोरी से होकर ऊर्जा इस लोलक से अन्य लोलकों को स्थानांतरित होती है, फलस्वरूप वे दोलन करने लगते हैं। संबद्ध डोरी द्वारा परिचालन बल प्रदान किया जाता है। इस परिचालन बल की आवृत्ति लोलक 1 के दोलन की आवृत्ति के समान होती है। यदि हम लोलकों 2, 3 तथा 5 की अनुक्रियाओं का अवलोकन करें, तो हम यह पाते हैं कि आरंभ में वे सभी विभिन्न आयामों से अपनी-अपनी प्राकृतिक आवृत्तियों के दोलन करते हैं, परंतु

चित्र 14.23 एक ही डोरी से निलंबित 5 सरल लोलकों का निकाय।

ये गतियां अत्यधिक अवमंदित होती हैं और कायम नहीं रह पातीं। धीरे-धीरे उनके दोलन की आवृत्तियां परिवर्तित होती हैं और अंत में वे लोलक 1 की आवृत्ति अर्थात् परिचालन बल की आवृत्ति से भिन्न-भिन्न आयामों से दोलन करते हैं। ये दोलन आयाम छोटे होते हैं किन्तु लोलक 4 की अनुक्रिया अन्य तीनों लोलकों से विपरीत होती है। यह लोलक 1 की ही आवृत्ति से दोलन करता है परंतु इसका आयाम धीरे-धीरे बढ़ता हुआ अत्यधिक हो जाता है। अनुनाद की भांति अनुक्रिया दिखाई देती है। ऐसा होने का कारण यह है कि यहां अनुनाद की शर्त, अर्थात् निकाय की प्राकृतिक आवृत्ति परिचालन बल की आवृत्ति के संपाती होनी चाहिए, संतुष्ट होती है।

सभी यांत्रिक संरचनाओं की एक या अधिक प्राकृतिक आवृत्तियां होती हैं, तथा यदि किसी संरचना पर कोई प्रबल बाह्य परिचालन बल आरोपित है जिसकी आवृत्ति संरचना की किसी एक प्राकृतिक आवृत्ति से सुमेलित है तो संरचना में उत्पन्न परिणामी दोलन उस संरचना को भंग कर सकते हैं। टाकोम नैरोज ब्रिज जो कि पुगेट साउंड, वाशिंगटन, संयुक्त राज्य अमेरिका में स्थित है, को 1 जुलाई सन् 1940 को यातायात के लिए खोला गया। चार माह पश्चात्, पवनों द्वारा उत्पन्न स्पंदमान परिणामी बल की आवृत्ति और ब्रिज की प्राकृतिक आवृत्ति में अनुनाद हो गया। जिसके कारण ब्रिज के दोलनों के आयाम में स्थायी वृद्धि हो गई और अंत में ब्रिज टूट गया। यही कारण है कि जब परेड करते हुए चलने वाले सिपाही किसी ब्रिज को पार करते हैं, तब कदम-ताल मिलाकर चलने का क्रम तोड़ देते हैं। वायुयान अभिकल्पनाकार यह सुनिश्चित करते हैं कि उड़ान के दौरान इंजन की आवृत्ति का पंखे के दोलन की किसी भी संभावित प्राकृतिक आवृत्ति से सुमेल न हो। भूकंपों से अत्यधिक विनाश होता है। ध्यान देने योग्य एक रोचक बात यह है कि कभी-कभी किसी भूकंप से छोटी या ऊंची इमारतें प्रभावित नहीं होतीं, जबकि मध्यम ऊंचाई की इमारतें धराशायी हो जाती हैं। इसका कारण यह है कि कम ऊंचाई की इमारतों की प्राकृतिक आवृत्ति भूकंपी तरंगों की आवृत्ति से अधिक होती है जबकि ऊंची इमारतों की प्राकृतिक आवृत्ति भूकंपी तरंगों की आवृत्ति से अपेक्षाकृत कम होती है।

14.11 युग्मित दोलन

अब तक हमने जिन दोलायमान दोलकों की चर्चा की है वे सरल थे; जिनकी स्वातंत्रता की कोटि केवल एक थी, अर्थात् जिनकी गति किसी एक रेखा अथवा तल तक सीमित थी जिसमें केवल एक ही चर था, उदाहरणार्थ, सरल लोलक, की गति में केवल एक ही चर, कोण θ होता है। परंतु प्रकृति में दोलायमान निकायों के ऐसे बहुत से मनमोहक उदाहरण हैं जिनमें दो स्वतंत्रता की कोटि होती हैं। इसके अत्यन्त मनोरम उदाहरणों में अणु तथा मूल कण सम्मिलित होते हैं। इसके कुछ सरल उदाहरण हैं—द्विक लोलक (एक लोलक छत से संबद्ध, दूसरा पहले लोलक के गोलक से संबद्ध); कमानी द्वारा युग्मित दो लोलक, दो मनके लगी डोरी, तथा दो युग्मित LC परिपथ। इस प्रकार के निकाय के विन्यास का वर्णन करने के लिए दो चर, मान लिजिए ψ_a तथा ψ_b (ग्रीक वर्णमाला का अक्षर जिसका उच्चारण 'साइ' है) लेते हैं। ऐसे निकायों की व्यापक गति का स्वरूप बहुत जटिल हो सकता है; इनका कोई भी भाग सरल आवर्त गति नहीं करता। परन्तु, बहुत-सी परिस्थितियों में दो युग्मित दोलकों के निकाय के छोटे दोलनों का वर्णन दो स्वतंत्र सरल आवर्त गतियों जो समक्षणिक हों, के अध्यारोपण के रूप में, किया जा सकता है। ये दो सरल आवर्त गतियां **प्रसामान्य विधा** अथवा **विधा** कहलाती हैं। कुछ उचित आरंभी शर्तों के द्वारा हम निकाय को केवल एक विधा अथवा दूसरी विधा में दोलन करा सकते हैं। इस प्रकार, यद्यपि गतिमान भाग युग्मित हैं तथापि विधाएं युग्मित नहीं हैं।

जब केवल एक ही विधा उपस्थित होती है, तब प्रत्येक गतिशील भाग सरल आवर्त गति करता है। सभी भाग समान आवृत्ति से दोलन करते हैं। सभी भाग एक ही क्षण अपनी-अपनी साम्यावस्था की स्थिति से गुजरते हैं। इस प्रकार, उदाहरण के लिए, एकल विधा में किसी भी निकाय के दो चर ऐसे नहीं हो सकते, $\psi_a(t) = A\cos\omega_1 t$ तथा $\psi_b(t) = B\cos\omega_2 t$ (विभिन्न कला-स्थिरांक) अथवा $\psi_a(t) = A\cos\omega_1 t$ तथा $\psi_b(t) = B\cos\omega_2 t$

(विभिन्न आवृत्तियां)। इसके विपरीत, एक विधा (मान लीजिए विधा 1) के लिए निकाय के दोनों चरों की दोनों स्वतंत्रता की कोटियों के लिए समान आवृत्तियां तथा समान कला-स्थिरांक होते हैं जिन्हें इस प्रकार व्यक्त करते हैं

$$\psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (14.40a)$$

$$\psi_b(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = \frac{B_1}{A_1}\psi_a(t) \quad (14.40b)$$

इसी प्रकार, विधा 2 के लिए, दो स्वतंत्रता की कोटियां a तथा b निम्न संबंधों के अनुसार गतियां करती हैं,

$$\psi_a(t) = A_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2) \quad (14.41a)$$

$$\psi_b(t) = B_2 \cos(\omega_2 t+\phi_2) = \frac{B_2}{A_2}\,\psi_a(t) \quad (14.41b)$$

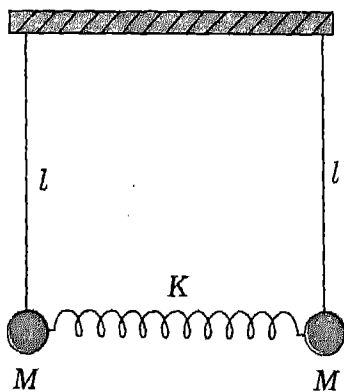
प्रत्येक विधा की अपनी अभिलाक्षणिक आवृत्ति होती है: विधा 1 के लिए ω_1, विधा 2 के लिए ω_2। प्रत्येक विधा में निकाय का एक अभिलाक्षणिक 'विन्यास' अथवा 'आकृति' होती है, जो गतिशील भागों की गतियों के आयामों के अनुपात द्वारा प्रदान की जाती है : विधा 1 के लिए $\frac{A_1}{B_1}$, विधा 2 के लिए $\frac{A_2}{B_2}$।

निकाय की अति व्यापक गति दोनों विधाओं के समक्षणिक दोलनों का अध्यारोपण मात्र होती है :

$$\psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (14.42a)$$

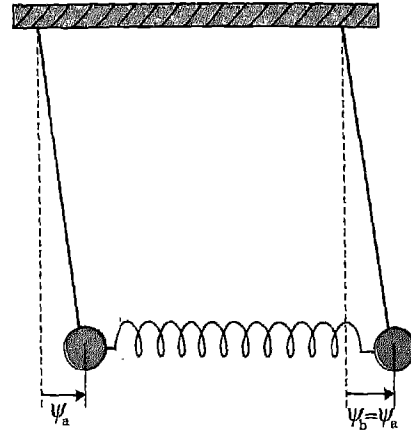
$$\psi_b(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (14.42b)$$

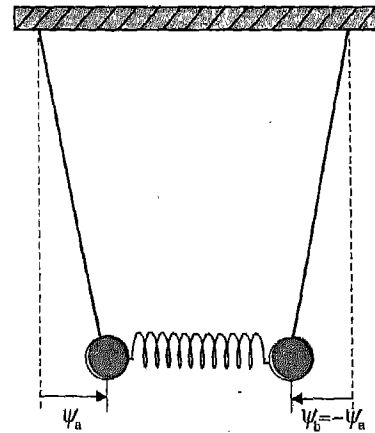
अब तक जो कुछ कहा गया है उसकी व्याख्या के लिए एक विशिष्ट उदाहरण लेते हैं।

मान लीजिए कि सर्वसम लोलकों के एक निकाय को चित्र 14.24(a) में दर्शाए अनुसार किसी कमानी द्वारा युग्मित किया गया है। इस निकाय की दो प्रसामान्य विधाओं की विवेचना आसानी से की जा सकती है। विधा 1 में चित्र 14.24(b) में दर्शाए

चित्र 14.24(a) दो युग्मित सर्वसम लोलकों का साम्यावस्था विन्यास।

अनुसार दोनों चर समान हैं अर्थात् $\psi_a(t) = \psi_b(t)$। इस विधा में युग्मित करने वाली कमानी को हटाया भी जा सकता है; प्रत्यानयन बल पूर्णतः गुरुत्व बल के कारण है। इस विधा के लिए

$$\text{विधा 1 : } \omega_1^2 = \frac{g}{l},\ \psi_a = \psi_b \quad (14.43)$$

विधा 2 में, $\psi_a = -\psi_b$, यह स्थिति चित्र 14.24(b) में दर्शायी गई है। बाईं ओर के गोलक पर विचार कीजिए। कमानी के कारण

चित्र 14.24(b) युग्मित सर्वसम लोलक, निम्न आवृत्ति की विधा।

प्रत्यानयन बल $2k\psi_a$ (यहां गुणक 2 लगाने का कारण यह है कि इस विधा में जब गोलक a को ψ_a द्वारा विस्थापित करते हैं, तो

चित्र 14.24(c) युग्मित सर्वसम लोलक, उच्च आवृत्ति की विधा।

कमानी $2\psi_a$ संपीडित होती है) लगता है। गुरुत्व बल के कारण प्रत्यानयन बल $Mg\theta = Mg\psi_a/l$। कमानी तथा गुरुत्व बल एक ही दिशा में कार्य करते हैं। इस प्रकार प्रति एकांक विस्थापन प्रति द्रव्यमान है :

विधा 2 : $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{M}$, $\psi_a = -\psi_b$ (14.44)

अब हम निकाय के वास्तविक व्यवहार का अध्ययन करना चाहते हैं । हम जानते हैं कि प्रत्येक विधा किसी दी गई आवृत्ति के सरल आवर्त दोलन होती है । निकाय की वास्तविक अनुक्रिया व्यापक अध्यारोपण से प्राप्त की जा सकती है,

$\psi_a = \psi_1 + \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ (14.45a)

$\psi_b = \psi_1 - \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ (14.45b)

सरलता की दृष्टि से हम आरंभिक शर्तें इस प्रकार चुनते हैं ताकि $A_1 = A_2$ तथा $\phi_1 = \phi_2 = 0$ हो । इस चुनाव के अनुसार समीकरण (14.45) से हमें प्राप्त होता है,

$$\psi_a(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$$

$$= 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$$

$$= (2A\cos\omega_{mod}t)\cos\omega_{av}t$$

$$= A_{mod}(t)\cos\omega_{av}t, \quad (14.46a)$$

यहां $\omega_{mod} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$, $\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

तथा $A_{mod}(t) = (2A\cos\omega_{mod}t)$

$$\psi_b(t) = A\cos\omega_1 t - A\cos\omega_2 t$$

$$= 2A\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

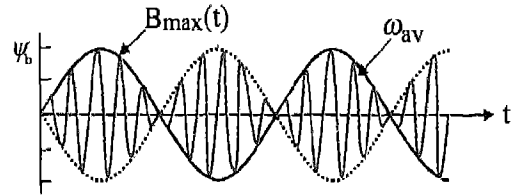
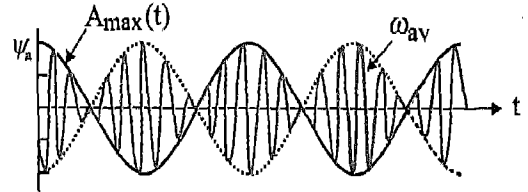
$$= (2A\sin\omega_{mod}t)\sin\omega_{av}t$$

$$= B_{mod}(t)\sin\omega_{av}t, \quad (14.46b)$$

यहां ω_{mod} तथा ω_{av} उपरोक्त परिभाषानुसार हैं तथा $B_{mod}(t) = (2A \sin\omega_{mod}t)$ । समीकरण (14.46) द्वारा निरूपित गति की कल्पना करने के लिए हम आरंभिक शर्तें इस प्रकार लगाते हैं कि $t = 0$ पर, गोलक का आरंभिक विस्थापन तथा वेग इस प्रकार व्यक्त हों,

$$\psi_a(0) = 2A, \psi_b(0) = 0, \text{ तथा } \frac{d}{dt}[\psi_a(0)] = 0, \frac{d}{dt}[\psi_b(0)] = 0$$

अत: हम गोलक a को विस्थापन $2A$ पर, गोलक b को शून्य पर थाम कर रखते हैं, तथा दोनों गोलकों को विराम की स्थिति से एक साथ मुक्त करते हैं, यह परिस्थिति $t = 0$ पर है ।

इसके पश्चात् हम केवल अवलोकन करते हैं । एक मनोहारी प्रक्रिया प्रकट होती है । दोनों लोलकों में जो गति होती है वह चित्र 14.23(a) में दर्शायी गई है । दोनों ही लोलक एक कोणीय आवृत्ति ω_{av} से दोलन करते हैं परंतु उनका ढंग बड़ा रोचक होता है । धीरे-धीरे लोलक a के दोलनों का आयाम घटता है जबकि लोलक b के दोलनों का आयाम बढ़ता है तथा यह उस समय

चित्र 14.25 लोलकों a तथा b के विस्थापन $\psi_a(t)$, तथा $\psi_b(t)$

तक होता है जब तक अंततः लोलक a विरामावस्था में न आ जाए तथा लोलक b उस आयाम और ऊर्जा से दोलन न करने लगे जिससे लोलक a ने दोलन प्रारंभ किया था । कंपन ऊर्जा एक लोलक से दूसरे लोलक में पूर्णतः स्थानांतरित हो जाती है । निकाय की सममिति द्वारा हम यह पाते हैं कि यह प्रक्रिया सतत रहती है । कंपन ऊर्जा a और b के बीच अग्र और पश्च प्रवाहित होती रहती है । दोनों लोलकों के दोलनों के आयाम कोणीय आवृत्ति $(\omega_1 - \omega_2)$ से विचरण करते हैं । आयाम अथवा सादुलन के विचरण की इस परिघटना को विस्पंद कहते हैं तथा आवृत्ति $(\omega_1 - \omega_2)$, विस्पंद आवृत्ति को निर्दिष्ट करती है । इस परिघटना के बारे में हम अगले अध्याय में अधिक विस्तार से चर्चा करेंगे ।

इस प्रकार हमने देखा कि दो सर्वसम युग्मित लोलकों का निकाय जटिल रूप से दोलन करता है, कुल मिलाकर संपूर्ण निकाय आवृत्ति गति करता है परंतु यह सरल आवर्त गति नहीं होती । इसके घटक कोणीय आवृत्ति ω_{av} से तीव्र दोलन करते हैं तथा इस गति पर विस्पंदों का बनना अध्यारोपित होता है ।

सारांश

1. वे गतियां जो स्वयं दोहराती हैं **आवर्ती गतियां** कहलाती हैं ।

2. एक दोलन अथवा चक्र को पूरा करने के लिए आवश्यक समय T को **आवर्तकाल** कहते हैं । यह आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित है,

$$T = \frac{1}{\nu}$$

किसी आवर्ती अथवा दोलनी गति की *आवृत्ति* उसके द्वारा 1 सेकंड में पूरे किए गए दोलनों की संख्या होती है । SI मात्रक पद्वति में इसे हर्ट्ज़ में मापा जाता है;

1 हर्ट्ज़ = 1Hz = 1 दोलन प्रति सेकंड = $1 s^{-1}$

3. सरल आवर्त गति में, किसी कण का उसकी साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापन $x(t)$ इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(विस्थापन)}$$

यहां x_m **विस्थापन का आयाम** $(\omega t + \phi)$ **गति की कला** तथा ϕ **कला स्थिरांक** है । कोणीय आवृत्ति ω गति के आवर्तकाल तथा आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित होती है

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad \text{(कोणीय आवृत्ति)}$$

4. सरल आवर्त गति, एकसमान वर्तुल गति के उस वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप होती है, जिस पर गति हो रही है ।

5. सरल आवर्त गति के समय कण के वेग तथा त्वरण को समय t के फलन के रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \quad \text{(वेग)}$$

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 x(t) \quad \text{(त्वरण)}$$

यहां, धनात्मक राशि ωx_m गति का **वेग आयाम** v_m है तथा धनात्मक राशि $\omega^2 x_m$ गति का **त्वरण आयाम** a_m है ।

6. सरल आवर्त गति किसी कण की वह गति होती है जिसमें उस कण पर कोई ऐसा बल आरोपित रहता है, जो कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती, तथा सदैव गति के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होता है ।

7. सरल आवर्त गति करते किसी कण में, किसी भी क्षण, गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$ तथा स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}Kx^2$ होती हैं । यदि काई घर्षण न हो, तो निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा, $E = K + U$ सदैव ही अचर रहती है यद्यपि K और U परिवर्तित होते हैं ।

8. m द्रव्यमान का कोई कण जो हुक के नियम के अनुसार लगे प्रत्यानयन बल $F = -kx$ के प्रभाव में दोलन करता है, सरल आवर्त गति दर्शाता है जिसके लिए,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(कोणीय आवृत्ति)}$$

तथा

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(आवर्तकाल)}$$

ऐसे निकाय को रैखिक दोलक भी कहते हैं ।

9. लघु कोणों में दोलन करते सरल लोलक की गति सन्निकट सरल आवर्त गति होती है । इसका आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

10. किसी भी वास्तविक दोलायनमान निकाय की यांत्रिक ऊर्जा दोलन करते समय घट जाती है क्योंकि बाह्य बल जैसे कर्षण दोलनों को रोकते हैं तथा यांत्रिक ऊर्जा को ऊष्मीय ऊर्जा में स्थानांतरित कर देते हैं । तब वास्तविक दोलक तथा उसकी गति को **अवमंदित गति** कहते हैं । यदि **अवमंदन बल** $\mathbf{F}_d = -bv$ है, यहां v दोलक का वेग तथा b **अवमंदन स्थिरांक है**, तब दोलक का विस्थापन,

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi)$$

यहां ω', अवमंदित दोलनों की कोणीय आवृत्ति है जिसे इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

यदि अवमंदन स्थिरांक का मान कम है, तो $\omega' \approx \omega$, यहां ω अवमंदित दोलक की कोणीय आवृत्ति है । दोलक की यांत्रिक ऊर्जा E को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$E(t) = \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}$$

11. यदि प्राकृतिक कोणीय आवृत्ति ω के किसी दोलायमान निकाय पर ω_d कोणीय आवृत्ति का कोई बाह्य आवर्ती बल आरोपित किया जाए, तो वह निकाय ω_d कोणीय आवृत्ति से दोलन करता है । इन दोलनों का आयाम तब अधिक होता है जब,

$$\omega_d = \omega$$

जो **अनुनाद** की शर्त होती है ।

12. एक दूसरे से युग्मित दो दोलक, जैसे एक कमानी द्वारा युग्मित दो सर्वसम सरल लोलक, युग्मित दोलकों का एक समुच्चय बनाते हैं । ऐसे निकाय की व्यापक गति जटिल होती है जिसका कोई भी भाग सरल आवर्त गति नहीं करता । अधिकांश प्रकरणों में इसका वर्णन दो स्वतंत्र सरल आवर्त गतियों, जिन्हें प्रसामान्य विधाएं कहते हैं और जिनकी कोणीय आवृत्तियां ω_1 तथा ω_2 होती हैं, के अध्यारोपण के रूप में किया जाता है । इसके घटक ω_{av} कोणीय आवृत्ति से तीव्र दोलन करते हैं तथा इस गति पर विस्पंदों का बनना अध्यारोपित होता है। विस्पंद आवृत्ति $\omega_1 - \omega_2$ होती है ।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएं	मात्रक	टिप्पणी
आवर्तकाल	T	[T]	s	गति की स्वयं पुनरावृत्ति के लिए न्यूनतम समय
आवृत्ति	f या ν	[T⁻¹]	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
कोणीय आवृत्ति	ω	[T⁻¹]	s^{-1}	$= 2\pi\nu$
कला नियतांक	ϕ	विमाहीन	रेडियन	सरल आवर्त गति में विस्थापन की कला का आरंभिक मान
बल नियतांक	k	[MT⁻²]	N m⁻¹	सरल आवर्त गति में $F = -kx$

विचारणीय विषय

1. आवर्तकाल T वह ***न्यूनतम समय*** होता है जिसके पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है। इस प्रकार, समय अंतराल nT के पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है, यहां n कोई पूर्णांक है।

2. प्रत्येक आवर्ती गति सरल आवर्त गति नहीं होती। केवल वही आवर्ती गति जो बल-नियम $f = -kx$ द्वारा नियंत्रित होती है, सरल आवर्त गति होती है।

3. वर्तुल गति व्युत्क्रम-वर्ग नियम बल (जैसे ग्रहीय गति में) तथा द्विमा में सरल आवर्त बल $-m\omega^2 r$ के कारण उत्पन्न हो सकती है। बाद के प्रकरण में, गति की कलाएं, दो लंबवत् दिशाओं (x तथा y) में $\pi/2$ rad द्वारा भिन्न होनी चाहिए। इस प्रकार, कोई कण जिसकी आरंभिक स्थिति (o, a) तथा वेग $(\omega a, o)$ है $-m\,\omega^2 r$ बल आरोपित किए जाने पर a त्रिज्या के वृत्त में एकसमान वर्तुल गति करेगा।

4. ω के किसी दिए गए मान की रैखिक सरल आवर्त गति के लिए दो यादृच्छिक आरंभिक शर्तें आवश्यक हैं और ये शर्तें गति को पूर्णतः निर्धारित करने के लिए पर्याप्त हैं। ये आवश्यक शर्तें हो सकती हैं (i) आरंभिक स्थिति तथा आरंभिक वेग, अथवा (ii) आयाम तथा कला, अथवा (iii) ऊर्जा तथा कला।

5. उपरोक्त बिंदु (4) से, दिए गए आयाम अथवा ऊर्जा गति की कला का निर्धारण आरंभिक स्थिति अथवा आरंभिक वेग द्वारा किया जाता है।

6. यादृच्छिक आयामों तथा कलाओं वाली दो सरल आवर्त गतियों का संयोजन व्यापक रूप में आवर्ती नहीं होता। यह केवल तभी आवर्ती होता है जब एक गति की आवृत्ति दूसरी गति की आवृत्ति की पूर्णांक गुणज हो। तथापि, किसी आवर्ती गति को सदैव ही उपयुक्त आयामों की अनंत सरल आवर्त गतियों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (फूरिए श्रेणी : परिशिष्ट 14.1 देखिए)।

7. सरल आवर्त गति का आवर्तकाल आयाम अथवा ऊर्जा अथवा कला नियतांक पर निर्भर नहीं करता। गुरुत्वाकर्षण के अधीन ग्रहीय कक्षों के आवर्तकाल इसके विपरीत हैं (केप्लर का तृतीय नियम)।

8. किसी सरल लोलक की गति केवल लघु कोणीय विस्थापन के लिए ही सरल आवर्त गति होती है; तुल्यता के आधार पर लोलक की लंबाई की तुलना में गति का आयाम बहुत कम होना चाहिए।

9. किसी कण की गति यदि सरल आवर्त गति है, तो उसके विस्थापन को निम्न रूपों में से किसी एक रूप में व्यक्त किया जाना चाहिए :

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t;$$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha);\; x = B\sin(\omega t + \beta)$$

ये तीनों रूप पूर्णतः समतुल्य हैं (किसी भी एक रूप को अन्य दो रूपों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।)

इस प्रकार अवमंदित सरल आवर्त गति समीकरण (14.31) सही अर्थों में सरल आवर्त गति नहीं होती। यह केवल $2m/b$ से बहुत छोटे समय अन्तरालों के लिए ही सन्निकटतः सरल आवर्त गति होती है, यहां b अवमंदन नियतांक है।

10. प्रणोदित दोलनों में, कण की स्थायी अवस्था गति (प्रणोदित दोलनों की समाप्ति के पश्चात्) एक ऐसी सरल आवर्त गति होती है जिसकी आवृत्ति उस कण की प्राकृतिक आवृत्ति ω नहीं होती वरन् प्रणोदित दोलन उत्पन्न करने वाले बाह्य बल की आवृत्ति ω_d होती है।

11. अवमंदन न होने की स्थिति में अनुनाद पर सरल आवर्त गति का आयाम अनंत होता है। यह कोई समस्या नहीं है, क्योंकि सभी वास्तविक निकायों में कुछ न कुछ अवमंदन अवश्य ही होता है, चाहे यह छोटा ही क्यों न हो।

12. प्रणोदित दोलनों के अधीन, कण की सरल आवर्त गति की कला प्रणोदित दोलन उत्पन्न करने वाले बाह्य बल की कला से भिन्न होती है।

अभ्यास

14.1 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन आवर्ती गति को निरूपित करता है ?

(i) किसी तैराक द्वारा नदी के एक तट से दूसरे तट तक जाना और अपनी एक वापसी यात्रा पूरी करना।

(ii) किसी स्वतंत्रतापूर्वक लटकाए गए दंड चुंबक को उसकी N-S दिशा से विस्थापित कर छोड़ देना।

(iii) अपने द्रव्यमान केंद्र के परितः घूर्णी गति करता कोई हाइड्रोजन अणु।

(iv) किसी कमान से छोड़ा गया तीर।

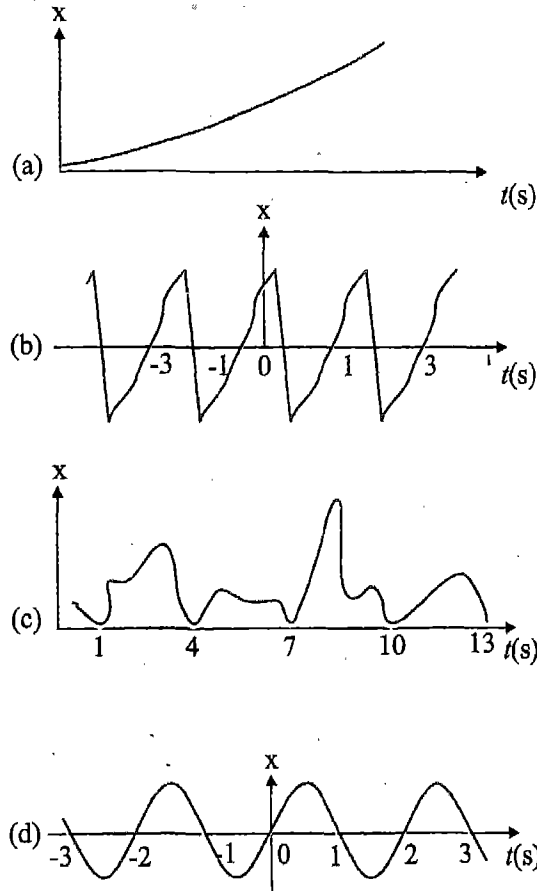
14.2 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन (लगभग) सरल आवर्त गति को तथा कौन आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं निरूपित करते हैं ?

(i) पृथ्वी की अपने अक्ष के परितः घूर्णन गति।

(ii) किसी U नली में दोलायमान पारे के स्तंभ की गति।

(iii) किसी चिकने वक्रीय कटोरे के भीतर एक बॉल बेयरिंग की गति जब उसे निम्नतम बिंदु से कुछ ऊपर के बिंदु से मुक्त रूप से छोड़ा जाए।

(iv) किसी बहुपरमाणुक अणु की अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर व्यापक कंपन।

14.3 चित्र 14.27 में किसी कण की रैखिक गति के लिए कुछ x-t आरेख दिए गए हैं। इनमें से कौन-सा आरेख आवर्ती गति का निरूपण करता है ? उस गति का आवर्तकाल क्या है (आवर्ती गति वाली गति का)।

चित्र 14.27

14.4 नीचे दिए गए समय के फलनों में कौन (a) सरल आवर्त गति (b) आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं, तथा (c) अनावर्ती गति का निरूपण करते हैं। प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए : (ω कोई धनात्मक अचर है।)

(i) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(ii) $\sin^3 \omega t$

(iii) $3 \cos (\frac{\pi}{4} - 2\omega t)$

(iv) $\cos \omega t + \cos 3\omega t + \cos 5\omega t$

(v) $\exp(-\omega^2 t^2)$

(vi) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

14.5 कोई कण एक दूसरे से 10 cm दूरी पर स्थित दो बिंदुओं A तथा B के बीच रैखिक सरल आवर्त गति कर रहा है। A से B की ओर की दिशा को धनात्मक दिशा मानकर वेग, त्वरण तथा कण पर लगे बल के चिह्न ज्ञात कीजिए जबकि यह कण

(i) A सिरे पर है,

(ii) B सिरे पर है,

(iii) A की ओर जाते हुए AB के मध्य बिंदु पर है,

(iv) A की ओर जाते हुए B से 2 cm दूर है,

(v) B की ओर जाते हुए A से 3 cm दूर है, तथा

(vi) A की ओर जाते हुए B से 4 cm दूर है।

14.6 नीचे दिए गए किसी कण के त्वरण a तथा विस्थापन x के बीच संबंधों में से किससे सरल आवर्त गति संबद्ध है :

(i) $a = 0.7x$

(ii) $a = -200x^2$

(iii) $a = -10x$

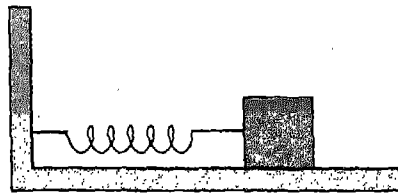
(iv) $a = 100x^3$

14.7 सरल आवर्त गति करते किसी कण की गति का वर्णन नीचे दिए गए विस्थापन फलन द्वारा किया जाता है,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

यदि कण की आरंभिक ($t = 0$) स्थिति 1 cm तथा उसका आरंभिक वेग π cm s^{-1} है, तो कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या है ? कण की कोणीय आवृत्ति π s^{-1} है। यदि सरल आवर्त गति का वर्णन करने के लिए कोज्या (cos) फलन के स्थान पर हम ज्या (sin) फलन चुनें; $x = B \sin(\omega t + \alpha)$, तो उपरोक्त आरंभिक प्रतिबंधों में कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या होगा ?

14.8 किसी कमानीदार तुला का पैमाना 0 से 50 kg तक के पाठ्यांक पढ़ता है। पैमाने की लंबाई 20 cm है। इस तुला से लटकाया कोई पिण्ड, जब विस्थापित करके मुक्त किया जाता है, 0.6 s के आवर्तकाल से दोलन करता है। पिंड का भार कितना है ?

14.9 1200 N m^{-1} कमानी-स्थिरांक की कोई कमानी चित्र 14.28 में दर्शाए अनुसार किसी क्षैतिज मेज से जड़ी है। कमानी के

चित्र 14.28

मुक्त सिरे से 3 kg द्रव्यमान का कोई पिंड जुड़ा है। इस पिंड को एक ओर 2.0 cm दूरी तक खींच कर मुक्त किया जाता है,

(i) पिंड के दोलन की आवृत्ति,

(ii) पिंड का अधिकतम त्वरण, तथा

(iii) पिंड की अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए।

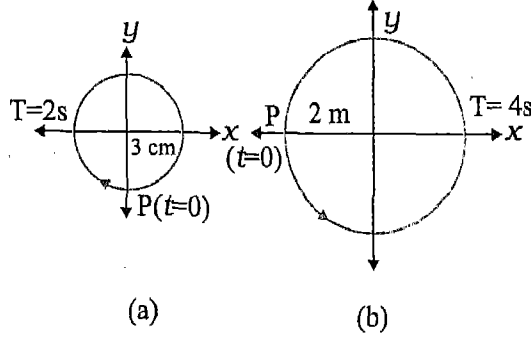
14.10 अभ्यास 14.9 में, मान लीजिए जब कमानी अतानित अवस्था में है तब पिंड की स्थिति $x = 0$ है तथा बाएं से दाएं की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा है। दोलन करते पिंड के विस्थापन x को समय के फलन के रूप मे दर्शाइए, जबकि विराम घड़ी को आरंभ ($t = 0$) करते समय पिंड,

(i) अपनी माध्य स्थिति,

(ii) अधिकतम तानित स्थिति, तथा

(iii) अधिकतम संपीडन की स्थिति पर है।

सरल आवर्त गति के लिए ये फलन एक दूसरे से आवृत्ति में, आयाम में अथवा आरंभिक कला में किस रूप में भिन्न हैं ?

14.11 चित्र 14.29 में दिए गए दो आरेख दो वर्तुल गतियों के तदनुरूपी हैं। प्रत्येक आरेख पर वृत्त की त्रिज्या, परिक्रमण-काल, आरंभिक स्थिति और परिक्रमण की दिशा दर्शायी गई है। प्रत्येक प्रकरण में, परिक्रमण करते कण के त्रिज्या-सदिश के x-अक्ष पर प्रक्षेप की तदनुरूपी सरल आवर्त गति ज्ञात कीजिए।

चित्र 14.29

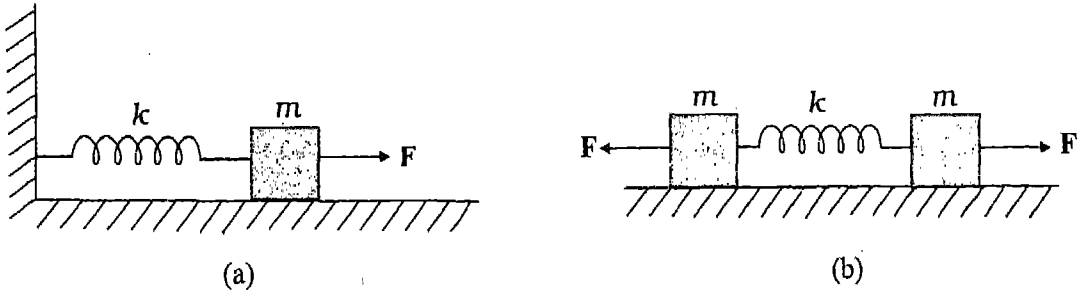
14.12 नीचे दी गई प्रत्येक सरल आवर्त गति के लिए तदनुरूपी निर्देश वृत्त का आरेख खींचिए। घूर्णी कण की आरंभिक ($t = 0$) स्थिति, वृत्त की त्रिज्या तथा कोणीय चाल दर्शाइए। सुगमता के लिए प्रत्येक प्रकरण में परिक्रमण की दिशा वामावर्त लीजिए। (x को cm में तथा t को s में लीजिए।)

(i) $x = -2 \sin (3t + \pi/3)$

(ii) $x = \cos (\pi/6 - t)$

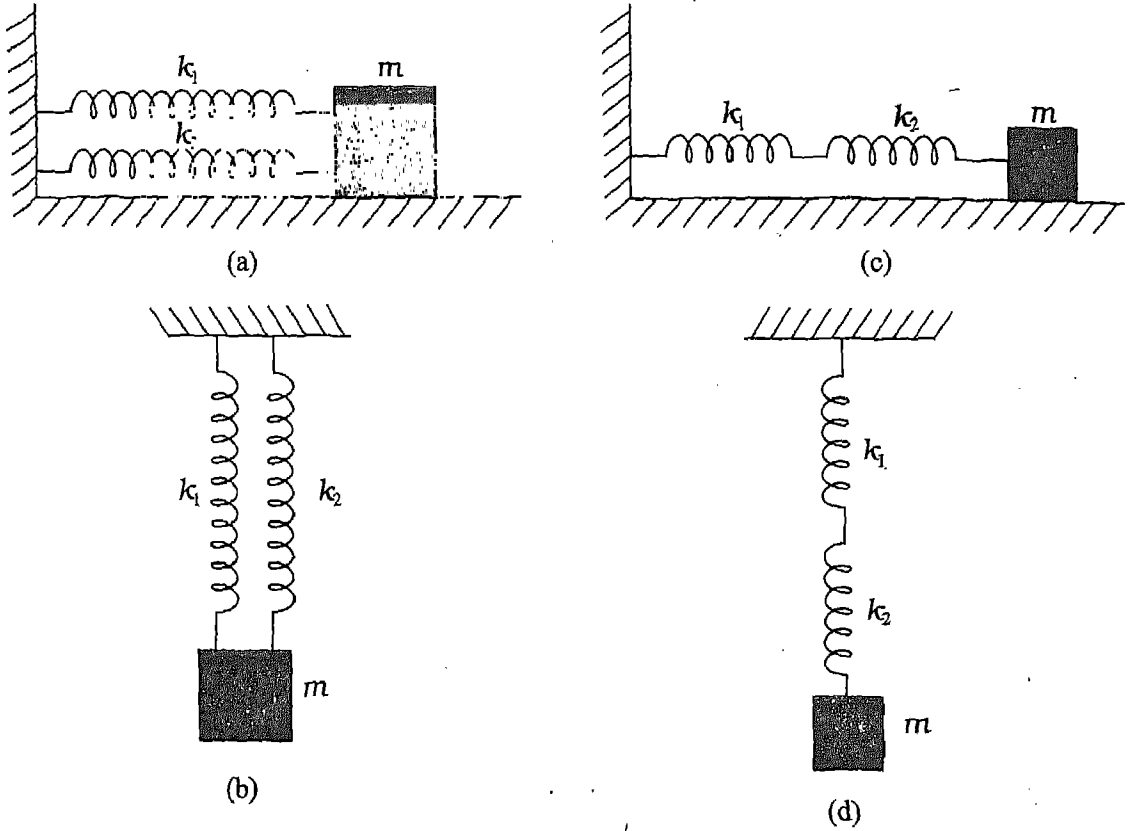
(iii) $x = 3 \sin (2\pi t + \pi/4)$

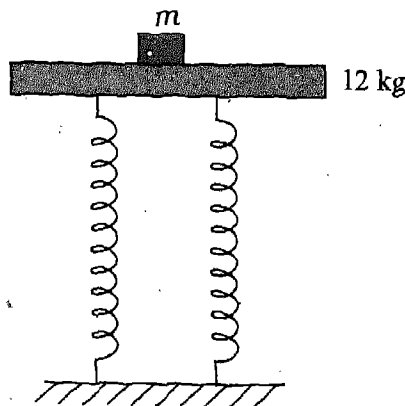
(iv) $x = 2 \cos \pi t$

14.13 चित्र 14.30(a) में k बल-स्थिरांक की किसी कमानी के एक सिरे को किसी दृढ़ आधार से जकड़ा तथा दूसरे मुक्त सिरे से एक द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के मुक्त सिरे पर बल F आरोपित करने से कमानी तन जाती है। चित्र 14.30(b) में उसी कमानी के दोनों मुक्त सिरों से द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के दोनों सिरों को चित्र 14.30 में समान बल **F** द्वारा तानित किया गया है।

चित्र 14.30

(i) दोनों प्रकरणों में कमानी का अधिकतम विस्तार क्या है?

(ii) यदि (a) का द्रव्यमान तथा (b) के दोनों द्रव्यमानों को मुक्त छोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक प्रकरण का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

14.14 चित्र 14.31 में कमानियों की चार भिन्न व्यवस्थाएं दर्शायी गई हैं । यदि प्रत्येक व्यवस्था में द्रव्यमान m को उसकी साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापित करके मुक्त कर दिया जाए, तो प्रत्येक प्रकरण में कंपन की परिणामी आवृत्ति क्या होगी ? कमानी के द्रव्यमान को नगण्य मानिए । चित्र (a) तथा (b) में कमानियों का संयोजन पार्श्वक्रम में तथा (c) और (d) में श्रेणीक्रम में निरूपित किया गया है ।

चित्र 14.31

14.15 चित्र 14.32 में दर्शाए अनुसार 12 kg द्रव्यमान की कोई ट्रे दो सर्वसम कमानियों पर टिकी है । यदि ट्रे को थोड़ा नीचे दबाकर मुक्त छोड़ दिया जाए तो वह 1.5 s आवर्त काल से सरल आवर्त गति करती है । प्रत्येक कमानी का कमानी स्थिरांक क्या है ? ट्रे पर m द्रव्यमान का गुटका रखने पर सरल आवर्त गति का आवर्तकाल 3.0 s हो जाता है । गुटके का द्रव्यमान क्या है ?

चित्र 14.32

14.16 किसी रेलगाड़ी के इंजन के सिलिंडर हैड में पिस्टन का स्ट्रोक (आयाम का दो गुना) 1.0 m का है । यदि पिस्टन 200 प्रक्रिमण प्रति मिनट की कोणीय आवृत्ति से सरल आवर्त गति करता है, तो उसकी अधिकतम चाल कितनी है ?

14.17 चंद्रमा के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण $1.7\ m\ s^{-2}$ है । यदि किसी सरल लोलक का पृथ्वी के पृष्ठ पर आवर्तकाल 3.5 s है, तो उसका चंद्रमा के पृष्ठ पर आवर्तकाल कितना होगा ? (पृथ्वी के पृष्ठ पर $g = 9.8\,m\,s^{-2}$)

14.18 निचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किसी कण की सरल आवर्त गति के आवर्तकाल का मान उस कण के द्रव्यमान तथा बल-स्थिरांक पर निर्भर करता है : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ । कोई सरल लोलक सन्निकट सरल आवर्त गति करता है । तब फिर किसी लोलक का आवर्त काल लोलक के द्रव्यमान पर निर्भर क्यों नहीं करता ?

(b) किसी सरल लोलक की गति छोटे कोण के सभी दोलनों के लिए सन्निकट सरल आवर्त गति होती है । बड़े कोणों के दोलनों के लिए एक अधिक गूढ़ विश्लेषण यह दर्शाता है कि T का मान $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ से अधिक होता है । इस परिणाम को समझने के लिए किसी गुणात्मक कारण का चिंतन कीजिए ।

(c) कोई व्यक्ति हाथ में कलाई घड़ी बांधे किसी मीनार की चोटी से गिरता है । क्या मुक्त रूप से गिरते समय उसकी घड़ी यथार्थ समय बताती है ?

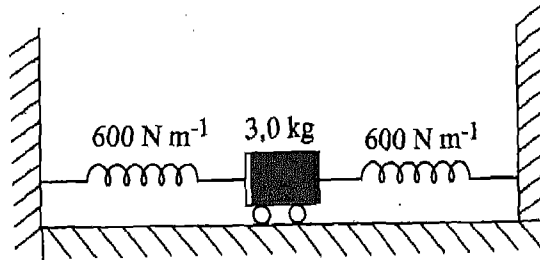
(d) गुरुत्व बल के अंतर्गत मुक्त रूप से गिरते किसी केबिन में जड़े सरल लोलक के दोलन की आवृत्ति क्या होती है ?

14.19 किसी कार की छत से l लंबाई का कोई सरल लोलक, जिसके लोलक का द्रव्यमान M है, निलंबित किया गया है । कार R त्रिज्या की वृत्तीय पगदण्डी पर एकसमान चाल v से गतिमान है । यदि लोलक त्रिज्य दिशा में अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर छोटे दोलन करता है, तो इसका आवर्तकाल कितना होगा ?

14.20 आधार क्षेत्रफल A तथा ऊंचाई h का कोई कॉर्क का बेलनाकार टुकड़ा ρ_l घनत्व के किसी द्रव में तैर रहा है । कॉर्क को थोड़ा नीचे दबाकर स्वतंत्र छोड़ देते हैं, यह दर्शाइए कि कार्क ऊपर-नीचे सरल आवर्त दोलन करता है जिसका आवर्तकाल

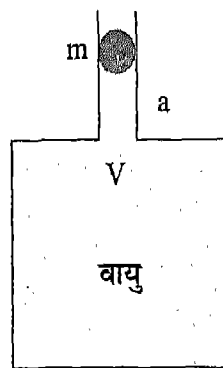
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho_1 g}} \text{ है ।}$$

यहां ρ कार्क का घनत्व है । (द्रव की श्यानता के कारण अवमंदन को नगण्य मानिए) ।

14.21 चित्र 14.33 में दर्शाए अनुसार 3.0kg द्रव्यमान की ट्राली को $600\ N\ m^{-1}$ कमानी-स्थिरांक की दो कमानियों से जोड़ा गया है । यदि ट्राली को अपनी साम्यावस्था की स्थिति 5.0cm विस्थापित करके मुक्त छोड़ दिया जाता है, तो (a) होने वाले दोलनों का आवर्तकाल, तथा (b) ट्राली की अधिकतम चाल क्या होगी? जितने समय में अवमंदन बलों के कारण ट्राली विराम अवस्था में आती है, उतने समय में कितनी ऊर्जा ऊष्मा के रूप में क्षय हो जाती है ?

चित्र 14.33

14.22 पारे से भरी किसी U नली का एक सिरा किसी चूषण पंप से जुड़ा है, तथा दूसरा सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ दिया गया है । दोनों स्तंभों में कुछ दाबांतर बनाए रखा जाता है । यह दर्शाइए कि जब चूषण पंप को हटा देते हैं, तब U नली में पारे का स्तंभ सरल आवर्त गति करता है ।

अतिरिक्त अभ्यास

14.23 चित्र 14.34 में दर्शाए अनुसार V आयतन के किसी वायु कक्ष की ग्रीवा (गर्दन) की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल a है। इस ग्रीवा में m द्रव्यमान की कोई गोली बिना किसी घर्षण के ऊपर-नीचे गति कर सकती है । यह दर्शाइए कि जब गोली को थोड़ा नीचे दबाकर मुक्त छोड़ देते हैं, तो वह सरल आवर्त गति करती है । दाब-आयतन विचरण को समतापी मानकर दोलनों के आवर्तकाल का व्यंजक ज्ञात कीजिए । [चित्र 14.34 देखिए]

चित्र 14.34

14.24 आप किसी 3000 kg द्रव्यमान के स्वचालित वाहन पर सवार हैं । यह मानिए कि आप इस वाहन की निलंबन प्रणाली के दोलनी अभिलक्षणों का परीक्षण कर रहे हैं । जब समस्त वाहन इस पर रखा जाता है, तब निलंबन 15 cm आनमित होता है । साथ ही, एक पूर्ण दोलन की अवधि में दोलन के आयाम में 50% घटोतरी हो जाती है । निम्नलिखित के मानों का आकलन कीजिए :

(a) कमानी स्थिरांक, तथा

(b) कमानी तथा एक पहिए के प्रघात अवशोषक तंत्र के लिए अवमंदन स्थिरांक b

यह मानिए कि प्रत्येक पहिया 750 kg द्रव्यमान को सहारा देता है ।

14.25 1500 kg की कोई कार जिस पर 75-75 kg के चार व्यक्ति सवार हैं, उबड़-खाबड़ कच्ची सड़क जिसके प्रत्येक 4 मीटर पर वलीयन हैं, गतिमान है । वलीयनों के कारण कार अपने कमानी-निलंबन पर उछलती है तथा जब कार की चाल 20 km h^{-1} होती है तब उछलने का आयाम अधिकतम होता है । अब यदि कार को रोककर चारों व्यक्तियों को उतार दिया जाए तो इस प्रकार द्रव्यमान में हुई कमी के कारण कार का ढांचा अपने निलंबन पर कितना ऊपर उठ जाता है ?

14.26 यह दर्शाइए कि रैखिक सरल आवर्त गति करते किसी कण के लिए दोलन की किसी अवधि की औसत गतिज ऊर्जा उसी अवधि की औसत स्थितिज ऊर्जा के समान होती है ।

14.27 10 kg द्रव्यमान की कोई वृत्तीय चक्रिका अपने केंद्र से जुड़े किसी तार से लटकी है । चक्रिका को घूर्णन देकर तार में ऐंठन उत्पन्न करके मुक्त कर दिया जाता है । मरोड़ी दोलन का आवर्तकाल 1.5 s है । चक्रिका की त्रिज्या 15 cm है । तार का मरोड़ी कमानी नियतांक ज्ञात कीजिए । [मरोड़ी कमानी नियतांक α संबंध $J = -\alpha\,\theta$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, यहां J प्रत्यानयन बल युग्म है तथा θ ऐंठन कोण है]

परिशिष्ट 14.1 : आवर्ती फलन तथा फुरिये-विश्लेषण

आवर्ती फलन क्या होता है ? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए आइए किसी फलन $f(\theta)$ पर विचार करें, जिसमें निम्नलिखित गुण हैं,

$$f(\theta + T) = f(\theta) \tag{1}$$

इसका अर्थ यह है कि θ के सभी मानों के लिए कोणांक में T के पूर्णांकीय गुणक की घटोतरी अथवा बढ़ोतरी होने पर फलन का मान वही रहता है । कोई भी फलन जो यह गुण प्रदर्शित करता है वह आवर्ती फलन कहलाता है और उसका आवर्तकाल T होता है । इसे और भलीभांति समझने के लिए आइए $\sin\theta$ अथवा $\cos\theta$ जैसे सरल त्रिकोणमितीय फलनों पर विचार करें । ये दोनों फलन आवर्ती हैं; इनका आवर्तकाल 2π रेडियन है। कोण के इस मात्रक के परिमाण के विषय में जानकारी इस तथ्य से हो सकती है कि एक रेडियन 57.32 अंश की जीवा के बराबर होता है । अब हम यह जानते हैं कि,

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

यदि स्वतंत्र चर t समय की भांति विमीय राशि है तथा इस फलन का आवर्तकाल T है, तब किसी स्वेच्छ आवर्तकाल T वाले आवर्ती फलन की संरचना के लिए हम ज्या (sin) अथवा कोज्या (cos) फलनों के आवर्ती गुणों का उपयोग कर सकते हैं । ये फलन हैं,

$$f_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \tag{2}$$

$$g_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \tag{3}$$

हम इन फलनों के कोणांकों को t से $t+T$ में परिवर्तित करके उनके आवर्तिता के गुण को सत्यापित कर सकते हैं । उदाहरणार्थ,

$$\begin{aligned} g_1(t+T) &= \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)(t+T) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + 2\pi\right) \\ &= g_1(t) \end{aligned} \tag{4}$$

यह भी देखा जा सकता है कि ऐसे फलन भी जिनका आवर्तकाल T/n होता है, यहां $n = 1, 2, 3, \ldots$ है, समय T के पश्चात् अपने मानों को दोहराते हैं । अतः हम जैसे फलन नीचे दिए हुए हैं वैसे दो फलनों के दो अनंत समुच्चयों की संरचना कर सकते हैं

$$f_n(t) = \sin 2\pi n\, t/T \qquad n = 1, 2, 3, 4.... \tag{5}$$

$$g_n(t) = \cos 2\pi n\, t/T \qquad n = 1, 2, 3, 4.... \tag{6}$$

कोज्या (cos) फलनों के लिए समुच्चयों में, समीकरण (6) में हमने अचर फलन भी सम्मिलित किया है,

$$g_0(t) = 1 \tag{7}$$

यह अचर फलन होने के कारण T के किसी भी मान के लिए आवर्ती होता है ।

फूरिये की महत्वपूर्ण प्रमेय के अनुसार, ***"आवर्तकाल T के किसी स्वेच्छ फलन $F(t)$ को दो फलनों $f_n(t)$ तथा $g_n(t)$ के एकमात्र संयोजन द्वारा निरूपित किया जा सकता है ।"***

इस परिणाम को गणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$\begin{aligned} F(t) = \; & b_0 + b_1\cos(2\pi t/T) + b_2\cos(4\pi t/T) \\ & + b_3\cos(6\pi\, t/T) + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_1\sin(2\pi t/T) + a_2\sin(4\pi\, t/T) \\ & + a_3\sin(6\pi t/T) + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

समीकरण (8) को व्यापक रूप में इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं,

$$F(t) = b_0 + \sum_n b_n \cos n\omega t + \sum_n a_n \sin n\omega t \tag{9}$$

यहां $\omega = 2\pi/T$ । गुणांकों $b_0, b_1, b_2....; a_1, a_2, a_3....$को **फूरिये गुणांक** कहते हैं । गणितीय विधियों, जिन्हें **फूरिये विश्लेषण** कहते हैं, का उपयोग करके इन गुणांकों का मान एकमात्र ढंग से ज्ञात किया जा सकता है ।

▶ उदाहरण नीचे दिये गए फलन का आरेख खींचिए,

$$F(t) = 1.273 \sin 2\pi \nu\ t + 0.424 \sin 6\pi \nu\ t + 0.255 \sin 10\pi \nu t \quad (10)$$

यहां $\nu = 128$ Hz

चित्र 14.26 समीकरण 10 में दिए गए फलन F(t) का आरेख।

हल इस फलन का आरेख चित्र 1 में दर्शाया गया है।

उपरोक्त उदाहरण से यह स्पष्ट होता है कि किस प्रकार जटिल प्रतीत होने वाला कोई फलन तीन सरल ज्यावक्रीय (sin) फलनों के अध्यारोपण के रूप में निरूपित किया जा सकता है। ध्यान देने योग्य बात यह है कि इस प्रकरण में समीकरण (10) में सभी गुणांक b_n शून्य हैं। ◀

अध्याय 15

तरंगें

15.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने ऐसे पिंडों की गति के बारे में अध्ययन किया जो एक-दूसरे से विलगित होकर दोलन करते हैं । यदि कोई निकाय इसी प्रकार के पिंडों का समूह है, तो उस निकाय में क्या होगा ? कोई द्रव्यात्मक माध्यम इसी प्रकार के निकाय का एक उदाहरण है । प्रत्येक द्रव्यात्मक माध्यम में प्रत्यास्थ बल माध्यम के अवयवों को एक-दूसरे से बांधे रखते हैं जिसके कारण किसी द्रव्यात्मक माध्यम के एक अवयव की गति दूसरे अवयव की गति को प्रभावित करती है । यदि आप एक छोटे कंकड़ को किसी तालाब के शांत जल में धीरे से गिराएं, तो जल का पृष्ठ विक्षुब्ध हो जाता है । यह विक्षोभ किसी एक स्थान तक ही सीमित नहीं रहता, वरन् किसी वृत्त के अनुदिश बाहर की ओर संचरित होता है । यदि आप इसी प्रकार तालाब में निरंतर कंकड़ गिराते रहें, तो आप यह देखेंगे कि तालाब के पृष्ठ के जिस बिंदु पर विक्षोभ उत्पन्न हुआ है वहां से यह विक्षोभ वृत्तों के रूप में तीव्रता से बाहर की ओर गति करता है । हमें ऐसा प्रतीत होता है जैसे विक्षोभ बिंदु से जल स्वयं बाहर की ओर गति कर रहा हो । यदि आप विक्षुब्ध पृष्ठ पर कुछ छोटे-छोटे कार्क के टुकड़े धीरे से रख दें, तो आप पाएंगे कि ये कार्क के टुकड़े अपने-अपने स्थानों पर ही ऊपर-नीचे गति करते हैं, परंतु विक्षोभ के केंद्र बिंदु से दूर नहीं जाते अर्थात् उनकी विक्षोभ के केंद्र से दूरी नियत बनी रहती है । इससे यह प्रदर्शित होता है कि जल स्वयं वृत्तों के साथ बाहर की ओर गति नहीं करता, वरन् एक गतिशील विक्षोभ उत्पन्न हो जाता है जो बाहर की ओर गति करता है । इसी प्रकार जब हम बोलते हैं, तो ध्वनि हवा (माध्यम) में हमसे दूर जाती है । परंतु इस प्रक्रिया में माध्यम के कण एक भाग से दूसरे भाग में गति नहीं करते । वायु में उत्पन्न हुए विक्षोभ हमें स्पष्ट रूप से दिखाई नहीं देते, हमारे कानों अथवा माइक्रोफोनों द्वारा ही हमें इनकी पहचान हो पाती है । इस प्रकार के विक्षोभों के प्रतिरूप या पैटर्न जो द्रव्य के वास्तविक भौतिक स्थानांतरण अथवा समूचे द्रव्य के प्रवाह के बिना ही माध्यम के एक स्थान से दूसरे स्थान तक गति करते हैं, **तरंग** कहलाते हैं । इस अध्याय में हम तरंगों के विषय में अध्ययन करेंगे ।

किसी भी तरंग के द्वारा एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक सूचना तथा ऊर्जा का संकेतों (सिगनलों) के रूप में संचरण होता है, परंतु कोई भी द्रव्यात्मक पिंड गति नहीं करता । हमारा समस्त संचार-तंत्र तरंगों द्वारा संकेतों के संचरण पर निर्भर करता है । जब हम अपने से दूर बैठे किसी मित्र से टेलीफोन पर बातचीत करते हैं, तब हमारे वाक्-तन्तु से उत्पन्न संदेश को ध्वनि तरंगें टेलीफोन तक ले जाती हैं ।

यहां एक विद्युत् सिगनल उत्पन्न होता है जो तांबे के तारों के अनुदिश संचरित होता है । यदि दूरी बहुत अधिक है तो उत्पन्न विद्युत् सिगनल को किसी प्रकाश सिगनल अथवा विद्युत् चुंबकीय तरंगों में रूपांतरित किया जा सकता है और प्रकाशिक तंतुओं अथवा संभवत: संचार उपग्रहों के प्रयोग द्वारा वायुमंडल से इनका संचरण किया जाता है । अभिग्राही छोर पर ये वैद्युत अथवा प्रकाश सिगनल अथवा विद्युत् चुंबकीय तरंगें पुन: ध्वनि तरंगों में रूपांतरित होकर टेलीफोन से कानों तक पहुंचती हैं ।

सभी तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । हम जानते हैं कि प्रकाश तरंगें निर्वात से गमन कर सकती हैं । हमसे सैकड़ों प्रकाश वर्ष की दूरी पर स्थित तारों से उत्सर्जित प्रकाश अंतरतारकीय आकाश, जो व्यावहारिक रूप से निर्वात ही है, से गमन करता हुआ हम तक पहुंचता है ।

हमारे संपर्क में आने वाली तरंगें मुख्यत: तीन प्रकार की होती हैं : (क) यांत्रिक तरंगें, (ख) विद्युत् चुंबकीय तरंगें तथा (ग) द्रव्य तरंगें । इनमें यांत्रिक तरंगें सबसे अधिक परिचित तरंगें हैं क्योंकि इनसे हमारा निरंतर संपर्क रहता है; जल-तरंगें, ध्वनि तरंगें, भूकंपी तरंगें आदि इन तरंगों के सामान्य उदाहरण हैं । इन सभी यांत्रिक तरंगों के कुछ प्रमुख लक्षण होते हैं : ये तरंगें न्यूटन के गति के नियमों द्वारा संनियमित होती हैं तथा ये केवल द्रव्यात्मक माध्यमों जैसे जल, वायु तथा चट्टानों में ही पाई जा सकती हैं । दृश्य तथा पराबैंगनी प्रकाश, रेडियो तथा टेलीविजन तरंगें, सूक्ष्म तरंगें, X-किरणें, आदि विद्युत् चुंबकीय तरंगों के सामान्य उदाहरण हैं । सभी विद्युत् चुंबकीय तरंगें निर्वात में समान चाल c, जिसका मान नीचे दिया गया है, से गमन करती हैं :

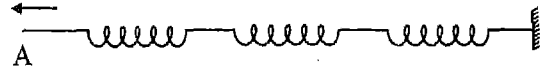
$$c = 29,97,92,458 \text{ m s}^{-1} \text{ (प्रकाश की चाल)} \qquad (15.1)$$

यांत्रिक तरंगों के असदृश (विपरीत) विद्युत् चुंबकीय तरंगों को अपने संचरण के लिए किसी द्रव्यात्मक माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । इन तरंगों के बारे में अधिक अध्ययन आप अगली कक्षाओं में करेंगे ।

द्रव्य तरंगें गतिशील इलेक्ट्रॉनों, प्रोटॉनों, न्यूट्रॉनों तथा अन्य मूल कणों, यहां तक कि परमाणुओं तथा अणुओं से संबद्ध होती हैं । क्योंकि सामान्यत: हम इन तरंगों को द्रव्य से बना हुआ मानते हैं, इसीलिए इन तरंगों को द्रव्य तरंगें कहते हैं । ये तरंगें प्रकृति के क्वांटम यांत्रिकीय विवरण में उत्पन्न होती हैं जिसके विषय में आप अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे । यद्यपि ये तरंगें संकल्पनात्मक रूप में यांत्रिक तथा विद्युत् चुंबकीय तरंगों की तुलना में अधिक अमूर्त हैं, तथापि इनका अनुप्रयोग आधुनिक प्रौद्योगिकी की बहुत सी मूल युक्तियों में पाया जाता है; इलेक्ट्रॉन से संबद्ध द्रव्य तरंगों का उपयोग इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में किया जाता है ।

इस अध्याय में हम केवल यांत्रिक तरंगों के बारे में, जिनके संचरण के लिए द्रव्यात्मक माध्यम आवश्यक है, अध्ययन करेंगे ।

पुरातन काल से ही हमारी कला तथा संस्कृति पर तरंगों के सौंदर्य बोध का प्रभाव दृष्टिगोचर होता है, फिर भी तरंग गति का वैज्ञानिक विश्लेषण सर्वप्रथम सत्रहवीं शताब्दी में किया गया। क्रिश्चियन हाइगेन्स (1629-1695), राबर्ट हुक तथा आइज़क न्यूटन कुछ ऐसे प्रसिद्ध भौतिकविद हैं जिनके नाम तरंग गति की भौतिकी से संबद्ध हैं । कमानी से बंधे पिंडों के दोलनों की भौतिकी तथा सरल लोलक की भौतिकी के पश्चात् ही तरंगों की भौतिकी को समझा गया । प्रत्यास्थ माध्यमों में तरंगों का आवर्ती दोलनों के साथ अंतरंग संबंध होता है । (तानित डोरियां, कुंडलित कमानियां, वायु आदि प्रत्यास्थ माध्यमों के उदाहरण हैं ।) इस संबंध की व्याख्या हम सरल उदाहरणों द्वारा करेंगे।

चित्र 15.1 में दर्शाए अनुसार एक दूसरे से संबद्ध कमानियों के संग्रह पर विचार कीजिए । यदि इस संग्रह के एक सिरे की कमानी को यकायक खींचकर छोड़ दें, तो उत्पन्न विक्षोभ दूसरे सिरे तक गमन करता है । इस प्रक्रिया में क्या होता है ? यकायक खींचने पर पहली कमानी अपनी साम्यावस्था की लंबाई से विक्षोभित होती है । चूंकि दूसरी कमानी पहली कमानी से संबद्ध है, अत: उसमें तनाव अथवा संपीडन होता है, और इस प्रकार यह प्रक्रिया आगे बढ़ती जाती है । यहां विक्षोभ तो एक सिरे से दूसरे तक संचरित हो जाता है, परंतु प्रत्येक कमानी अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर ही लघु दोलन करती रहती है । ऐसे

चित्र 15.1 एक-दूसरे से संबद्ध कमानियों का संग्रह । सिरे A को यकायक खींचा जाता है; तब विक्षोभ दूसरे सिरे तक संचरित हो जाता है ।

ही एक व्यावहारिक उदाहरण के रूप में रेलवे स्टेशन पर विराम की स्थिति में खड़ी किसी रेलगाड़ी पर विचार कीजिए । रेलगाड़ी के विभिन्न डिब्बे कमानी युग्मकों द्वारा एक-दूसरे से युग्मित होते हैं । जब इन डिब्बों के किसी एक सिरे से किसी इंजन को जोड़ते हैं, तो वह अपने से अगले डिब्बे को धक्का देता है, तथा यह धक्का एक डिब्बे से दूसरे डिब्बे में, दूसरे से फिर तीसरे में, इसी प्रकार आगे संचरित होते हुए आखिरी डिब्बे तक पहुंच जाता है, लेकिन समस्त रेलगाड़ी अपने ही स्थान पर खड़ी रहती है।

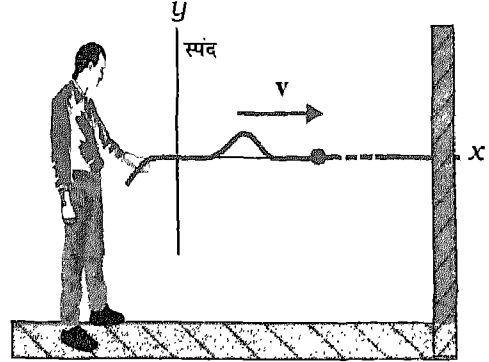
आइए, अब हम वायु में ध्वनि तरंगों के संचरण पर विचार करते हैं । जैसे ही कोई ध्वनि तरंग वायु से होकर गुजरती है, वह उस स्थान की वायु के कुछ क्षेत्र को संपीडित अथवा विस्तारित करती है । इसके कारण उस छोटे क्षेत्र (δr) की वायु के घनत्व में मान लीजिए ($\delta\rho$) परिवर्तन होता है । दाब, प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल होता है, अत: कमानी की ही भांति इस स्थिति में भी विक्षोभ के अनुक्रमानुपात में 'प्रत्यानयन बल' उत्पन्न हो जाता है । यहां इस प्रकरण में, घनत्व में परिवर्तन, कमानी में उत्पन्न संपीडन अथवा विस्तारण के समरूप है । यदि किसी क्षेत्र को संपीडित किया जाता है, तो उस क्षेत्र के अणु बाहर निकलकर समीपवर्ती क्षेत्र में जाने का प्रयास करते हैं ।

इस प्रकार, समीपवर्ती क्षेत्र में घनत्व बढ़ता है, अथवा उस क्षेत्र में 'संपीडन' उत्पन्न होता है जिसके फलस्वरूप पूर्ववर्ती क्षेत्र में 'विरलन' उत्पन्न हो जाता है। यदि कोई क्षेत्र अपने चारों ओर के क्षेत्रों की तुलना में विरलित हो, तो उस क्षेत्र के चारों ओर के परिवेश की वायु उस क्षेत्र में तीव्र गति से प्रवेश करके विरलन को समीपवर्ती क्षेत्र की ओर धकेल देती है। इस प्रकार, संपीडन अथवा विरलन एक क्षेत्र से दूसरे क्षेत्र की ओर गति करते हैं, जिसके कारण वायु में विक्षोभ का संचरण संभव हो पाता है।

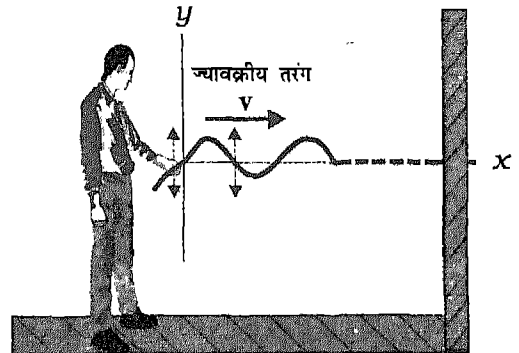
ठोसों में भी इसी के सदृश तर्क दिया जा सकता है। क्रिस्टलीय ठोसों में परमाणु अथवा परमाणुओं के समूह आवर्ती जालकों में व्यवस्थित होते हैं। इनमें, प्रत्येक परमाणु अथवा परमाणुओं का समूह, अपने चारों ओर के परमाणुओं द्वारा आरोपित बलों के कारण, साम्यावस्था में होता है। यदि अन्य परमाणुओं को स्थिर रखते हुए किसी एक परमाणु को विस्थापित किया जाए, तो ठीक उसी प्रकार जैसा कि कमानी के प्रकरण में था, इस स्थिति में भी एक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है। अतः हम जालक (lattice) के परमाणुओं को अंतःबिंदुओं की भांति ले सकते हैं तथा परमाणु-युगलों के बीच कमानियां लगी मान सकते हैं।

अब हम इस अध्याय के अगले अनुभागों में तरंगों के विभिन्न अभिलाक्षणिक गुणों की चर्चा करेंगे।

15.2 अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्ध्य तरंगें

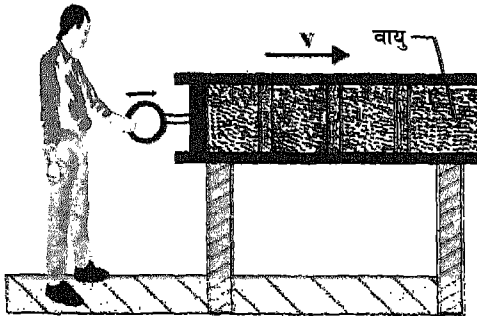
यांत्रिक तरंगों का अनुप्रस्थ अथवा अनुदैर्ध्य होना तरंग संचरण तथा माध्यम में विक्षोभ अथवा विस्थापन की दिशाओं के बीच के संबंध पर निर्भर करता है। इन दोनों में विभेदन के लिए किसी ऐसी तानित डोरी की अनुक्रिया पर विचार करते हैं जिसका एक सिरा किसी सुदृढ़ टेक से बंधा है। यदि आप चित्र 15.2 में दर्शाए अनुसार इस डोरी के एक सिरे को यकायक ऊपर-नीचे एक झटका दें तो एकल 'स्पंद' के रूप में एक तरंग डोरी के अनुदिश गमन करती है। हम यह मानते हैं कि स्पंद के आकार की तुलना में डोरी की लंबाई बहुत अधिक है, तथा डोरी के दूसरे सिरे तक पहुंचने से पहले ही स्पंद नष्ट हो जाता है, अतः दूसरे सिरे से स्पंद के परावर्तित होने की संभावना की उपेक्षा की जा सकती है। तनाव में होने के कारण ही डोरी में यह स्पंद बनता और गति करता है। जब आप डोरी के अपनी तरफ वाले सिरे को ऊपर की दिशा में खींचते हैं, तो यह डोरी के संलग्न भाग को, डोरी के दोनों भागों के बीच तनाव होने के कारण, ऊपर की दिशा में खींचना आरंभ कर देती है। जैसे ही डोरी का संलग्न भाग ऊपर की दिशा में गति करने लगता है, यह अपने से अगले संलग्न भाग को ऊपर की दिशा में खींचना आरंभ कर देता है और यह प्रक्रिया क्रमवार आगे बढ़ती जाती है। इस बीच आप डोरी के अपनी तरफ वाले सिरे को नीचे की दिशा में खींच लेते हैं। जैसे-जैसे डोरी का प्रत्येक भाग ऊपर की दिशा में गति करता जाता है उसे उसके समीप के वे भाग, जो पहले से ही नीचे की दिशा में गतिमान होते हैं, नीचे की दिशा में वापस खींचना आरंभ कर देते हैं। इसका नेट परिणाम यह होता है कि डोरी की आकृति में विरूपण (स्पंद) डोरी के अनुदिश किसी निश्चित वेग v से गमन करता है।

चित्र 15.2 तानित डोरी के अनुदिश कोई एकल स्पंद भेजा जाता है। डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव (जैसे डोरी का वह भाग जिस पर बिंदु अंकित है) स्पंद के गमन के समय पहले ऊपर की दिशा और फिर नीचे की दिशा में गति करता है। डोरी के इस अवयव की गति की दिशा तरंग गति की दिशा के लंबवत होती है।

यदि आप डोरी के अपने सिरे को निरंतर सरल आवर्त रूप में ऊपर-नीचे गति कराते रहें, तो एक सतत् तरंग डोरी के अनुदिश वेग v से गमन करती है। चूंकि आपके हाथ की गति समय का ज्यावक्रीय फलन है, अतः किसी दिए गए समय पर तरंग की आकृति चित्र 15.3 में दर्शाए अनुसार ज्यावक्रीय होती है। तरंग की आकृति किसी ज्या अथवा कोज्या वक्र की होती है।

चित्र 15.3 में दर्शायी गई तरंग का दो प्रकार से अध्ययन किया जा सकता है। पहले प्रकार में, जब तरंगरूप डोरी में दाईं ओर गमन करते हैं तब उनका मानीटरन करते हैं, अर्थात् दिए गए समय अंतरालों पर डोरी के 'आशुचित्र' खींचते हैं। विकल्पतः जब तरंग डोरी के अनुदिश आगे बढ़ रही हो तब हम अपना ध्यान

चित्र 15.3 डोरी के अनुदिश एक ज्यावक्रीय तरंग भेजी जाती है। डोरी में जैसे ही तरंग आगे बढ़ती है डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव सतत् रूप से ऊपर-नीचे गति करता है। यह एक अनुप्रस्थ तरंग है।

इस डोरी के किसी विशेष अवयव की ओर केंद्रित करके उस डोरी-अवयव की गति का मानीटरन ऊपर-नीचे दोलन गति करते समय कर सकते हैं। हम यह पाएंगे कि ऐसे सभी दोलायमान डोरी अवयवों का विस्थापन अनुप्रस्थ अर्थात् तरंग-गति की दिशा के लंबवत् है, जैसा कि चित्र 15.3 में दर्शाया गया है। इस प्रकार की तरंग को **अनुप्रस्थ तरंग** कहते हैं।

अब हम किसी वायु से भरी लंबी नली में पिस्टन की गति द्वारा उत्पन्न ध्वनि तरंगों पर विचार करते हैं (देखिए चित्र 15.4)। यदि आप पिस्टन को यकायक पहले दाएं और फिर बाएं गति कराएं तब आप नली के अनुदिश ध्वनि का एक स्पंद भेजते हैं। पिस्टन की दाईं ओर की गति पिस्टन से अगले वायु अवयवों को दाईं ओर धकेलती है, जिससे वहां का वायु दाब परिवर्तित होता है। इस क्षेत्र में बढ़ा हुआ वायु दाब फिर संलग्न वायु अवयवों को नली के अनुदिश कुछ दूरी तक दाईं ओर धकेलता है। पिस्टन को बाईं ओर गति कराने पर पिस्टन से संलग्न वायु-अवयवों का दाब घट जाता है। इस घटे हुए वायु दाब के कारण इस वायु-अवयव से अगला वायु-अवयव वापस बाईं ओर गति करता है, और फिर उससे संलग्न अगला वायु-अवयव भी बाईं ओर गति करता है। इस प्रकार, वायु की गति तथा वायु दाब में परिवर्तन स्पंद के रूप में नली के अनुदिश दाईं ओर गमन करता है।

यदि आप पिस्टन को निरंतर सरल आवर्त रूप में खींचते और धकलते रहें, तो नली के अनुदिश एक ज्यावक्रीय तरंग गमन करती है। यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि इस तरंग में

चित्र 15.4 पिस्टन को आगे-पीछे गति कराकर वायु से भरी नली में ध्वनि तरंग उत्पन्न की जाती है। चूंकि वायु अवयव के दोलन तरंग गति की दिशा के समांतर हैं, अतः यह अनुदैर्ध्य तरंग है।

वायु-अवयव की गति की दिशा तरंग-संचरण की दिशा के समांतर होती है। इस प्रकार की गति को **अनुदैर्ध्य गति** तथा इस प्रकार की तरंग को **अनुदैर्ध्य तरंग** कहते हैं। अतः वायु में उत्पन्न ध्वनि तरंगें अनुदैर्ध्य तरंगें होती हैं।

संक्षेप में, ***अनुप्रस्थ तरंगों में माध्यम के अवयव तरंग-संचरण की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं तथा अनुदैर्ध्य तरंगों में माध्यम के अवयव तरंग-संचरण के अनुदिश दोलन करते हैं।***

कोई तरंग, चाहे वह अनुप्रस्थ हो अथवा अनुदैर्ध्य **प्रगामी तरंग** कहलाती है, यदि वह माध्यम के एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गमन करती है। प्रगामी तरंगें अप्रगामी तरंगों से भिन्न होती हैं (देखिए अनुभाग 15.7)। चित्र 15.3 में अनुप्रस्थ तरंगें डोरी के एक सिरे से दूसरे सिरे तक गमन करती दर्शायी गयी हैं। जबकि चित्र 15.4 में अनुदैर्ध्य तरंगें नली के एक सिरे से दूसरे सिरे तक गमन करती दर्शायी गई हैं। फिर ध्यान दीजिए कि दोनों ही प्रकरणों में केवल तरंग अथवा विक्षोभ ही एक सिरे से दूसरे सिरे तक गमन करता है, वह द्रव्य जिससे तरंग संचरित होती है गति नहीं करता।

अनुप्रस्थ तरंगों में कणों की गति तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् होती है। अतः तरंग संचरण के समय माध्यम के प्रत्येक अवयव में अपरूपण विकृति होती है। अतः अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण केवल उन्हीं माध्यमों, जैसे ठोसों एवं डोरियों, में हो सकता है जो अपरूपक प्रतिबलों का परिपालन कर सकें जबकि तरलों में यह संचरण नहीं हो सकता। तरलों के साथ-साथ ठोस भी संपीडन विकृति का प्रतिपालन कर सकते हैं, अतः अनुदैर्ध्य तरंगों का संचरण सभी प्रत्यास्थ माध्यमों में कराया जा सकता है। उदाहरण के लिए, स्टील की छड़ जैसे माध्यमों में अनुप्रस्थ एवं अनुदैर्ध्य दोनों प्रकार की तरंगें संचरित हो सकती हैं, जबकि वायु में केवल अनुदैर्ध्य यांत्रिक तरंगों का ही संचरण संभव है। जल के पृष्ठ पर दो प्रकार की तरंगें होती हैं : **केशिकात्वीय** (अथवा पृष्ठ तनावी) **तरंगें** तथा **गुरुत्व तरंगें**। पहले प्रकार की तरंगें काफी कम तरंगदैर्ध्य की उर्मिकाएं होती हैं जिनकी तरंगदैर्ध्य कुछ सेंटीमीटर से अधिक नहीं होती तथा इनके बनने का कारण जल के पृष्ठ तनाव के कारण प्रत्यानयन बल होता है। गुरुत्व तरंगों की तरंगदैर्ध्य का प्रारूपिक परिसर कई मीटर से कई सौ मीटर तक होता है। ये तरंगें गुरुत्वीय खिंचाव के रूप में लगने वाले प्रत्यानयन बल द्वारा बनती हैं जो जल के पृष्ठ को अपने न्यूनतम स्तर पर रखने का प्रयास करती हैं।

इन तरंगों में कणों के दोलन पृष्ठ तक ही सीमित नहीं रहते बल्कि इनका विस्तार घटते आयाम के साथ तली तक होता है। जल-तरंगों में कण-गति के साथ एक जटिल गति सम्मिलित होती है, वे न केवल ऊपर-नीचे गति करते हैं बल्कि उनकी पश्च तथा अग्र-गति भी होती है। समुद्र में उत्पन्न तरंगें अनुप्रस्थ तरंगों तथा अनुदैर्ध्य तरंगों का संयोजन होती हैं।

व्यापक रूप में यह पाया गया है कि एक ही माध्यम में अनुप्रस्थ तरंगों तथा अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल भिन्न-भिन्न होती है।

▶ ***उदाहरण 15.1*** नीचे तरंग गति के कुछ उदाहरण दिए गए हैं, प्रत्येक स्थिति में यह बताइए कि क्या तरंग गति अनुप्रस्थ है, अनुदैर्ध्य है अथवा दोनों का संयोजन है :

(a) किसी लंबी कुंडलित कमानी के एक सिरे को एक ओर विस्थापित करने पर उस कमानी की किसी विभंग (ऐंठन) की गति।

(b) द्रव से भरे किसी सिलिंडर में इसके पिस्टन को आगे-पीछे करके सिलिंडर में उत्पन्न तरंगें।

(c) जल के पृष्ठ पर चलती मोटरबोट द्वारा उत्पन्न तरंगें।

(d) किसी कंपायमान क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल द्वारा वायु में उत्पन्न पराश्रव्य तरंगें।

हल

(a) अनुप्रस्थ

(b) अनुदैर्ध्य

(c) अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्ध्य

(d) अनुदैर्ध्य

15.3 प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध

किसी माध्यम में तरंग गति के संचरण (तथा माध्यम के किसी अवयव की गति) के विवरण के लिए हमें किसी ऐसे फलन की आवश्यकता होती है जो उस तरंग की आकृति का समय के प्रत्येक क्षण का संपूर्ण विवरण देता हो। उदाहरण के लिए, किसी डोरी पर गमन करती एक तरंग (तथा किसी भी डोरी अवयव की उसकी लंबाई के अनुदिश गति) के संपूर्ण विवरण के लिए हमें एक संबंध की आवश्यकता होती है जो किसी डोरी अवयव के विस्थापन का किसी विशेष स्थिति पर समय के फलन के रूप में विवरण देता हो तथा साथ ही किसी दिए गए क्षण पर डोरी की लंबाई के अनुदिश विभिन्न डोरी अवयवों की कंपन की अवस्था का वर्णन भी करता हो। ऐसा ही एक फलन, $y = f(x, t)$ हो सकता है, जिसमें y डोरी अवयव का अनुप्रस्थ विस्थापन है, और इसे समय t तथा डोरी अवयव की डोरी की लंबाई के अनुदिश स्थिति x का फलन होना चाहिए। चित्र 15.3 में दर्शायी गई ज्यावक्रीय तरंग के लिए इस फलन को दिक्स्थान (आकाश) तथा काल दोनों में आवर्ती होना चाहिए। जब तरंग डोरी के अनुवर्ती अवयवों की ओर बढ़ती जाती है, वे अवयव y-अक्ष के समांतर दोलन करते हैं। किसी समय t पर स्थिति x पर अवस्थित अवयव के विस्थापन y को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.2)$$

हम यहां ज्या (sin) फलन के स्थान पर कोज्या (cos) फलन अथवा ज्या और कोज्या फलनों का रैखिक संयोजन भी चुन सकते हैं, जो इस प्रकार का होता है,

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t) + b \cos(kx - \omega t) \qquad (15.3)$$

तब समीकरण (15.2) में

$$y_m = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{तथा} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

समीकरण (15.2) में निरूपित फलन स्थिति निर्देशांक x तथा समय t में आवर्ती है। यह x-अक्ष के अनुदिश गतिमान किसी अनुप्रस्थ तरंग को निरूपित करता है। किसी भी समय t पर यह डोरी अवयवों का उनकी स्थितियों के फलन के रूप में विस्थापन देता है। यह हमें किसी दिए गए समय पर तरंग की आकृति बता सकता है तथा यह दर्शा सकता है कि डोरी के अनुदिश गति करते समय आकृति में परिवर्तन होता है। समीकरण (15.2) में दिए गए विस्थापन फलन जैसे फलन जो गणितीय रूप में गतिशील तरंग का निरूपण करते हैं **तरंग फलन** कहलाते हैं। यह x-अक्ष की धनात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील प्रगामी तरंग को निरूपित करता है। इसके विपरीत विस्थापन फलन,

$$y(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t + \phi) \qquad (15.4)$$

x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील प्रगामी तरंग को निरूपित करता है। चार प्राचलों y_m, ϕ, k तथा ω का समूह किसी आवर्ती तरंग का संपूर्ण विवरण प्रस्तुत करता है। चित्र 15.5 में इन प्राचलों के नाम दर्शाए गए हैं तथा इनको आगे परिभाषित किया जाएगा।

$$\overbrace{y(x,t)}^{\text{विस्थापन}} = \overbrace{y_m}^{\text{आयाम}} \sin(\overbrace{kx - \omega t + \phi}^{\text{कला}})$$

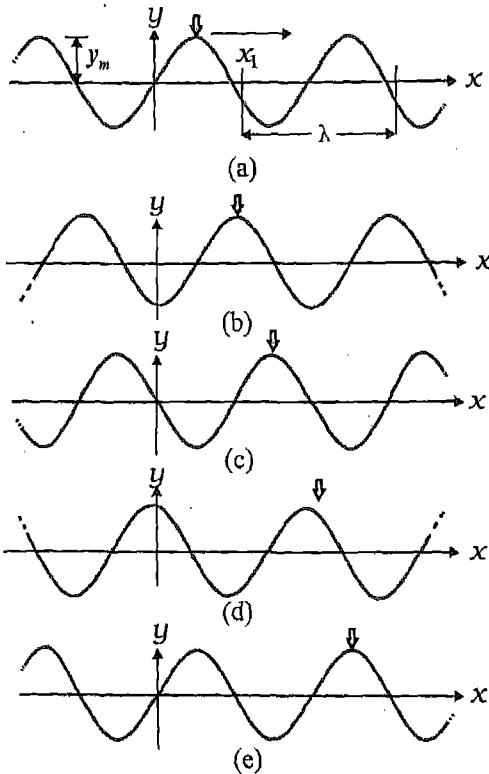
kx ↑ कोणीय तरंग संख्या; ωt ↑ कोणीय आवृत्ति; ϕ ↑ आरंभिक कला-कोण

चित्र 15.5 किसी प्रगामी तरंग के लिए समीकरण (15.2) की राशियों के नाम।

समीकरण (15.2) की राशियों की परिभाषाओं को समझने के लिए चित्र 15.6 में दर्शाए गए ग्राफ पर विचार करते हैं। ये ग्राफ x-अक्ष की धनात्मक दिशा में तरंग के गमन करने पर समय के पांच भिन्न मानों के लिए समीकरण (15.2) के ग्राफों (आलेखों) को निरूपित करते हैं। तरंग की प्रगति का संकेतन दाईं ओर गमन करती तरंग के उच्च बिंदु को निर्देशित करते छोटे तीरों की प्रगति द्वारा किया गया है। जब हम एक आलेख से दूसरे की ओर जाते हैं, तो छोटा तीर दाईं ओर तरंग की आकृति सहित गति करता है, परंतु डोरी y-अक्ष के समांतर गति करती है। यह देखा जा सकता है कि जब हम आलेख (a) से (e) पर जाते हैं, तो डोरी का कोई विशेष अवयव परिवर्तनों का एक पूरा चक्र अथवा एक पूरा दोलन कर लेता है। इतनी समय-अवधि में छोटा वाणाग्र अथवा तरंग x-अक्ष के अनुदिश एक अभिलाक्षणिक दूरी चल लेती है।

उपरोक्त पांच आलेखों के संदर्भ में अब हम समीकरण (15.2) की विभिन्न राशियों जिन्हें चित्र 15.5 में दर्शाया गया है, को परिभाषित करने का प्रयास करेंगे।

15.3.1 आयाम तथा कला

किसी तरंग का **आयाम** y_m चित्र 15.5 तथा 15.6 में दर्शाए अनुसार जब वह तरंग किसी माध्यम में आगे बढ़ती है, तब माध्यम के अवयवों के अपनी साम्यावस्था की स्थितियों से अधिकतम विस्थापन का परिमाण होता है। इसे चित्र 15.6(a) में दर्शाया गया

चित्र 15.6 समय के पांच भिन्न मानों के लिए x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गतिशील किसी तरंग के लिए समीकरण (15.2) के आलेख ।

है । चूंकि y_m एक परिमाण है, अत: यदि विस्थापन ऋणात्मक है, तो भी आयाम सदैव ही धनात्मक राशि होती है ।

इस तरंग की कला समीकरण (15.2) के दोलनी पद $\sin(kx-\omega t+\phi)$ का कोणांक $(kx-\omega t+\phi)$ होता है । जब यह तरंग किसी विशिष्ट स्थिति x पर किसी डोरी अवयव में चलकर आगे बढ़ती है, इसकी कला समय t के साथ रैखिकत: परिवर्तित होती है । समय के साथ ज्या (sin) में भी परिवर्तन होता है, इसका मान (+1) तथा (–1) की सीमाओं में दोलन करता है । इसका चरम धनात्मक मान (+1) अवयव से होकर आगे बढ़ती तरंग के शिखर के तद्नुरूपी होता है; तब स्थिति x पर विस्थापन y का मान y_m होता है । इसका चरम ऋणात्मक मान (–1) अवयव में होकर आगे बढ़ती तरंग की घाटी के तद्नुरूपी होता है । तब स्थिति x पर विस्थापन y का मान होता $-y_m$ होता है । इस प्रकार, किसी तरंग के ज्या (sin) फलन तथा कालाश्रित कला डोरी अवयव के दोलन के तद्नुरूपी होती है तथा तरंग का आयाम अवयव के विस्थापन के चरमों को निर्धारित करता है । नियतांक ϕ को **कला कोण** अथवा **कला स्थिरांक** कहते हैं । ϕ का मान अवयव ($x=0$ तथा $t=0$) के आरंभिक विस्थापन तथा वेग द्वारा निर्धारित होता है ।

मूल बिंदु ($x=0$) तथा आरंभिक क्षण ($t=0$) का इस प्रकार चुनाव सदैव ही संभव होता है कि $\phi=0$ । समीकरण (15.2) का उपयोग $\phi=0$ लेकर करने से व्यापकता का कोई ह्रास नहीं होता ।

15.3.2 तरंगदैर्ध्य तथा कोणीय तरंग संख्या

किसी तरंग की तरंगदैर्ध्य λ उस तरंग की आकृति की पुनरावृत्तियों के बीच की दूरी (तरंग-संचरण की दिशा के समांतर) होती है। यह तरंग गति के दो क्रमागत गर्तों अथवा शीर्षों अथवा समान कला वाले दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी होती है । चित्र 15.6(a) में समीकरण (15.2) के $t=0$ तथा $\phi=0$ के लिए आलेख में एक प्रतिरूपी तरंगदैर्ध्य दर्शायी गई है । इस समय पर समीकरण (15.2) निम्न स्वरूप ले लेता है,

$$y(x, 0) = y_m \sin kx \qquad (15.5)$$

परिभाषा के अनुसार, इस तरंगदैर्ध्य के दोनों सिरों पर विस्थापन y समान होता है, अर्थात् स्थितियों $x=x_1$ तथा $x=x_1+\lambda$ पर विस्थापन y समान है । इस प्रकार समीकरण (15.2) से,

$$y_m \sin k x_1 = y_m \sin k (x_1+\lambda)$$
$$= y_m \sin (k x_1+k\lambda)$$

यह शर्त केवल तभी संतुष्ट हो सकती है जब,

$$k\lambda = 2\pi n$$

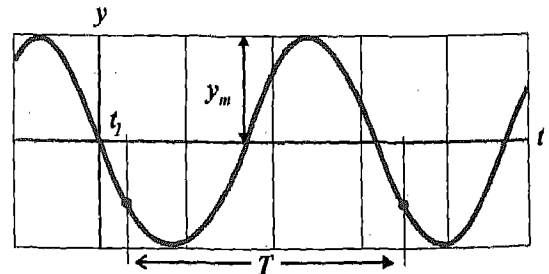
जहां $n = 1, 2, 3, ...$ । चूंकि λ को समान कला के बिंदुओं के बीच की अल्पतम दूरी द्वारा परिभाषित किया जाता है, अत: $n=1$ लेने पर

$$k = 2\pi/\lambda \qquad (15.6)$$

k को **संचरण स्थिरांक** अथवा **कोणीय तरंग संख्या** कहते हैं । इसका SI मात्रक रेडियन प्रति मीटर अथवा rad m^{-1} है ।

ध्यान देने योग्य बात यह है कि चित्र 15.6 में जब हम एक आलेख से दूसरे आलेख पर जाते हैं, तो तरंग दाईं ओर 1/4 λ के बराबर दूरी आगे बढ़ जाती है । इस प्रकार, आगे बढ़ते हुए जब हम पांचवें आलेख पर पहुंचते हैं तो तरंग λ के बराबर दूरी दाईं ओर चलकर आगे बढ़ जाती है ।

15.3.3 आवर्तकाल, कोणीय आवृत्ति तथा आवृत्ति

चित्र 15.7 में, समीकरण (15.2) के विस्थापन y का समय t के सापेक्ष डोरी के अनुदिश किसी निश्चित स्थिति, जिसे x=0 लिया है, का आलेख दर्शाया गया है । यदि आप डोरी को

चित्र 15.7 जब चित्र 15.6 की ज्यावक्रीय तरंग डोरी में से गुजरती है, तब x = 0 पर डोरी-अवयव के विस्थापन का समय के फलन के रूप में आलेख । इस आलेख में विस्थापन y_m दर्शाया गया है । किसी स्वेच्छ समय t_1 से मापा गया प्रतिरूपी आवर्तकाल भी दर्शाया गया है ।

मानीटर करें, तो आप यह पाएंगे कि उस स्थिति (x=0) पर डोरी का अवयव समीकरण (15.2) में दिए अनुसार ही ऊपर-नीचे सरल आवर्त गति करता है,

$$y\,(0,t) = y_m \sin(-\omega t)$$
$$= -y_m \sin \omega t$$

चित्र 15.7 इसी समीकरण का आलेख है। यह तरंग की आकृति नहीं दर्शाता।

किसी डोरी से गुजरने वाली तरंग के **आवर्तकाल** T को उस डोरी के किसी भी अवयव द्वारा एक दोलन पूरा करने में लिए गए समय के रूप में परिभाषित किया जाता है। चित्र 15.7 में एक प्रतिरूपी आवर्तकाल भी अंकित किया गया है। समीकरण (15.2) का प्रयोग इस समय-अंतराल के दोनों सिरों पर करने पर

$$-y_m \sin \omega t_1 = -y_m \sin \omega (t_1 + T)$$
$$= -y_m \sin (\omega t_1 + \omega T)$$

यह केवल तभी सही हो सकता है, यदि ωt का अल्पतम मान 2π हो, अथवा यदि

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (15.7)$$

ω को तरंग की **कोणीय आवृत्ति** कहते हैं। इसका SI मात्रक रेडियन प्रति सेकंड अथवा rad s^{-1} है।

चित्र 15.5 में दर्शाए गए प्रगामी तरंग के पांचों आलेखों पर पुनः दृष्टि डालिए। दो क्रमागत आलेखों के बीच समय अंतराल $T/4$ है। इस प्रकार, पांचवें आलेख तक प्रत्येक डोरी-अवयव एक संपूर्ण दोलन कर लेता है।

किसी तरंग की **आवृत्ति** f (अथवा ν) को $1/T$ के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा आवृत्ति f एवं कोणीय आवृत्ति ω में निम्नलिखित संबंध होता है,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (15.8)$$

जब कोई तरंग किसी डोरी से गुजरती है तो इस डोरी के किसी अवयव द्वारा एकांक समय में पूरे किए गए दोलनों की संख्या को तरंग की आवृत्ति कहते हैं। इसे प्रायः हर्ट्ज़ में मापते हैं, जिसका प्रतीक Hz है।

उपर्युक्त चर्चा में सदैव ही किसी डोरी के अनुदिश गतिशील तरंग अथवा अनुप्रस्थ तरंग का संदर्भ लिया गया है। अनुदैर्ध्य तरंग में माध्यम के किसी अवयव में तरंग संचरण की दिशा के समांतर विस्थापन होता है। समीकरण (15.2) में किसी अनुदैर्ध्य तरंग के लिए विस्थापन फलन इस प्रकार लिखा जाता है,

$$s(x,t) = s_m \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.9)$$

यहां $s(x, t)$ स्थिति x तथा समय t पर माध्यम के किसी अवयव का तरंग संचरण की दिशा में विस्थापन है। समीकरण (15.9) में s_m विस्थापन आयाम है। अन्य सभी राशियों के वही अर्थ हैं जो अनुप्रस्थ तरंग के प्रकरण में थे। केवल एक ही अंतर है कि विस्थापन फलन $y(x, t)$ के स्थान पर फलन $s(x, t)$ लिया गया है।

▶ ***उदाहरण 15.2 :*** किसी डोरी के अनुदिश गमन करती तरंग का विवरण इस प्रकार दिया गया है,

$$y(x,t) = 0.005 \sin(80.0\,x - 3.0\,t)$$

यहां आंकिक स्थिरांक SI मात्रकों में हैं (0.005 m, 80.0 rad/m तथा 3.0 rad/s)। तरंग का (a) आयाम, (b) तरंगदैर्ध्य (c) आवर्तकाल एवं आवृत्ति परिकलित कीजिए। दूरी x = 30.0 cm तथा समय t = 20 s पर तरंग का विस्थापन y भी परिकलित कीजिए।

हल : इस विस्थापन की तुलना समीकरण (15.2) से करने पर

$$y\,(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

हमें निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं,

(a) तरंग का आयाम = 0.005 m = 5 mm

(b) कोणीय तरंग संख्या = 80.0 rad/m तथा कोणीय आवृत्ति ω = 30 rad/s

अब हम समीकरण (15.6) के द्वारा तरंगदैर्ध्य λ तथा k में संबंध लिखते हैं

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{80.0\,\text{rad m}^{-1}} = 7.85\ \text{cm}$$

(c) अब हम नीचे दिए गए T तथा ω में संबंध द्वारा T का मान ज्ञात करते हैं,

$$T = 2\pi/\omega = \frac{2\pi\,\text{rad}}{3.0\,\text{rad s}^{-1}} = 2.09\ \text{s}$$

अब चूंकि आवृत्ति $f = 1/T$

$$= 0.48\ \text{Hz}$$

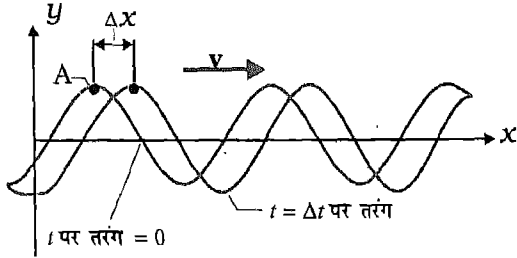
दूरी x=30.0 cm तथा समय t=20 s पर विस्थापन

$$y = 0.005 \sin\left(80.0 \times \frac{30}{100} - 3.0 \times 20\right)$$
$$= 0.005 \sin(-36\ \text{rad})$$
$$= 4.96\ \text{mm}$$

◀

15.4 प्रगामी तरंग की चाल

आइए, अब हम समीकरण (15.2) द्वारा निरूपित किसी डोरी के अनुदिश गमन करती प्रगामी तरंग के संचरण को मानीटर करें। यह तरंग x की धनात्मक दिशा में गमन करती है। हम यह पाते हैं कि एक विशिष्ट स्थिति x पर कोई डोरी अवयव समय के फलन के रूप में ऊपर-नीचे गति करता है, परंतु एक निर्दिष्ट तरंग-रूप दाईं ओर आगे बढ़ रहा है। चित्र 15.8 में दो

विभिन्न समयों, जिनके बीच Δt का लघु समय-अंतराल है, पर विभिन्न डोरी अवयवों के विस्थापनों की अवस्थाएं (कला कोण ϕ को शून्य मानकर) दर्शाई गई हैं । ध्यान से देखने पर यह पाया जाता है कि इस लघु समय-अंतराल Δt में समस्त तरंग पैटर्न धनात्मक दिशा में Δx दूरी चलता है । इस प्रकार तरंग x की धनात्मक दिशा में दाईं ओर गमन करती है। अनुपात $\Delta x/\Delta t$ को 'तरंग-चाल' $\mathbf{v}$ कहते हैं ।

चित्र 15.8 समीकरण (15.2) के दो क्षणों पर, जिनके बीच लघु समय अंतराल Δt है, आलेख - पहला $t=0$ पर तथा दूसरा $t=\Delta t$ पर । जब तरंग दाईं ओर वेग $\mathbf{v}$ से गमन करती है, तब समय-अंतराल Δt में समस्त वक्र Δx पर स्थानांतरित हो जाता है । बिंदु A तरंग रूप पर सवार रहता है परंतु डोरी अवयव केवल ऊपर-नीचे गति करता है ।

जब तरंग गमन करती है, तब उस गतिशील तरंग रूप का प्रत्येक बिंदु अपने विस्थापन y को सुरक्षित रखते हुए तरंग की विशिष्ट कला को निरूपित करता है (देखिए चित्र 15.8) । ध्यान देने योग्य बात यह है कि डोरी के बिंदु अपने विस्थापनों को सुरक्षित नहीं रखते, जबकि तरंग रूप के बिंदु ऐसा करते हैं। आइए, अब हम किसी बिंदु, जैसे तरंग रूप के शिखर पर अंकित बिंदु A पर विचार करते हैं । यदि तरंग की गति के समय तरंग रूप के बिंदु A की भांति कोई अन्य बिंदु अपने विस्थापन को सुरक्षित रहता है, तब समीकरण (15.2) के अनुसार यह तभी संभव हो सकता है जब कोणांक अचर हो । इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि,

$$kx - \omega t = \text{नियतांक} \qquad (15.10)$$

ध्यान दीजिए, कोणांक $(kx - \omega t)$ में x तथा t दोनों में परिवर्तन होता है । अत: कोणांक का मान नियत रखने के लिए यदि t बढ़ता है तो x भी बढ़ना चाहिए । यह केवल तभी संभव है जब तरंग x की धनात्मक दिशा में गति करे ।

तरंग-चाल ज्ञात करने के लिए आइए समीकरण (15.10) को समय के सापेक्ष अवकलित करें, तब

$$\frac{d}{dt}(kx-\omega t)=0$$

अथवा, $$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

अथवा, $$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \qquad (15.11)$$

समीकरणों (15.6)-(15.8) का उपयोग करके, हम लिख सकते हैं कि

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \qquad (15.12)$$

समीकरण (15.11) एक व्यापक संबंध है, जो सभी प्रगामी तरंगों के लिए वैध है । यह समीकरण केवल यह बताती है कि तरंग एक दोलनकाल में एक तरंगदैर्ध्य के बराबर दूरी तय करती है। किसी तरंग की चाल, समीकरण (15.12) द्वारा, उस तरंग की तरंगदैर्ध्य तथा आवृत्ति से संबंधित होती है, परंतु इसका निर्धारण, जिस माध्यम से तरंग गमन करती है उस माध्यम के गुणों द्वारा होता है । यदि किसी तरंग को किसी माध्यम जैसे वायु, जल, स्टील अथवा तानित डोरी, में गमन करना है, तो माध्यम में तरंग के गमन करते समय तरंग को उस माध्यम के कणों में दोलन उत्पन्न करने चाहिए । ऐसा तभी हो सकता है जब माध्यम में द्रव्यमान तथा प्रत्यास्थता हो। इसीलिए, तानित डोरियों जैसे रैखिक निकायों के प्रकरणों में घनत्व अथवा डोरी की प्रति एकांक लंबाई की द्रव्यमान तथा माध्यम के प्रत्यास्थ गुण यह निर्धारित करते हैं कि तरंगें उस माध्यम में कितनी तीव्रता से गति कर सकती हैं । विलोमत:, इन गुणों के प्रयोग से तरंग की चाल परिकलित करना संभव होना चाहिए । इस अध्याय के अनुवर्ती उपभागों में कुछ माध्यमों में यांत्रिक तरंगों की चाल के लिए हम विशिष्ट व्यंजक प्राप्त करेंगे ।

15.4.1 तानित डोरी पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल

किसी डोरी में गमन करती किसी अनुप्रस्थ तरंग की चाल का निर्धारण निम्न दो कारकों द्वारा होता है : (i) रैखिक द्रव्यमान घनत्व अथवा डोरी की प्रति एकांक लंबाई का द्रव्यमान μ, तथा (ii) तनाव T । द्रव्यमान की आवश्यकता का कारण यह है कि इन तरंगों में यांत्रिक ऊर्जा होती है तथा बिना तनाव के डोरी में विक्षोभ का संचरण संभव नहीं होता । किसी तानित डोरी में उत्पन्न अनुप्रस्थ तरंगों की चाल तथा ऊपर वर्णित दो प्राचलों (μ तथा T) में यथार्थ संबंध व्युत्पन्न करना इस पुस्तक के विषय-क्षेत्र से बाहर है । फिर भी हम इस संबंध को व्युत्पन्न करने की एक सरल विधि अपनाते हैं जो वास्तव में परिशुद्ध नहीं है । विमीय विश्लेषण के अध्ययन में हम परस्पर संबंधित भौतिक राशियों के बीच संबंध स्थापित करने की विधि सीख चुके हैं । फिर भी इस विधि द्वारा प्राप्त संबंध में स्थिरांक संबंधी अनिश्चितता रहती है ।

किसी डोरी का रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ उस डोरी का द्रव्यमान m को डोरी की लंबाई l से विभाजित करने पर प्राप्त होता है, अत: रैखिक द्रव्यमान घनत्व की विमा $[ML^{-1}]$ है । तनाव T तथा बल की एक ही विमा होती है, अत: तनाव की

विमा $[MLT^{-2}]$ है । हमारा उद्देश्य μ तथा T को इस प्रकार संयोजित करना है कि इन दोनों के संयोजन से चाल v की विमा $[LT^{-1}]$ उत्पन्न हो जाए। यदि हम इन राशियों की विमाओं को ध्यान से देखें, तो हम यह आसानी से देख सकते हैं कि अनुपात T/μ की विमा

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]}=[L^2T^{-2}]$$

प्राप्त होती हैं, जो चाल की विमा $[LT^{-1}]$ के वर्ग के बराबर है। अत:, यदि तरंग की चाल T तथा μ पर निर्भर करती है, तो इनमें यह संबंध होना चाहिए,

$$v=C\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.13)$$

यहां C विमाहीन स्थिरांक है, जिसे विमीय विश्लेषण द्वारा निर्धारित करना संभव नहीं है । और अधिक परिशुद्ध प्रक्रिया द्वारा यह दर्शाया जा सकता है कि C का वास्तविक मान 1 है। अत: तानित डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल

$$v=\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.14)$$

समीकरण (15.14) से हमें यह ज्ञात होता है, कि

किसी अनुप्रस्थ तरंग की किसी आदर्श तानित डोरी के अनुदिश चाल केवल उस डोरी में तनाव तथा डोरी के रैखिक द्रव्यमान घनत्व पर निर्भर करती है तथा यह तरंग की आवृत्ति पर निर्भर नहीं करती ।

तरंग की आवृत्ति का निर्धारण, उस तरंग को उत्पन्न करने वाले स्रोत द्वारा होता है । तब तरंग के तरंगदैर्ध्य का निर्धारण समीकरण (15.12) द्वारा निम्नलिखित रूप में होता है।

$$\lambda=\frac{v}{f} \qquad (15.15)$$

> *उदाहरण 15.3 :* 0.72 m लंबे किसी स्टील के तार का द्रव्यमान 5.0×10^{-3}kg है । यदि तार पर तनाव 60N है, तो तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल क्या है ?

हल: तार की प्रति एकांक लंबाई का द्रव्यमान

$$\mu=\frac{5.0\times10^{-3}\,\text{kg}}{0.72\,\text{m}}$$

$$= 6.9\times10^{-3}\,\text{kg m}^{-1}$$

तनाव, $T = 60\,N$

तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल,

$$v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}=\sqrt{\frac{60\text{ N}}{6.9\times10^{-3}\text{kg m}^{-1}}}=93\text{ m s}^{-1}$$ ◂

15.4.2 अनुदैर्ध्य तरंग की चाल - ध्वनि की चाल

किसी अनुदैर्ध्य तरंग में माध्यम के अवयव तरंग संचरण की दिशा में अग्रगामी तथा पश्चगामी दोलन करते हैं । हम पहले भी देख चुके हैं कि ध्वनि तरंगें वायु के लघु आयतन-अवयवों के संपीडनों तथा विरलनों के रूप में गमन करती हैं । दाब में परिवर्तन के कारण माध्यम के किसी अवयव के आयतन में होने वाले परिवर्तन का निर्धारण उस माध्यम के एक विशेष गुण द्वारा होता है। माध्यम के इस गुण को *आयतन प्रत्यास्थता गुणांक*, B कहते हैं जिसे इस प्रकार परिभाषित करते हैं, (अध्याय 10 देखिए)

$$B=-\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad (15.16)$$

यहां $\Delta V/V$ आयतन में उत्पन्न भिन्नात्मक परिवर्तन है जो दाब में परिवर्तन ΔP के कारण होता है । दाब का SI मात्रक $N\,m^{-2}$ है, जिसे एक विशेष नाम पास्कल (प्रतीक Pa) दिया गया है । समीकरण (15.15) से यह ज्ञात होता है कि B का मात्रक भी पास्कल ही है, तथा इसकी विमा भी दाब अथवा प्रति एकांक क्षेत्र पर बल की विमा अर्थात $[ML^{-1}T^{-2}]$ ही है । अब चूंकि किसी माध्यम में अनुदैर्ध्य तरंगों का संचरण संपीडन तथा विरलन अथवा घनत्व में परिवर्तन के रूप में होता है अत: तरंगों के संचरण की प्रक्रिया में माध्यम के जिस जड़त्वीय गुण को सम्मिलित किया जा सकता है वह माध्यम का घनत्व ρ ही है । घनत्व की विमा $[ML^{-3}]$ है । इस प्रकार, अनुपात B/ρ की विमा

$$\frac{[M\,L^{-1}\,T^{-2}]}{[M\,L^{-3}]}=[L^2\,T^{-2}] \qquad (15.17)$$

प्राप्त होती है, जो चाल की विमा $[LT^{-1}]$ के वर्ग के बराबर है ।

अत:, विमीय विश्लेषण के आधार पर प्राप्त किसी माध्यम में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल के लिए सर्वाधिक उपयुक्त व्यंजक को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं

$$v=C\sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (15.18)$$

यहां C एक विमाहीन स्थिरांक है तथा यह दर्शाया जा सकता है कि इसका मान 1 है । इस प्रकार किसी माध्यम में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त की जाती है ।

$$v=\sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (15.19)$$

अत:, किसी तरल में अनुदैर्ध्य तरंगों के संचरण की चाल केवल उस तरल के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक तथा घनत्व पर निर्भर करती है ।

जब किसी ठोस छड़ के एक सिरे पर कोई आघात करते हैं, तब स्थिति किसी अचर अनुप्रस्थ काट के सिलिंडर अथवा नली में भरे तरल से कुछ भिन्न होती है । इस प्रकरण के लिए,

प्रासंगिक प्रत्यास्थता गुणांक 'यंग प्रत्यास्था गुणांक' Y ही है। इसका कारण यह है कि छड़ की अनुप्रस्थ काट में प्रसार नगण्य होता है तथा केवल अनुदैर्ध्य विकृति पर ही विचार करने की आवश्यकता होती है। यह प्रमाणित किया जा सकता है कि छड़ में अनुदैर्ध्य तरंग की चाल निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त की जाती है,

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (15.20)$$

यहां Y छड़ के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक है।

सारणी 15.1 में विभिन्न माध्यमों में ध्वनि की चाल दर्शायी गई हैं।

सारणी 15.1 कुछ माध्यमों में ध्वनि की चाल

माध्यम	चाल (m s⁻¹)
गैसे	
वायु (0°C)	331
वायु (20°C)	343
हीलियम	965
हाइड्रोजन	1284
द्रव	
जल (0°C)	1402
जल (20°C)	1482
समुद्र-जल	1522
ठोस	
ऐलुमिनियम	6420
कॉपर (तांबा)	3560
स्टील	5941
ग्रेनाइट	6000
वल्केनाइज्ड रबर	54

यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि यद्यपि ठोसों तथा द्रवों के घनत्व गैसों के घनत्व की तुलना में कहीं अधिक हैं, तथापि ठोसों तथा द्रवों में ध्वनि की चाल गैसों की तुलना में अधिक है। इसका कारण यह है कि ठोसों व द्रवों में गैसों की तुलना में कम संपीडन होता है, अर्थात् ठोसों तथा द्रवों का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक गैसों की तुलना में बहुत अधिक होता है।

किसी आदर्श गैस के प्रकरण में, दाब P तथा आयतन V के बीच संबंध इस प्रकार व्यक्त किया जाता है (देखिए अध्याय 11),

$$PV = Nk_BT \qquad (15.21)$$

यहां N गैस में अणुओं की संख्या, k_B बोल्ट्ज़मान नियतांक तथा T गैस का केल्विन में ताप है। अतः किसी समतापी परिवर्तन के लिए समीकरण (15.21) द्वारा हमें यह संबंध प्राप्त होता है

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

अथवा $$-\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = P$$

अतः समीकरण (15.16) में यह मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$B = P$$

अतः किसी आदर्श गैस में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad (15.22)$$

इस संबंध को सर्वप्रथम न्यूटन ने स्थापित किया था, अतः इसे न्यूटन का सूत्र भी कहते हैं।

▶ *उदाहरण 15.4* मानक ताप एवं दाब (STP) पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए। वायु के 1 मोल का द्रव्यमान 29.0×10^{-3} kg है।

हल : हम जानते हैं कि किसी भी गैस के 1 मोल का STP पर आयतन 22.4 लीटर होता है। अतः वायु का STP पर घनत्व

$$\rho_0 = \frac{\text{1 मोल वायु का द्रव्यमान}}{\text{STP पर 1 मोल वायु का आयतन}}$$

$$= \frac{29.0 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{22.4 \times 10^{-3}\ \text{m}^3}$$

$$= 1.29\ \text{kg m}^{-3}$$

किसी माध्यम में ध्वनि की चाल के लिए न्यूटन के सूत्र के अनुसार हमें STP पर वायु में ध्वनि के वेग का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है,

$$v = \left[\frac{1.01 \times 10^5\ \text{N m}^{-2}}{1.29\ \text{kg m}^{-3}}\right]^{1/2} = 280\ \text{m s}^{-1} \qquad (15.23)$$

समीकरण (15.23) में प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल सारणी 15.1 में दिए गए प्रयोगों द्वारा प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल के मान 331 m s⁻¹ की तुलना में लगभग 15% कम है। आखिर हमसे कहां गलती हुई ? यदि हम न्यूटन की इस मूल कल्पना का परीक्षण करें जिसमें न्यूटन ने ध्वनि संचरण के समय माध्यम में दाब में परिवर्तन को समतापी माना, तो हम यह पाते हैं कि उनकी यह कल्पना सही नहीं थी। लाप्लास ने यह बताया कि ध्वनि संचरण के समय संपीडनों एवं विरलनों के कारण माध्यम में दाब-परिवर्तन इतनी तीव्र गति से होते हैं कि ऊष्मा प्रवाह के लिए ताप को स्थायी बनाए रखने का आवश्यक समय उपलब्ध नहीं हो पाता। फलस्वरूप ताप नियत नहीं रह पाता जिसके कारण दाब-परिवर्तन समतापी नहीं होते वरन् रुद्धोष्म (adiabatic) होते हैं। रुद्धोष्म प्रक्रियाओं (adiabatic processes) के लिए आदर्श गैसों पर निम्न संबंध लागू होता है

$$PV^{\gamma} = \text{स्थिरांक}$$

अर्थात् $\Delta (PV^{\gamma}) = 0$

$$P\gamma V^{\gamma-1} \Delta V + V^{\gamma} \Delta P = 0$$

इस प्रकार, आदर्श गैस के लिए रुद्धोष्म आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

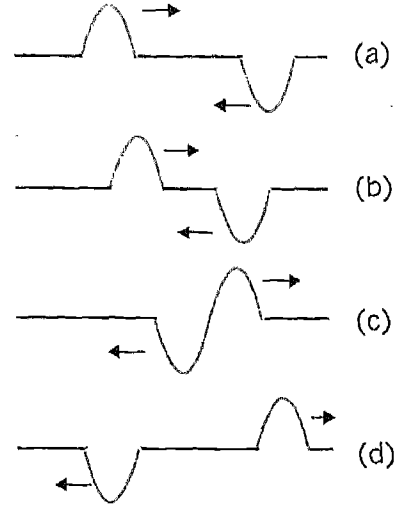
$$B_{ad} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \gamma P$$

यहां γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात, अर्थात् C_p/C_v है । अतः वायु में ध्वनि की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (15.24)$$

न्यूटन के सूत्र में लाप्लास द्वारा की गई इस संशुद्धि को **लाप्लास संशोधन** कहते हैं । वायु के लिए $\gamma = 7/5$, अतः अब यदि हम STP पर वायु में ध्वनि की चाल के आकलन के लिए समीकरण (15.24) का प्रयोग करें तो हमें वायु में STP पर ध्वनि की चाल का मान 331.3 m s^{-1} प्राप्त होता है, जो मापित चाल से मेल खाता है । ◀

15.5 तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत

प्रायः ऐसा होता है कि एक ही क्षण में एक ही क्षेत्र से दो या अधिक तरंगें गमन करती हैं । उस समय तरंग की आकृति कैसी होती है जब विपरीत दिशाओं में गमन करते दो तरंग स्पंद आमने-सामने होकर एक दूसरे को पार करते हैं । जब हम किसी संगीत समारोह में कार्यक्रम सुनते हैं, तब हमारे कर्ण पटलों से एक ही क्षण कई वाद्य यंत्रों से उत्पन्न ध्वनियां टकराती हैं । झीलों तथा बंदरगाहों पर बहुत-सी नौकाओं द्वारा उत्पन्न तरंगों के कारण पानी हिलता रहता है । तब हमारे मस्तिष्क में यह प्रश्न उठना स्वाभाविक ही है कि ऐसी परिस्थितियों में माध्यम किस प्रकार प्रतिक्रिया करता है । इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए हम एक ऐसी स्थिति पर विचार करते हैं जिसमें एक ही तानित डोरी के अनुदिश एक ही क्षण विपरीत दिशाओं में दो तरंगें गमन करती हैं । चित्र 15.9 में विभिन्न समयों पर भिन्न-भिन्न डोरी अवयवों के विस्थापनों की अवस्था को क्रमवार चित्रित करके दर्शाया गया है । प्रत्येक चित्र में किसी दिए गए क्षण पर डोरी में परिणामी तरंग रूप दर्शाया गया है । यह पाया गया है कि **किसी दिए गए समय पर किसी डोरी अवयव का नेट विस्थापन प्रत्येक तरंग के कारण उस डोरी अवयव में विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है** । नेट विस्थापन निर्धारित करने के लिए पृथक्-पृथक् तरंग रूपों को इस प्रकार जोड़ना **अध्यारोपण का सिद्धांत** कहलाता है । इस नियम को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए, मान लीजिए $y_1(x, t)$ तथा $y_2(x, t)$ किसी भी डोरी अवयव के ऐसे विस्थापन हैं, जो यदि तरंगें अलग-अलग डोरी से गमन करतीं तो उस अवयव के होते । यदि दो तरंगें किसी डोरी अवयव पर अतिव्यापित होती हैं तो उस डोरी अवयव का अतिव्यापन के समय विस्थापन $y'(x, t)$ इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

चित्र 15.9 किसी तानित डोरी के अनुदिश विपरीत दिशाओं में गमन करते दो स्पंदों के चित्रों का अनुक्रमित चित्रण । ये स्पंद (a) से (d) में दर्शाए गए समय-आशुचित्रों के अनुक्रम द्वारा परस्पर मिलते हैं, एक दूसरे को पार करते हैं तथा स्वतंत्रतापूर्वक आगे बढ़ जाते हैं । कुल विक्षोभ प्रत्येक स्पंद के कारण विस्थापनों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है । जब दो विक्षोभ अतिव्यापित होते हैं, तब वे चित्र (c) में दर्शाए अनुसार एक जटिल पैटर्न की सृष्टि करते हैं । चित्र (d) में वे एक दूसरे को पार करके अपनी आकृति में बिना किसी परिवर्तन के आगे बढ़ते हैं ।

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \qquad (15.25)$$

तरंगों के अध्यारोपण के सिद्धांत को इस प्रकथन द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है कि **अतिव्यापित तरंगें बीजगणितीय रूप से जुड़कर परिणामी तरंग (अथवा नेट तरंग) उत्पन्न करती हैं** । इस सिद्धांत में यह तथ्य अंतर्निहित है कि तरंगों का अतिव्यापन किसी भी तरह से एक दूसरे के गमन को परिवर्तित नहीं करता ।

यदि किसी माध्यम से एक ही क्षण दो अथवा अधिक तरंगें गमन कर रहीं हैं तो उनका परिणामी तरंग रूप दोनों तरंगों के पृथक्-पृथक् तरंग फलनों का योग होता है । अर्थात् यदि गतिशील तरंगों के तरंग-फलन इस प्रकार हैं,

$y_1 = f_1(x - vt)$,

$y_2 = f_2(x - vt)$,

....

....

$y_n = f_n(x - vt)$,

तब माध्यम में विक्षोभ का वर्णन करने वाला तंरग फलन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$y = f_1(x - vt) + f_2(x - vt) + \dots\dots\dots + f_n(x - vt)$$

$$= \sum_1^n f_i(x - vt) \qquad (15.26)$$

इस सिद्धांत की व्याख्या के रूप में अब हम व्यतिकरण की परिघटना तथा तरंगों के परावर्तन का अध्ययन करेंगे ।

15.6 तरंगों का व्यतिकरण

आइए, अब हम किसी तानित डोरी के अनुदिश एक ही दिशा में समान तरंगदैर्ध्य तथा समान आयाम की दो तरंगें भेजते हैं । इसमें ऊपर वर्णित अध्यारोपण का सिद्धांत लागू होता है । फिर भी डोरी के अनुदिश संचरित परिणामी तरंग उस विस्तार पर निर्भर करती है जिस पर दोनों तरंगें 'एक ही कला' (समकला) में होती हैं। यदि दोनों तरंगें यथार्थता से एक ही कला (प्रावस्था) में हैं, अर्थात् एक तरंग के शीर्ष व गर्त (घाटी) दूसरी तरंग के शीर्ष व गर्त (घाटी) पर यथार्थतापूर्वक संरेखित हो जाते हैं, तो वे संयोजित होकर प्रत्येक तरंग के अपने-अपने विस्थापनों की, दो गुनी विस्थापित हो जाती हैं । यदि दोनों तरंगों की कलाएं एक दूसरे के ठीक विपरीत हैं तो एक तरंग का शीर्ष दूसरी तरंग की घाटी पर पड़ता है, तो वे संयोजित होकर हर स्थान पर एक दूसरे को निरसित करती हैं, तथा वह डोरी बिल्कुल भी विक्षुब्ध प्रतीत नहीं होती; वह स्थिर अथवा सीधी रहती है । तरंगों को इस प्रकार संयोजित करने की परिघटना को **व्यतिकरण** कहते हैं तथा व्यतिकरण करती तरंगों को **व्यतिकारी तरंगें** कहते हैं । (यह तरंगों के विस्थापनों पर लागू होता है, तरंग की यात्रा अप्रभावित रहती है) । ऊपर जो कुछ भी कहा गया है वह अनुदैर्ध्य तरंगों पर भी लागू होता है ।

मान लीजिए किसी तानित डोरी के अनुदिश गमन करने वाली किसी एक तरंग को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) \qquad (15.27)$$

तथा दूसरी तरंग जो पहले से स्थानांतरित है, को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.28)$$

इन दोनों तरंगों की कोणीय आवृत्तियां समान हैं (अर्थात् आवृत्तियां f समान हैं), कोणीय तरंग संख्या k समान हैं (अर्थात् समान तरंगदैर्ध्य हैं), तथा समान आयाम y_m हैं । ये दोनों तरंगें ही x-अक्ष की धनात्मक दिशा में समान चाल से गमन करती हैं । किसी दिए गए समय तथा दूरी पर उनकी कलाओं में एक नियत कोण ϕ का अंतर है, जिसे कला-नियतांक कहते हैं । इन दोनों तरंगों को कोण ϕ द्वारा कला से बाहर (कला असंगत) कहा जाता है अथवा ऐसा भी कहा जाता है कि दोनों में ϕ कलांतर है ।

अब अध्यारोपण के सिद्धांत का प्रयोग करने पर, परिणामी तरंग दोनों व्यतिकारी तरंगों का बीजगणितीय योग होती है जिसका विस्थापन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$y'(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.29)$$

त्रिकोणमिति द्वारा हम यह जानते हैं कि

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \qquad (15.30)$$

इस संबंध का प्रयोग समीकरण (15.29) में करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$y'(x,t) = \left[2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right) \qquad (15.31)$$

समीकरण (15.31) यह दर्शाती है कि परिणामी तरंग भी, चित्र 15.10 में दर्शाए अनुसार x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गमन करने वाली एक ज्यावक्रीय तरंग होती है ।

$$\underbrace{y'(x, t)}_{\text{विस्थापन}} = \underbrace{[2 y_m \cos\phi/2]}_{\text{आयाम}} \quad \underbrace{\sin(kx = -\omega t + \phi)}_{\text{दोलनी-पद}}$$

चित्र 15.10 दो ज्यावक्रीय अनुप्रस्थ तरंगों के व्यतिकरण से प्राप्त समीकरण (15.31) की परिणामी तरंग की ज्यावक्रीय तरंग होती है जिसका एक पद आयाम तथा दूसरा पद दोलनी होता है ।

यह परिणामी तरंग व्यतिकारी तरंगों से दो बातों में भिन्न होती है : (1) इसका कलांतर $\phi/2$ है तथा (2) इसका आयाम एक राशि है जिसे समीकरण (15.31) में गुरु कोष्ठक [ ] में दिखाया गया है

$$y'_m = 2y_m \cos\frac{1}{2}\phi \qquad (15.32)$$

यदि $\phi = 0$, अर्थात् दोनों तरंगें समान कला (प्रावस्था) में हैं, तब समीकरण (15.31) के अनुसार

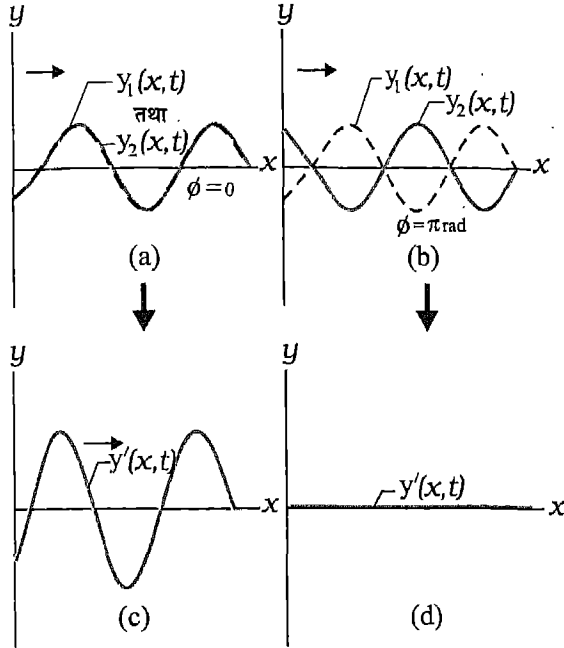
$$y'(x, t) = 2y_m \sin(kx - \omega t) \qquad (15.33)$$

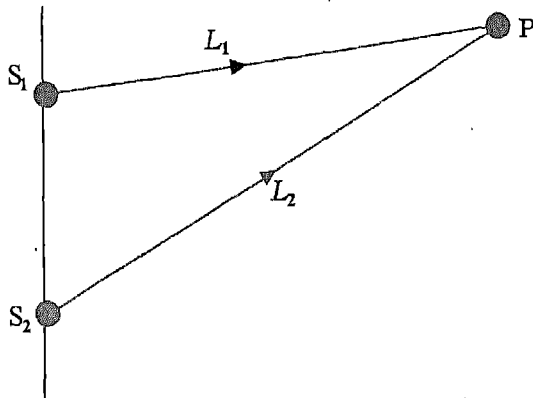
परिणामी तरंग का आयाम $2y_m$, जो संभावित आयामों में अधिकतम है । ऐसा व्यतिकरण जो अधिकतम आयाम उत्पन्न करता है **पूर्णतः संपोषी व्यतिकरण** कहलाता है ।

यदि $\phi = \pi$ रेडियन (अथवा 180°) है, तो दोनों तरंगें पूर्णतः एक दूसरे से विपरीत कलाओं में होती हैं, तथा समीकरण (15.32) में दिए अनुसार परिणामी तरंग का आयाम शून्य होता है । तब हमें x तथा t के सभी मानों के लिए परिणामी तरंग का विस्थापन शून्य प्राप्त होता है,

$$y'(x, t) = 0 \qquad (15.34)$$

इस प्रकार के व्यतिकरण को **पूर्णतः विनाशी व्यतिकरण** कहते हैं ।

चित्र 15.11 में पूर्णतः संपोषी तथा पूर्णतः विनाशी व्यतिकरणों की व्याख्या की गई है ।

चित्र 15.11 किसी तानित डोरी के अनुदिश x-अक्ष की धनात्मक दिशा में दो सर्वसम ज्यावक्रीय तरंगें, $y_1(x, t)$ तथा $y_2(x, t)$ गमन करती हैं । ये दोनों तरंगें व्यतिकरण करके परिणामी तरंग, $y'(x, t)$ देती हैं, दोनों तरंगों के बीच कलांतर (a) 0 रेडियन (अथवा 0°) तथा (b) π रेडियन (अथवा 180°) है । (c) तथा (d) में तद्नुरूपी परिणामी तरंगें दर्शायी गई हैं ।

अनुप्रस्थ तरंगों की भांति ध्वनि तरंगों का भी व्यतिकरण हो सकता है । आइए एक ही दिशा में गमन करतीं दो सर्वसम ध्वनि तरंगों के बीच व्यतिकरण पर विचार करें । चित्र 15.12 में दर्शाए अनुसार, S_1 तथा S_2 पर अवस्थित दो ध्वनि स्रोत, ध्वनि तरंगें उत्सर्जित करते हैं जो एक ही कला में हैं तथा

चित्र 15.12 दो बिंदु स्रोतों S_1 तथा S_2 एक ही कला में ध्वनि तरंगें उत्सर्जित करते हैं । यहां किरणें यह संकेत करती हैं कि ये तरंगें एक उभयनिष्ठ बिंदु P से गुजरती हैं ।

उनकी तरंगदैर्ध्य λ सर्वसम हैं । दोनों स्रोतों S_1 तथा S_2 से सर्वसम विस्थापनों की तरंगें निकलती हैं और एक उभयनिष्ठ बिंदु P से गुजरती हैं । स्रोतों से बिंदु P की दूरी दोनों स्रोतों के बीच की दूरी की तुलना में अत्यधिक है, अतः जब दोनों तरंगें बिंदु P पर पहुंचती हैं तब हम यह कह सकते हैं कि सन्निकटः ये दोनों तरंगें एक ही दिशा में गमन करती हैं ।

स्रोतों S_1 तथा S_2 से तरंगों द्वारा बिंदु P तक पहुंचने में चली गई पथ-लंबाइयां क्रमशः S_1P तथा S_2P हैं । यदि दोनों पथ-लंबाइयां एकदम बराबर हैं, तब दोनों तरंगें बिंदु P पर एक ही कला में होंगी तथा व्यतिकरण पूर्णतः संपोषी होगा । चित्र 15.12 में दर्शाए प्रकरण में, पथ-लंबाई S_2P, S_1P की तुलना में अधिक है । दोनों पथ-लंबाइयों में अंतर होने के कारण बिंदु P पर एक ही कला में नहीं पहुंचेगीं । बिंदु P पर कलांतर ϕ, तरंगों की पथ-लंबाइयों में अंतर $\Delta L = |S_2P - S_1P|$ पर निर्भर करता है ।

कलांतर ϕ तथा पथ-लंबाई-अंतर ΔL में संबंध दिखलाने के लिए, याद कीजिए, 2π रेडियन का कलांतर λ पथ-लंबाई-अंतर के तदनुरूपी होता है । इस प्रकार,

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda} \tag{15.35}$$

अथवा, $$\phi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L \tag{15.36}$$

पूर्णतः संपोषी व्यतिकरण तब होता है जब $\phi = 0$, अथवा 2π का पूर्णांकीय गुणज हो । इस शर्त को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\phi = n(2\pi) \tag{15.37}$$

$n = 0, 1, 2, 3.....$के लिए (पूर्णतः संपोषी व्यतिकरण)

समीकरण (15.36) से यह तब होता है जब,

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0, 1, 2, 3......... \tag{15.38}$$

(पूर्णतः संपोषी व्यतिकरण)

पूर्णतः संपोषी व्यतिकरण तब होता है जब पथ-लंबाई-अंतर या तो शून्य होता है अथवा λ का पूर्णांकीय गुणज होता है ।

पूर्णतः विनाशी व्यतिकरण तब होता है जब λ, π का विषम गुणज होता है, इस शर्त को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\phi = (2n + 1)\pi \tag{15.39}$$

$n = 0, 1, 2, 3 ....$ के लिए (पूर्णतः विनाशी व्यतिकरण)

समीकरण (15.36) से, यह तभी होता है जब

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{15.40}$$

$n = 0, 1, 2, 3 ....$ के लिए (पूर्णतः विनाशी व्यतिकरण)

पूर्णतः विनाशी व्यतिकरण तब होता है जब पथ-लंबाई अंतर λ का अर्ध पूर्णांकीय गुणज होता है ।

वास्तव में, दो तरंगें मध्यवर्ती व्यतिकरण भी उत्पन्न करती हैं जो पथ-लंबाई-अंतर पर निर्भर करता है तथा उन प्रकरणों में कलांतर ϕ का निर्धारण समीकरण (15.36) द्वारा और परिणामी तरंग का निर्धारण समीकरण (15.31) द्वारा किया जाता है ।

▶ *उदाहरण 15.5* किसी तानित डोरी के अनुदिश एक ही दिशा में गतिशील दो सर्वसम ज्यावक्रीय तरंगें एक दूसरे से व्यतिकरण करती हैं । प्रत्येक तरंग का आयाम 10.0 mm है तथा उन तरंगों के बीच कलान्तर 80° है । परिणामी तरंग का आयाम कितना है तथा व्यतिकरण की प्रकृति क्या है ?

हल : चूंकि दोनों तरंगें सर्वसम हैं, इनके आयाम समान हैं । समीकरण (15.32) से परिणामी तरंग का आयाम y'_m है :

$$y'_m = 2y_m \cos\frac{1}{2}\phi = 2 \times (10.0 \text{ mm}) \cos\left(\frac{80^0}{2}\right)$$

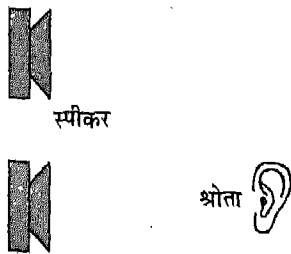
$$= 2 \times 10.0 \times 0.766 \text{ mm}$$

$$= 15.32 \text{ mm}$$

चूंकि परिणामी आयाम 0 तथा $2y_m$ के बीच है, इसलिए व्यतिकरण मध्यवर्ती है । ◀

▶ *उदाहरण 15.6* दो ध्वनि विस्तारक यंत्र नीचे चित्र 15.13 में दर्शाए अनुसार एक दूसरे से 1.5 m की दूरी पर स्थित हैं तथा एक ही कला में हैं । यह मानते हुए कि स्पीकरों से निकलने वाली ध्वनियों के आयाम श्रोता की स्थिति पर, जो कि किसी एक स्पीकर के सामने 4.0 m दूरी पर है, सन्निकटतः समान हैं। यह ज्ञात कीजिए कि श्रव्य परास (20 Hz से 20 kHz) की किन आवृत्तियों के लिए श्रोता न्यूनतम संकेत सुनेगा । वायु में ध्वनि की चाल 330 m s^{-1} है ।

स्पीकर

श्रोता

चित्र 15.13

हल : दूसरे स्पीकर से श्रोता की दूरी $= (1.5 \text{ m} \times 1.5 \text{ m} + 4 \text{ m} \times 4 \text{ m})^{1/2} = 4.27 \text{ m}$

पथ-लंबाई-अंतर $= (4.27 - 4.0) \text{ m} = 0.27 \text{ m}$

पूर्णतः विनाशी व्यतिकरण के लिए समीकरण (15.40) से

$0.27 \text{ m} = (2n + 1) \lambda/2$

अतः $\lambda = 0.54/(2n + 1) \text{ m}$

इसके तदनुरूपी आवृत्तियां

$\nu = 330 \times (2n + 1)/0.54 \text{ s}^{-1}$ $\quad (n = 0, 1, 2, 3....)$

अथवा $\nu = 611.1\ (2n + 1) \text{ Hz}$ $\quad (n = 0, 1, 2, 3....)$

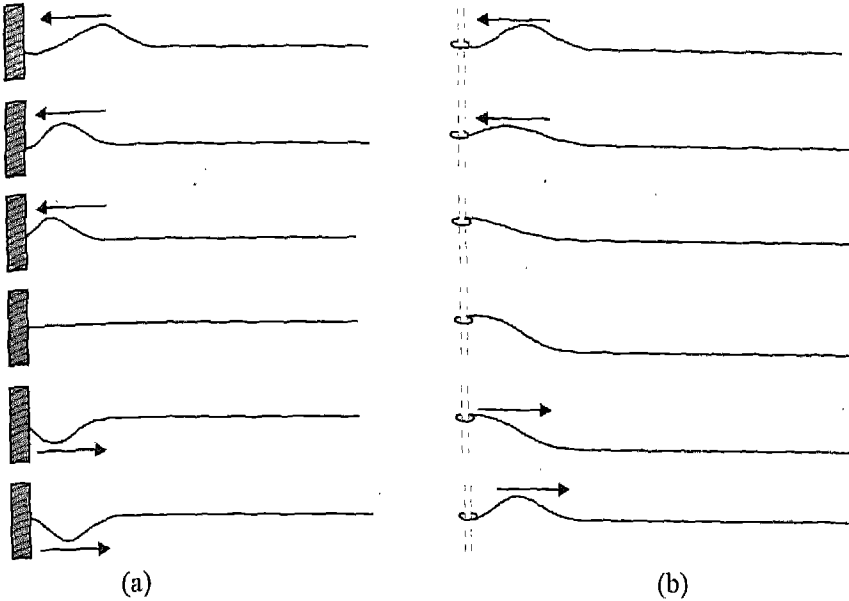
अतः द्रव्य परास की वे आवृत्तियां जिनके संकेत श्रोता को न्यूनतम सुनाई देंगे

0.611 kHz, 1.833 kHz, 3.056 kHz, 4.278 kHz, 5.500 kHz, ... 18.941 kHz हैं । ◀

15.7 तरंगों का परावर्तन

पिछले अनुभागों में हमने अपरिबद्ध माध्यमों में तरंग संचरण की चर्चा की । क्या होता है जब कोई स्पंद अथवा प्रगामी तरंग किसी दृढ़ परिसीमा का सामना करती है ? यह हमारा सामान्य अनुभव है कि ऐसी स्थिति में स्पंद अथवा तरंग परावर्तित हो जाती है । किसी दृढ़ परिसीमा से ध्वनि तरंगों का टकराना तथा टकराने के पश्चात् परावर्तित ध्वनि सुनाई देना, अर्थात् प्रतिध्वनि की परिघटना तरंगों के परावर्तन का एक दैनिक जीवन का उदाहरण है । यदि परिसीमा पूर्णतः दृढ़ नहीं है अथवा वह किन्ही दो भिन्न प्रत्यास्थ माध्यमों के बीच अंतरापृष्ठ है, तो आपतित स्पंदों अथवा तरंगों पर परिसीमा-शर्तों का प्रभाव कुछ जटिल हो जाता है । इस स्थिति में आपतित तरंग का कुछ भाग परावर्तित हो जाता है तथा कुछ भाग दूसरे माध्यम में पारगमित हो जाता है । यदि कोई तरंग दो भिन्न माध्यमों की परिसीमा पर तिरछी आपतित होती है तो पारगमित तरंग को **अपवर्तित तरंग** कहते हैं । आपतित एवं अपवर्तित तरंगें स्नेल के अपवर्तन के नियमों का पालन करती हैं, तथा आपतित एवं परावर्तित तरंगें परावर्तन के सामान्य नियमों का पालन करती हैं ।

परिसीमा पर तरंगों के परावर्तन की व्याख्या करने के लिए हम दो स्थितियों पर विचार करते हैं । पहला, जिसमें डोरी का बायां सिरा चित्र 15.14(a) में दर्शाए अनुसार एक दृढ़ दीवार से जुड़ा है । दूसरा, जिसमें डोरी के बाएं सिरे को किसी ऐसे छल्ले से बांधा गया है, जो चित्र 15.14(b) में दर्शाए अनुसार किसी छड़ पर ऊपर-नीचे बिना किसी घर्षण के सरक सकता है । इन दोनों ही डोरियों में जब कोई स्पंद संचरित किया जाता है तब यह स्पंद डोरी के बाएं सिरे पर पहुंचकर परावर्तित हो जाता है । डोरी में विभिन्न समयों पर होने वाले विक्षोभ की अवस्थाओं को चित्र 15.14 में दर्शाया गया है ।

हो जाता है । अतः इस प्रकार के परावर्तन में आपतित व परावर्तित स्पंद एक-दूसरे को प्रबलित करते हैं, फलस्वरूप डोरी के इस सिरे पर प्रस्पंद उत्पन्न होता है । इस स्थिति में छल्ले का विस्थापन अधिकतम होता है। यह विस्थापन आपतित स्पंद अथवा परावर्तित स्पंद के आयाम का दो गुना होता है, अतः इस परावर्तन में कला में कोई अंतर नहीं उत्पन्न होता । प्रगामी तरंगों के प्रकरण में जब परावर्तन खुली परिसीमा जैसे किसी आर्गन-पाइप के खुले सिरे, पर होता है, तब परावर्तन के समय कला में कोई परिवर्तन नहीं होता ।

(a) (b)

चित्र 15.14(a) दाईं ओर से आपतित कोई स्पंद डोरी के बाएं सिरे से, जो दीवार से जुड़ा है, परावर्तित होता है। ध्यान दीजिए, परावर्तित स्पंद आपतित स्पंद का उल्टा है । (b) इसमें डोरी का बायां सिरा एक ऐसे छल्ले से जो किसी छड़ पर ऊपर-नीचे बिना किसी घर्षण के सरक सकता है, बंधा है । ध्यान दीजिए, इस स्थिति में परावर्तित स्पंद उल्टा नहीं है ।

चित्र 15.14(a) में डोरी का बायां सिरा दीवार से जुड़ा है। जब स्पंद इस सिरे पर पहुंचता है, तो वह दीवार पर ऊपर की दिशा में बल आरोपित करता है । न्यूटन के तीसरे नियम के अनुसार, दीवार डोरी पर परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत बल आरोपित करती है । यह दूसरा बल टेक (दीवार) पर स्पंद उत्पन्न करता है जो वापस डोरी के अनुदिश आपतित स्पंद की विपरीत दिशा में गमन करता है । इस प्रकार के परावर्तन में, चूंकि डोरी टेक से जुड़ी है, इसलिए टेक पर 'निस्पंद' बनना चाहिए । परावर्तित तथा आपतित स्पंदों के चिह्न विपरीत होने चाहिए ताकि टेक पर ये एक दूसरे को निरस्त कर सकें । इस प्रकार प्रगामी तरंगों का सुदृढ़ परिसीमा पर परावर्तन कला में उत्क्रमण अर्थात् 180° अथवा π रेडियन के कलांतर के साथ होता है ।

चित्र 15.14(b) में डोरी एक ऐसे छल्ले से बंधी है जो किसी छड़ पर बिना किसी घर्षण के ऊपर-नीचे सरक सकता है । इस स्थिति में जब स्पंद डोरी के बाएं सिरे पर पहुंचता है, तो छल्ला छड़ पर ऊपर की ओर सरक जाता है । ऊपर की ओर जाते समय छल्ला डोरी को अपनी ओर खींचता है, फलस्वरूप डोरी तन जाती है और उसमें आपतित स्पंद के आयाम के बराबर आयाम एवं चिह्न का परावर्तित स्पंद उत्पन्न

किसी परिसीमा अथवा दो भिन्न माध्यमों के बीच अंतरापृष्ठ से तरंगों के परावर्तन को सारांश में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

किसी प्रगामी तरंग का किसी दृढ़ परिसीमा अथवा बंद सिरे पर परावर्तन कला-उत्क्रमण के साथ होता है, परंतु किसी खुली परिसीमा पर यह परावर्तन बिना किसी कला-परिवर्तन के होता है ।

उपरोक्त प्रकथन को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए, मान लीजिए आपतित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_i(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

तब, सुदृढ़ परिसीमा से परावर्तन के लिए, परावर्तित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_r(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t + \pi)$$

$$= -y_m \sin(kx + \omega t) \qquad (15.41)$$

किसी खुली परिसीमा से परावर्तन के लिए, परावर्तित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_r(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t) \qquad (15.42)$$

15.7.1 अप्रगामी तरंगें तथा प्रसामान्य विधाएं

पिछले अनुभाग में हमने एक सिरे पर परिसीमित निकाय पर विचार किया । आइए, अब हम किसी ऐसे निकाय पर विचार करें जिसके दोनों सिरे परिसीमित हों, जैसे दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी अथवा परिमित लंबाई का वायु कॉलम । मान लीजिए कि इस प्रकार के निकाय में हम किसी निश्चित आवृत्ति की कोई सतत् ज्यावक्रीय तरंग दाईं ओर भेजते हैं । जब यह तरंग दाएं सिरे पर पहुंचती है, तो यह परावर्तित होकर वापस लौटना आरंभ कर देती है । बाईं ओर गमन करती यह तरंग, दाईं ओर पहले से ही गमन कर रही तरंग पर अतिव्यापित हो जाती

है । जब बाईं ओर गमन करती तरंग बाएं सिरे पर पहुंचती है, तो यह पुनः परावर्तित होती है तथा इस प्रकार बनी नई परावर्तित तरंग दाईं ओर गमन करना आरंभ कर देती है और बाईं ओर गमन करने वाली तरंग पर अतिव्यापित हो जाती है। यह प्रक्रिया सतत् चलती रहती है, अतः बहुत ही शीघ्र माध्यम में बहुत-सी अतिव्यापित तरंगें हो जाती हैं जो एक दूसरे के साथ व्यतिकरण करती हैं । इस प्रकार के निकाय में, किसी बिंदु x पर तथा किसी क्षण t पर सदैव ही दो तरंगें होती हैं, जिनमें एक बाईं ओर गमन करती है जबकि दूसरी दाईं ओर। यदि हम इन तरंगों को इस प्रकार व्यक्त करें,

$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$ [x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गमन करती तरंग]

तथा $y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t)$ [x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में गमन करती तरंग]

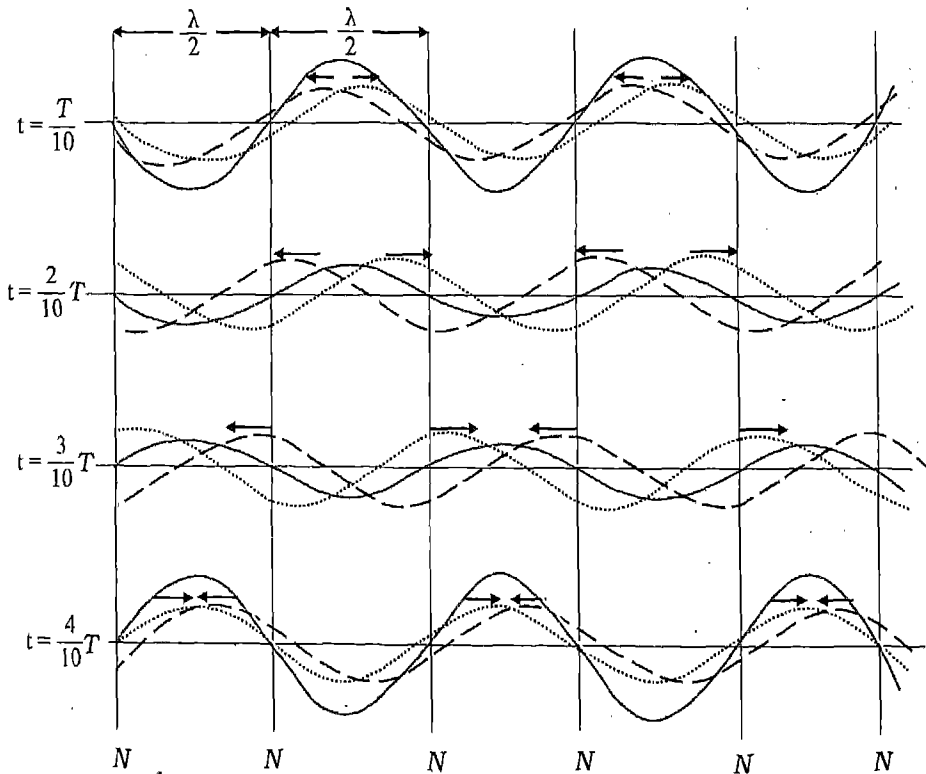
तब, अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार प्राप्त संयोजित तरंग इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$\begin{aligned} y'(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) \\ &= (2\, y_m \sin kx) \cos \omega t \end{aligned} \qquad (15.43)$$

समीकरण (15.43) द्वारा निरूपित तरंग किसी प्रगामी तरंग का वर्णन नहीं करती, चूंकि इस तरंग का तरंग रूप अथवा विक्षोभ किसी भी दिशा में गमन नहीं करता । यहां कोष्ठक में दी गई राशि $2\, y_m \sin kx$ स्थिति x पर अवस्थित डोरी अवयव के दोलन का आयाम है । इसके विपरीत, प्रगामी तरंग में सभी डोरी अवयवों का आयाम समान होता है । अतः समीकरण (15.43) **अप्रगामी तरंग** को, जिसमें तरंग रूप गमन नहीं करता, निरूपित करती है । चित्र 15.15 में इन तरंगों के निर्माण को निदर्शित किया गया है ।

यह देखा गया है कि अधिकतम अथवा न्यूनतम आयाम के बिंदु एक ही स्थिति पर स्थिर रहते हैं ।

kx के जिन मानों के लिए $\sin kx$ शून्य होता है, उन सभी स्थानों पर आयाम शून्य होता है अर्थात् शून्य आयाम के लिए,

$$kx = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

चित्र 15.15 तानित डोरी में अप्रगामी तरंग का निर्माण । समान आयाम की दो ज्यावक्रीय तरंगें विपरीत दिशाओं में डोरी के अनुदिश गमन करती हैं । इसमें चित्रों का सेट चार भिन्न समयों पर विस्थापनों की अवस्थाओं को निरूपित करता है । जिन स्थितियों पर N अंकित है वहां हर समय विस्थापन शून्य होता है। इन स्थितियों को निस्पंद कहते हैं ।

इस समीकरण में $k = 2\pi/\lambda$ लिखने पर

$$x = n\frac{\lambda}{2} \quad (15.44)$$

($n = 0, 1, 2, 3...$) के लिए

शून्य आयाम की स्थितियों को निस्पंद कहते हैं। ध्यान दीजिए, दो क्रमागत निस्पंदों के बीच की दूरी $\frac{\lambda}{2}$ अथवा आधी तरंगदैर्ध्य के बराबर होती है।

kx के जिन मानों के लिए $|\sin kx| = 1$ होता है, उन स्थानों पर आयाम का मान अधिकतम अर्थात् $2y_m$ होता है, अर्थात् अधिकतम आयाम के लिए

$$kx = (n + \frac{1}{2})\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3...)$$

इस समीकरण में $k = 2\pi/\lambda$ लिखने पर

$$x = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \quad (15.45)$$

($n = 0, 1, 2, 3...$) के लिए

अधिकतम आयाम की स्थितियों को प्रस्पंद कहते हैं। ध्यान दीजिए, दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है तथा दो क्रमागत निस्पंदों के मध्य में एक प्रस्पंद स्थित होता है।

दोनों सिरों पर परिबद्ध L लंबाई की तानित डोरी के दोनों सिरों पर निस्पंद होते हैं। यदि दोनों सिरों में से किसी एक सिरे की स्थिति को $x = 0$ चुनें, तब दूसरे सिरे की स्थिति $x = L$ होती है। यदि यह सिरा निस्पंद है, तो लंबाई L को निम्नलिखित शर्त का पालन करना चाहिए,

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad (15.46)$$

($n = 1, 2, 3...$) के लिए

इस शर्त से यह ज्ञात होता है कि L लंबाई की डोरी पर सीमित तरंगदैर्ध्य की अप्रगामी तरंगें बन सकती हैं जिनका मान निम्नलिखित संबंध द्वारा प्राप्त किया जाता है,

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (15.47)$$

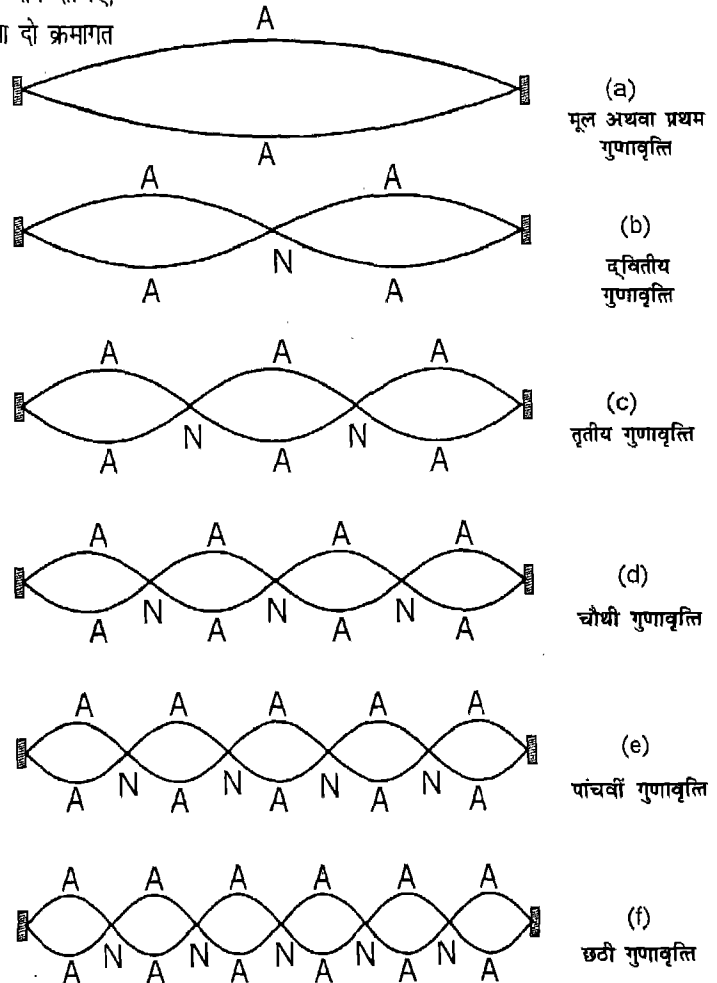
($n = 1, 2, 3...$) के लिए

इन तरंगदैर्ध्यों के तदनुरूपी आवृत्तियों के मान समीकरण (15.12) की सहायता से ज्ञात किए जा सकते हैं

$$\nu = n\frac{v}{2L} \quad (15.48)$$

($n = 1, 2, 3...$) के लिए

यहां v डोरी पर प्रगामी तरंगों की चाल है। समीकरण (15.48) से प्राप्त आवृत्तियों का सेट निकाय की प्राकृतिक आवृत्तियां अथवा विधाएं कहलाती हैं। इस समीकरण से हमें यह ज्ञात होता है कि किसी डोरी की प्राकृतिक आवृत्तियां $n = 1$ के तदनुरूपी निम्नतम आवृत्ति $\nu = \frac{v}{2L}$ की पूर्णांकीय गुणज होती हैं। इस निम्नतम आवृत्ति की दोलन विधा को मूल विधा अथवा प्रथम गुणावृत्ति कहते हैं। $n = 2$ की दोलन विधा को द्वितीय गुणावृत्ति कहते हैं। $n = 3$ के तदनुरूपी तृतीय गुणावृत्ति होती है और इसी प्रकार अगली गुणावृत्तियां होती हैं। इन विधाओं से संबद्ध आवृत्तियों को $\nu_1, \nu_2, \nu_3...$ द्वारा चिह्नित किया जाता है। सभी संभव विधाओं के समूह को गुणावृत्ति श्रेणी तथा n को गुणावृत्ति संख्या कहते हैं।

चित्र 15.16 में दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में कुछ गुणावृत्तियां दर्शायी गई हैं। अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, दोनों सिरों पर परिबद्ध कोई तानित डोरी एक ही क्षण एक से अधिक विधाओं से कंपन कर सकती है। कौन-सी

चित्र 15.16 दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में अप्रगामी तरंगें। कंपन की कई विधाएं दर्शायी गई हैं।

विधा अधिक प्रबलता से उत्तेजित है यह इस पर निर्भर करता है कि डोरी को किस बिंदु पर झंकृत (अथवा धनुर्वाद्य) किया गया है । सितार व वायलिन जैसे वाद्य यंत्रों की रूपरेखा इस सिद्धांत के आधार पर प्रस्तुत की जाती है ।

अब हम किसी ऐसे निकाय के कंपनों की विधाओं का अध्ययन करेंगे जिनका एक सिरा बंद है जबकि दूसरा सिरा मुक्त है । अंशत: जल से भरी लंबी कांच की नलिका का वायु-कॉलम ऐसे निकाय का एक उदाहरण है । वायु के कॉलम को नलिका में जल के स्तर को परिवर्तित करके समायोजित किया जा सकता है । वायु-कॉलम में जल से छूने वाले सिरे पर विस्थापन अथवा घनत्व में कोई परिवर्तन नहीं होता, क्योंकि परावर्तित तथा आपतित तरंगें ठीक विपरीत कलाओं में होती हैं । इसी कारण से इस स्थान पर दाब में परिवर्तन अधिकतम होते हैं, क्योंकि जब संपीडन का परावर्तन होता है तब इस स्थान पर दाब दो गुना हो जाता है, तथा जब विरलन का परावर्तन होता है तब इस स्थान पर दाब घटकर आधा रह जाता है । इसके विपरीत, खुले सिरे पर अधिकतम घनत्व परिवर्तन तथा न्यूनतम दाब परिवर्तन होते हैं । यहां पर विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगें एक ही कला में होती हैं इसलिए यहां दाब में कोई परिवर्तन नहीं होते ।

अब यदि वायु-कॉलम की लंबाई L है, तो खुला सिरा $x = L$ एक प्रस्पंद होता है, अत: समीकरण (15.45) से यह परिणाम निकलता है कि,

$$L = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3...)$$

अथवा वह विधाएं जो निम्न शर्त का पालन करती हैं, इस प्रकार के वायु कॉलमों में पोषण कर सकती हैं,

$$\lambda = \frac{2L}{(n+1/2)} \tag{15.49}$$

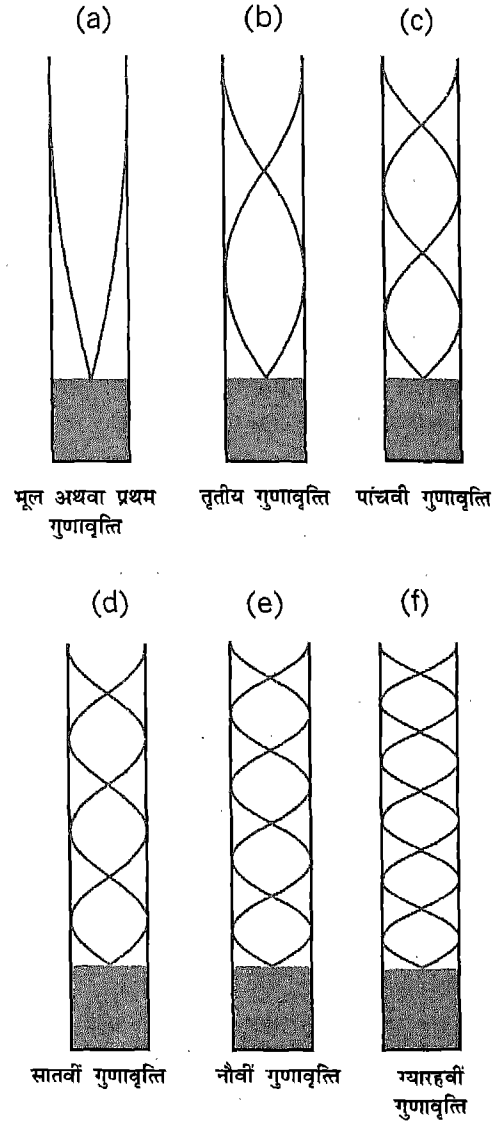
$(n = 0, 1, 2, 3...)$ के लिए

इस प्रकार के वायु-कॉलम में कंपन की विभिन्न विधाओं की तदनुरूपी आवृत्तियां इस प्रकार व्यक्त की जाती हैं,

$$\nu = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{v}{2L} \tag{15.50}$$

$(n = 0, 1, 2, 3...)$ के लिए

चित्र 15.17 में एक सिरे से खुले किसी वायु-कॉलम के कंपन की कुछ प्रसामान्य विधाएं दर्शायी गई हैं । इसकी मूल आवृत्ति $\frac{v}{4L}$ है तथा अन्य उच्च आवृत्तियां मूल आवृत्ति की विषम गुणज अर्थात् $3\frac{v}{4L}$, $5\frac{v}{4L}$ आदि होती हैं ।

किसी पात्र की परिधि से दृढ़तापूर्वक परिबद्ध वृत्ताकार झिल्ली, उदाहरणार्थ, तबले की झिल्ली के कंपनों की प्रसामान्य विधाओं का निर्धारण इस परिसीमा शर्त के द्वारा किया जाता है कि

चित्र 15.17 एक सिरे से खुले किसी वायु-कॉलम के कंपन की कुछ प्रसामान्य विधाएं ।

झिल्ली का परिधि पर स्थित कोई भी बिंदु कंपन नहीं करता । इस निकाय के कंपन की प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियों का आकलन अधिक जटिल कार्य है । इस समस्या में दो विमाओं में तरंग संचरण सम्मिलित होता है । फिर भी इसमें अन्तर्निहित भौतिकी वही है ।

उपरोक्त चर्चा में हमने यह देखा कि दोनों सिरों पर परिबद्ध किसी तानित डोरी में, समीकरण (15.48) में दिए अनुसार, कुछ निश्चित आवृत्तियों की ही प्रगामी तरंगें उत्पन्न होती हैं, अथवा यह निकाय इन आवृत्तियों पर अनुनाद करता है । इसी प्रकार, एक सिरे पर खुला वायु-कॉलम समीकरण (15.50) द्वारा दी गई आवृत्तियों पर अनुनाद करता है ।

उदाहरण 15.7 दोनों सिरों से खुले किसी पाइप की लंबाई 30.0 cm है । 1.1 kHz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौन-सी गुणावृत्ति विधा को अनुनाद द्वारा उत्तेजित किया जाता है ? यदि इस पाइप के एक सिरे को बंद कर दिया जाए तो क्या हम फिर भी इसी स्रोत द्वारा अनुनाद सुन सकते हैं ? वायु में ध्वनि की चाल 330 m s^{-1} है ।

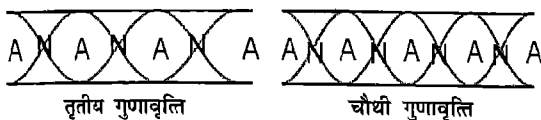
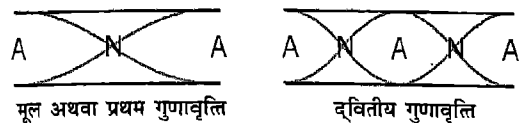
हल: खुले पाइप के कंपन की पहली कुछ विधाएं चित्र 15.17 में दर्शायी गई हैं । पहली गुणावृत्ति की आवृत्ति,

मूल अथवा प्रथम गुणावृत्ति

द्वितीय गुणावृत्ति

तृतीय गुणावृत्ति

A N A N A N A N A

चौथी गुणावृत्ति

चित्र 15.18 किसी खुले पाइप में अप्रगामी तरंगें । पहली चार गुणावृत्तियां दर्शायी गई हैं ।

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} \quad \text{(खुला पाइप)}$$

यहां L पाइप की लंबाई है । n वीं गुणावृत्ति की आवृत्ति

$$\nu_n = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, 4 ...) \quad \text{(खुला पाइप)}$$

यहां $L = 30.0$ cm, $v = 330$ m s^{-1}

$$\nu_n = \frac{n \times 330 \text{ m s}^{-1}}{2 \times 0.3 \text{ m}} = 550\, n \text{ s}^{-1}$$

स्पष्ट है कि 1.1 kHz आवृत्ति का स्रोत, अनुनाद द्वारा ν_2 आवृत्ति अर्थात् द्वितीय गुणावृत्ति को उत्तेजित करेगा ।

अब यदि पाइप का एक सिरा बंद है तब समीकरण (5.50) से यह परिणाम निकलता है कि इस पाइप की मूल आवृत्ति,

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L} \quad \text{(एक सिरे से बंद पाइप)}$$

इस पाइप में केवल विषम संख्या की गुणावृत्तियां ही विद्यमान होती हैं :

$$\nu_3 = \frac{3v}{4L}, \; \nu_5 = \frac{5v}{4L} \quad \text{तथा इसी प्रकार आगे भी...।}$$

$L = 30$ cm तथा $v = 300$ m s^{-1} के लिए, एक सिरे से बंद पाइप की मूल आवृत्ति 275 Hz है तथा स्रोत की आवृत्ति चतुर्थ गुणावृत्ति के तदनुरूपी है । चूंकि यह गुणावृत्ति पाइप के कंपन की संभावित विधा नहीं है, अत: इस स्रोत के साथ पाइप का एक सिरा बंद करने पर कोई अनुनाद सुनाई नहीं देगा । ◀

15.8 विस्पंदें

यदि हम कुछ मिनट के समय अंतराल में दो ऐसी ध्वनियों को सुनें जिनकी आवृत्तियों में बहुत कम अंतर है, जैसे 256 Hz तथा 260 Hz, तो हम उनमें भेद नहीं कर पाएंगे । परंतु यदि हम इन दोनों ध्वनियों को साथ-साथ एक ही समय सुनें, तो जो कुछ हम सुनेंगे उसकी आवृत्ति 258 Hz होगी, जो कि इन दो संयोजित आवृत्तियों का माध्य है । साथ ही हम इस ध्वनि की तीव्रता में आश्चर्यजनक परिवर्तन भी सुनेंगे-ध्वनि की तीव्रता धीरे-धीरे तरंगित विस्पंद के रूप में घटेगी और बढ़ेगी, जिसकी पुनरावृत्ति की आवृत्ति 4 Hz, जो कि प्रवेशी ध्वनियों की आवृत्तियों का अंतर है, होगी । दो लगभग समान आवृत्तियों की तरंगों के परस्पर एक दूसरे पर अध्यारोपण द्वारा ध्वनि की तीव्रता में उतार-चढ़ाव होने की परिघटना को विस्पंद कहते हैं ।

विस्पंद की परिघटना को हम बहुत कम भिन्न आवृत्तियों की दो गुणावृत्ति तरंगों के व्यतिकरण प्रभाव के रूप में समझ सकते हैं । अनुभाग 15.6 में हमने ऐसी तरंगों के व्यतिकरण पर विचार किया था जिनकी आवृत्तियां समान थीं परंतु उनमें कलांतर था । आइए, अब हम यह ज्ञात करें कि क्या होता है जब, ऐसी दो तरंगें जिनकी आवृत्तियां बहुत कम भिन्न हों, व्यतिकरण करती हैं । मान लीजिए, किसी विशेष स्थान पर दो ध्वनि तरंगों के कारण विस्थापनों में कालाश्रित परिवर्तन इस प्रकार है–

$$s_1 = s_m \cos \omega_1 t \text{ तथा } s_2 = s_m \cos \omega_2 t \qquad (15.51)$$

यहां $\omega_1 > \omega_2$ । सुगमता के लिए हमने यह माना है कि तरंगों के आयाम तथा कलाएं समान हैं । अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, परिणामी विस्थापन को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$s = s_1 + s_2 = s_m (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

$$= 2 s_m \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) t \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) t \qquad (15.52)$$

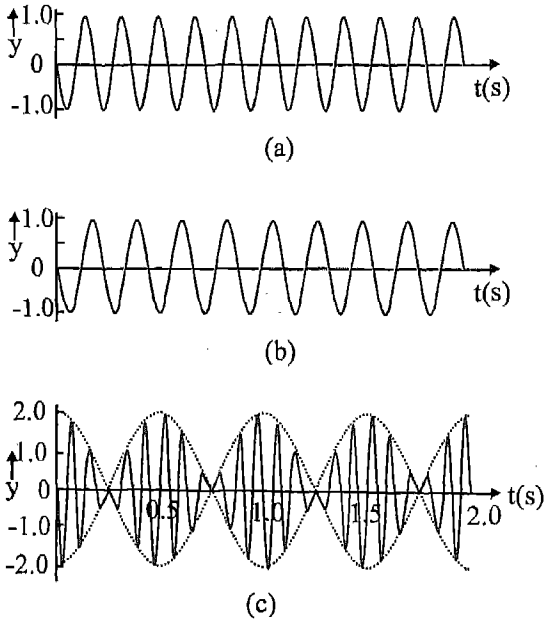
यदि हम $\omega_{mod} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ तथा $\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ लिखें तब समीकरण (15.52) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$s = [2\, s_m \cos \omega_{mod} t] \cos \omega_{av} t \qquad (15.53)$$

यदि $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$; $\omega_{av} >> \omega_{mod}$ है, तब समीकरण (15.53) का मुख्यत: कालाश्रित होना कोज्या (cos) फलन जिसकी कोणीय आवृत्ति ω_{av} है, से प्रकट होता है । कोष्ठक में दी गई राशि को इस फलन का आयाम माना जा सकता है (जो

एक अचर नहीं है बल्कि इसकी कोणीय आवृत्ति ω_{mod} में लघु परिवर्तन होता है ।) । जब भी cos $\omega_{mod}\, t$ का मान + 1 अथवा –1 होता है यह आयाम अधिकतम हो जाता है, तथा ऐसा कोज्या (cos) फलन की प्रत्येक पुनरावृत्ति में दो बार होता है । चूंकि ω_1 तथा ω_2 में बहुत कम अंतर है, ω_{av} में और इन दोनों आवृत्तियों में से किसी भी एक के बीच भेद करना आसान कार्य नहीं है । अत: लगभग समान आवृत्तियों की तरंगों के अध्यारोपण का परिणाम एक ऐसी तरंग होती है जिसकी कोणीय आवृत्ति लगभग समान होती है परंतु आयाम अचर नहीं होता । अत: परिणामी ध्वनि की तीव्रता में कोणीय आवृत्ति $\omega_{beat} = 2\ \omega_{mod} = \omega_1 - \omega_2$ के साथ परिवर्तन होता है । अब संबंध $\omega = 2\pi\nu$ का उपयोग करके हम विस्पंद आवृत्ति ν_{beat} को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\nu_{beat} = \nu_1 - \nu_2 \qquad (15.54)$$

अत:, हमें परिणामी ध्वनि में अध्यारोपित तरंगों की आवृत्तियों में अंतर के बराबर आवृत्ति के उतार-चढ़ाव सुनाई देते हैं । चित्र 15.19(a) तथा 15.19(b) में क्रमश: 11 Hz तथा 9 Hz आवृत्तियों की तरंगों के विस्थापन-समय ग्राफ दर्शाए गए हैं । चित्र 15.19(c) में इन तरंगों के अध्यारोपण का परिणाम दर्शाया गया है ।

चित्र 15.19 (a) 11 Hz आवृत्ति की गुणावृत्ति तरंग का आलेख (b) 9 Hz आवृत्ति की गुणावृत्ति तरंग का आलेख (c) तरंगों (a) तथा (b) का अध्यारोपण, स्पष्टत: 2 Hz आवृत्ति के कुल विक्षोभ के धीमे मादुलन में विस्पंद दर्शाए गए हैं।

संगीतज्ञ विस्पंद परिघटना का उपयोग अपने वाद्यों के समस्वरण में करते हैं । यदि कोई वाद्य-यंत्र किसी मानक आवृत्ति के यंत्र के साथ बजाया जाता है, तब वे अपने यंत्र को विस्पंद समाप्त होने तक समस्वर करते रहते हैं तथा विस्पंद समाप्त होने पर उनका वाद्य यंत्र मानक के साथ समस्वरित हो जाता है ।

▶ *उदाहरण 15.8* दो सितारों की डोरियां A तथा B एक साथ 'धा' स्वर बजा रहीं हैं तथा थोड़ी-सी बेसुरी होने के कारण 5 Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही है । डोरी B के तनाव में कुछ वृद्धि करने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3 Hz रह जाती है । यदि A की आवृत्ति 427 Hz है, तो B की मूल आवृत्ति ज्ञात कीजिए ।

हल : डोरी में तनाव बढ़ाने पर उसकी कंपन की आवृत्ति बढ़ जाती है । यदि डोरी B की मूल आवृत्ति (ν_B) A की आवृत्ति (ν_A) से अधिक है, तब ν_B में और वृद्धि होने पर विस्पंदों की आवृत्ति बढ़नी चाहिए, परंतु विस्पंद-आवृत्ति में गिरावट पाई गई। अत: यह निष्कर्ष निकलता है कि $\nu_B < \nu_A$ । चूंकि $\nu_A - \nu_B$ = 5Hz, तथा ν_A = 427 Hz, अत: डोरी B की मूल आवृत्ति ν_B = 422 Hz ◀

15.9 डॉप्लर प्रभाव

यह हमारे दैनिक जीवन का अनुभव है कि जब कोई सीटी बजाती हुई तीव्रगामी रेलगाड़ी हमसे दूर जाती है, उस सीटी के तारत्व (अथवा आवृत्ति) में कमी होती जाती है । जब हम तीव्र गति से किसी ध्वनि-स्रोत के निकट जाते हैं, तब सुनाई देने वाली ध्वनि का तारत्व ध्वनि-स्रोत के वास्तविक तारत्व से अधिक प्रतीत होता है । इसके विपरीत जब कोई प्रेक्षक ध्वनि-स्रोत से दूर हटता जाता है, तो प्रेक्षित तारत्व ध्वनि-स्रोत के वास्तविक तारत्व से कम होता है । इस गति-संबंधी आवृत्ति परिवर्तन को डॉप्लर प्रभाव कहते हैं । आस्ट्रिया के भौतिकविद जोहान क्रिश्चियन डॉप्लर ने सर्वप्रथम सन् 1842 ई. में इस प्रभाव को प्रस्तावित किया । सन् 1845 में हालैण्ड में बाईस बैलो ने इसका प्रायोगिक परीक्षण किया । डॉप्लर प्रभाव एक तरंग-परिघटना है, यह केवल ध्वनि तरंगों पर ही लागू नहीं होता, वरन् यह सूक्ष्म तरंगों, रेडियो तरंगों, तथा दृश्य प्रकाश सहित सभी विद्युत् चुंबकीय तरंगों पर भी लागू होता है। लेकिन, हम यहां केवल ध्वनि तरंगों पर ही विचार करेंगे।

हम तीन विभिन्न परिस्थितियों में आवृत्ति में परिवर्तन का विश्लेषण करेंगे : (1) प्रेक्षक स्थिर है परंतु स्रोत गतिशील है, (2) प्रेक्षक गतिशील है परंतु स्रोत स्थिर है, तथा (3) प्रेक्षक तथा स्रोत दोनों गतिशील हैं । प्रेक्षक तथा माध्यम के बीच सापेक्ष गति होने अथवा न होने के कारण परिस्थितियां (1) व (2) एक दूसरे से भिन्न हैं । अधिकांश तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की

आवश्यकता होती है; फिर भी, विद्युत् चुंबकीय तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । यदि कोई माध्यम न हो, तो इन दोनों परिस्थितियों में भेद करने का कोई उपाय नहीं होने के कारण, चाहे प्रेक्षक गतिशील हो अथवा स्रोत, डॉप्लर-विस्थापन समान होता है ।

15.9.1 स्रोत गतिशील; प्रेक्षक स्थिर

सर्वप्रथम हम ऐसी परिस्थिति पर विचार करते हैं जिसमें कोई स्रोत v_s चाल से किसी ऐसे प्रेक्षक (जो स्वयं स्थिर है) की ओर गतिशील है तथा ऐसे फ्रेम में जहां का माध्यम भी विराम में है। मान लीजिए किसी तरंग, जिसकी प्रेक्षक द्वारा जब स्रोत प्रेक्षक के सापेक्ष विराम में है, मापी गई कोणीय आवृत्ति ω तथा आवर्तकाल T_0 है, की चाल v है । हम मानते हैं कि प्रेक्षक के पास एक संसूचक (detector) है जो हर पहुंचने वाले तरंग-शिखर (crest) को गिनता है । समय $t = 0$ पर जब स्रोत बिन्दु P_1 पर अवस्थित है (देखें चित्र 15.20), स्रोत एक तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है । इस समय $(t = 0)$ पर स्रोत प्रेक्षक से L दूरी पर है। यह तरंग-शिखर प्रेक्षक के पास समय $t_1 = (L/v)$ पर पहुंचता है। समय $t = T_0$ पर स्रोत प्रेक्षक की ओर v_sT_0 दूरी चल लेता है और बिंदु P_2 पर पहुंच जाता है जिसकी प्रेक्षक से दूरी $(L-v_sT_0)$ है ।

चित्र 15.20 विराम की स्थिति में O पर खड़े प्रेक्षक की ओर v_s चाल से गतिशील कोई स्रोत बिंदु P_1 पर एक तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है । यही स्रोत O की दिशा में v_sT_0 दूरी चलने के पश्चात् बिंदु P_2 से दूसरा तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है ।

बिंदु P_2 पर स्रोत एक और (दूसरा) तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है। यह दूसरा तरंग-शिखर प्रेक्षक तक समय t_2 पर पहुंचता है,

$$t_2 = T_0 + \frac{(L - v_sT_0)}{v}$$

समय nT_0 पर स्रोत $(n+1)$ वां तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है जो प्रेक्षक तक जिस समय t_n पर पहुंचता है उसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$t_{n+1} = nT_0 + \frac{(L - nv_sT_0)}{v}$$

अत: समय अंतराल

$$\left[nT_0 + \frac{(L - nv_sT_0)}{v} - \frac{L}{v}\right]$$

में प्रेक्षक का संसूचक n तरंग-शिखर गिनता है तथा प्रेक्षक तरंग का आवर्तकाल T नीचे दिए अनुसार रिकार्ड करता है

$$T = \left[nT_0 + \frac{(L - nv_sT_0)}{v} - \frac{L}{v}\right] / n$$

$$= T_0 - \frac{v_sT_0}{v}$$

$$= T_0\left(1 - \frac{v_s}{v}\right) \qquad (15.55)$$

समीकरण (15.55) को हम आवृत्ति के पदों में भी लिख सकते हैं । यदि ν_0 वह आवृत्ति है जो स्रोत एवं प्रेक्षक दोनों के विराम में होने पर मापी गई है तथा ν वह प्रेक्षित आवृत्ति है जो स्रोत के गतिशील होने पर है, तो प्रेक्षित आवृत्ति,

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1} \qquad (15.56)$$

यदि तरंग चाल v की तुलना में स्रोत की चाल v_s का मान कम है तो द्विपद प्रसरण के $\frac{v_s}{v}$ से उच्च घातों के पदों को न लेकर, समीकरण (15.56) को सन्निकटत: इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_s}{v}\right) \qquad (15.57)$$

इस प्रकार प्रेक्षक, जब स्रोत उसकी ओर गति कर रहा होता है, तब स्रोत के विराम में होने की तुलना में उच्च आवृत्ति मापता है। जब स्रोत प्रेक्षक से दूर जा रहा होता है, तब इसी प्रक्रिया को दोहराते हुए दर्शाया जा सकता है कि उस स्थिति में प्रेक्षित आवृत्ति

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{v_s}{v}\right) \qquad (15.58)$$

अत: जब कोई ध्वनि स्रोत किसी प्रेक्षक से दूर जाता है तब प्रेक्षक अपेक्षाकृत कम आवृत्ति मापता है ।

15.9.2 प्रेक्षक गतिशील; स्रोत स्थिर

अब उस स्थिति में, जब प्रेक्षक स्रोत की ओर v_0 चाल से गतिमान हो, तथा स्रोत विराम में हो, डॉप्लर विस्थापन को व्युत्पन्न करने के लिए हमें दूसरे ढंग से आगे बढ़ना होगा । हम गतिशील प्रेक्षक से निर्देश फ्रेम में कार्य करेंगे । इस निर्देश फ्रेम में स्रोत तथा प्रेक्षक चाल v_0 से समीप आते हैं तथा तरंग के समीप आने की चाल $v_0 + v$ है । पिछली परिस्थिति में जो ढंग अपनाया गया था उसी को इस परिस्थिति में भी अपनाने पर हम यह पाते हैं कि पहले

तथा $(n+1)$ वें तरंग शिखर के प्रेक्षक तक पहुंचने के बीच समय अंतराल इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$t_{n+1} - t_1 = n\,T_0 - \frac{n v_0 T_0}{v_0 + v}$$

अतः, प्रेक्षक द्वारा मापा गया तरंग का आवर्त काल

$$= T_0\left(1 - \frac{v_0}{v_0 + v}\right)$$

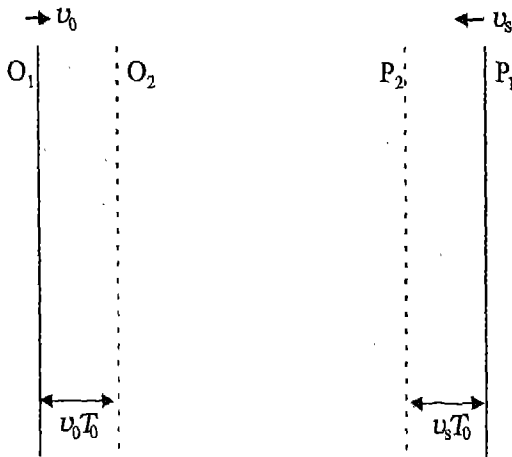
$$= T_0\left(1 + \frac{v_0}{v}\right)^{-1}$$

आवृत्ति के पदों में इसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_0}{v}\right) \quad (15.59)$$

यदि $\frac{v_0}{v}$ का मान कम है, तब डॉप्लर विस्थापन लगभग वही होगा, चाहे प्रेक्षक गति करे अथवा स्रोत, क्योंकि समीकरण (15.59) तथा सन्निकट संबंध (15.57) समान हैं ।

15.9.3 स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों गतिशील हैं

अब हम डॉप्लर प्रभाव के लिए, जब स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों ही गतिशील हैं, व्यापक व्यंजक व्युत्पन्न करेंगे । मान लीजिए चित्र 15.21 की भांति स्रोत तथा प्रेक्षक क्रमशः v_s तथा v_0 चाल से एक-दूसरे की ओर गतिशील हैं, तथा किसी तरंग की चाल, जिसकी कोणीय आवृत्ति ω तथा आवर्तकाल T_0, दोनों को ही स्रोत के सापेक्ष विरामावस्था के प्रेक्षक द्वारा मापा गया है, v है । समय $t=0$ पर प्रेक्षक O_1 पर तथा स्रोत P_1 पर है, तथा जब

चित्र 15.21 v_s चाल से कोई स्रोत किसी प्रेक्षक की ओर, जो स्वयं स्रोत की ओर v_0 चाल से गतिशील है, गति करता है । समय $t=0$ पर दोनों की अवस्थितियां क्रमशः P_1 तथा O_1 हैं । स्रोत बिंदु P_1 पर तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है । यही स्रोत अगला तरंग-शिखर O की ओर v_sT_0 दूरी तय करने के पश्चात बिंदु P_2 से उत्सर्जित करता है । इसी बीच प्रेक्षक भी स्रोत की ओर v_0T_0 दूरी तय कर लेता है ।

स्रोत पहला तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है उस समय प्रेक्षक की स्रोत से दूरी L है । अब चूंकि प्रेक्षक गतिशील है, इसलिए तरंग की प्रेक्षक के सापेक्ष चाल $(v + v_0)$ है । अतः पहला तरंग-शिखर प्रेक्षक पर समय $t_1 = L/(v + v_0)$ पर पहुंचता है । समय $t = T_0$ पर प्रेक्षक तथा स्रोत दोनों ही अपनी आरंभिक स्थितियों से गति करके नई स्थितियों क्रमशः O_2 तथा P_2 पर पहुंच जाते हैं । प्रेक्षक तथा स्रोत के बीच की नई दूरी, $O_2P_2 = [L - (v_0 + v_s)/T_0]$ है । P_2 पर स्रोत दूसरा तरंग-शिखर उत्सर्जित कर देता है । यह तरंग-शिखर प्रेक्षक पर समय t_2 पर पहुंचता है जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$t_2 = T_0 + [L - (v_0 + v_s)T_0]/(v + v_0)$$

समय $n\,T_0$ पर, स्रोत $(n+1)$ वां तरंग-शिखर उत्सर्जित कर देता है जो समय t_{n+1} पर प्रेक्षक पर पहुंचता है जिसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$t_{n+1} = nT_o + [L - n\,(v_o + v_s)T_o)]\,/(v + v_o)$$

अतः समय अंतराल,

$$nT_0 + [L - n(v_0 + v_s)T_0]/(v + v_0) - L/(v + v_0)$$

में प्रेक्षक n तरंग-शिखर गिनता है तथा प्रेक्षक तरंग का आवर्तकाल T रिकार्ड करता है जिसे इस संबंध द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$T = T_0\left(\frac{v - v_s}{v + v_0}\right) \quad (15.60)$$

आवृत्ति के पदों में प्रेषक द्वारा आवृत्ति को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\nu = \nu_0\left(\frac{v + v_0}{v - v_s}\right) \quad (15.61)$$

डॉप्लर प्रभाव के लिए अति व्यापक व्यंजक इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\nu = \nu_0\left(\frac{v \pm v_0}{v \pm v_s}\right) \quad (15.62)$$

यहां v माध्यम में ध्वनि की चाल है, v_0 माध्यम के सापेक्ष प्रेक्षक की चाल तथा v_s माध्यम के सापेक्ष ध्वनि स्रोत की चाल है । धन अथवा ऋण चिह्न चुनने के लिए यह नियम अपनाया जा सकता है :

जब प्रेक्षक अथवा स्रोत की गति एक दूसरे की ओर हों तो उसकी चाल के चिह्न को आवृत्ति में उपरिमुखी विस्थापन देना चाहिए । जब प्रेक्षक अथवा स्रोत की गति एक दूसरे से परे हो, तब उसकी चाल के चिह्न को आवृत्ति में अधोमुखी विस्थापन देना चाहिए ।

इस नियम के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं :

1. यदि प्रेक्षक स्रोत की ओर गति करता है तब समीकरण (15.62) के अंश में धन चिह्न का प्रयोग करके आवृत्ति में उपरिमुखी विस्थापन प्राप्त करें ।

2. यदि प्रेक्षक स्रोत से दूर जाता है तो विस्थापन में अधोमुखी विस्थापन प्राप्त करने के लिए अंश में ऋण चिह्न का उपयोग करें ।

3. यदि प्रेक्षक स्थिर है, तो v_0 को शून्य (0) से प्रतिस्थापित करें ।

4. यदि स्रोत संसूचक की ओर गति करे, तो आवृत्ति में उपरिमुखी विस्थापन प्राप्त करने के लिए समीकरण (15.62) के हर में ऋण चिह्न प्रयोग करें ।

5. यदि स्रोत संसूचक से दूर गति करे तो आवृत्ति में अधोमुखी विस्थापन प्राप्त करने के लिए समीकरण (15.62) के हर में धन चिह्न प्रयोग करें ।

6. यदि स्रोत स्थिर है, तो v_s को शून्य (0) से प्रतिस्थापित करें ।

यदि उपर्युक्त नियमों का पालन किया जाए तो समीकरण (15.62) से डॉप्लर प्रभाव के लिए ऊपर व्युत्पन्न किए गए सभी व्यंजक प्राप्त किए जा सकते हैं ।

उदाहरण 15.9 : कोई रॉकेट 200 m s^{-1} की चाल से किसी लक्ष्य की ओर गतिमान है । गति करते समय यह 1000 Hz आवृत्ति की ध्वनि तरंग उत्सर्जित करता है । इस ध्वनि का कुछ भाग लक्ष्य पर पहुंच कर प्रतिध्वनि के रूप में वापस रॉकेट की ओर परावर्तित हो जाता है । (a) लक्ष्य से जुड़े संसूचक द्वारा संसूचित ध्वनि तरंगों की आवृत्ति, तथा (b) रॉकेट से जुड़े संसूचक द्वारा संसूचित प्रतिध्वनि की आवृत्ति परिकलित कीजिए ।

हल : (a) इस प्रश्न में प्रेक्षक स्थिर है तथा स्रोत प्रेक्षक की ओर 200 m s^{-1} चाल से गतिशील है, अत: हम यहां समीकरण (15.56) का उपयोग करेंगे । हम यहां समीकरण (15.57) का उपयोग इसलिए नहीं करेंगे क्योंकि स्रोत की चाल ध्वनि तरंगों की चाल के तुल्य है । इस प्रकार समीकरण (15.56) से

$$\nu = \nu_0\left(1-\frac{v_s}{v}\right)^{-1}$$

$$= 1000\text{ Hz} \times \left(1-\frac{200\,\text{m s}^{-1}}{330\,\text{m s}^{-1}}\right)^{-1}$$

$$= 2538.7\text{ Hz}$$

(b) यहां इस प्रश्न में अब लक्ष्य स्रोत है (क्योंकि यह प्रतिध्वनि का स्रोत है) तथा रॉकेट का संसूचक अब एक संसूचक अथवा प्रेक्षक (क्योंकि यह संसूचन भी करता है) है । अब स्रोत (लक्ष्य) द्वारा उत्सर्जित ध्वनि की आवृत्ति ν है जो कि लक्ष्य द्वारा अवरुद्ध आवृत्ति है । यहां हम स्रोत की मूल आवृत्ति ν_0 का उपयोग नहीं कर सकते । अत: रॉकेट से जुड़े संसूचक द्वारा रिकार्ड की गई आवृत्ति

$$\nu' = \nu\left(\frac{v+v_0}{v-v_s}\right)$$

$$= 2538.7\text{ Hz} \times \left(\frac{200\,(\text{m s}^{-1})+330\,(\text{m s}^{-1})}{300\,(\text{m s}^{-1})}\right)$$

$$= 4077.3\text{ Hz}$$

सारांश

1. यांत्रिक तरंगें द्रव्यात्मक माध्यमों में विद्यमान रह सकती हैं तथा ये न्यूटन के गति के नियमों द्वारा संनियमित होती हैं ।
2. अनुप्रस्थ यांत्रिक तरंगें वे तरंगें होती हैं जिनमें माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं ।
3. अनुदैर्ध्य यांत्रिक तरंगें वे तरंगें होती हैं जिनमें माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं ।
4. प्रगामी तरंग वह तरंग होती है जो माध्यम के एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गमन करती है ।
5. धनात्मक x-दिशा में संचरित ज्यावक्रीय तरंग का विस्थापन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है–

$$y\,(x,t) = y_m \sin\,(kx-\omega t+\phi)$$

यहां y_m तरंग का आयाम, k कोणीय तरंग संख्या, ω कोणीय आवृत्ति, $(kx-\omega t+\phi)$ कला, तथा ϕ कला-नियतांक अथवा कला कोण है ।

6. किसी प्रगामी तरंग का तरंगदैर्ध्य λ उसके किन्हीं दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी के बराबर होती है जो किसी क्षण पर समान कला में होते हैं । अप्रगामी तरंगों के लिए यह दो क्रमागत निस्पंदों अथवा प्रस्पंदों के बीच की दूरी के दोगुने के बराबर होती है ।
7. किसी तरंग के आवर्तकाल T का उस समय द्वारा परिभाषित किया जाता है जिसमें माध्यम का कोई अवयव अपना एक दोलन पूर्ण करता है । यह तरंग की कोणीय आवृत्ति ω से इस प्रकार संबंधित होता है

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

8. किसी तरंग की आवृत्ति f को $1/T$ के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा आवृत्ति व कोणीय आवृत्ति में निम्नलिखित संबंध होता है :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

9. प्रगामी तरंग की चाल $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

10. किसी तानित डोरी पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल उस डोरी के गुणों से निर्धारित होती है । यदि किसी डोरी में तनाव T है तथा डोरी का रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ है तो उस डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

11. ध्वनि तरंगें अनुदैर्ध्य यांत्रिक तरंगें होती हैं जो ठोसों, द्रवों तथा गैसों में गमन कर सकती हैं । यदि किसी माध्यम का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक B तथा घनत्व ρ है तो उस माध्यम में ध्वनि तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

धातु की छड़ में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

किसी गैस में, चूंकि $B = \gamma P$, अतः ध्वनि की चाल

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

यहां γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात $(\gamma = C_p/C_v)$, ρ गैस का घनत्व तथा P गैस का दाब है ।

12. जब दो या अधिक तरंगें किसी माध्यम से गमन करती हैं, तब माध्यम के किसी अवयव का विस्थापन प्रत्येक तरंग के विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है । इसे तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत कहते हैं ।

$$y = \sum_{1}^{n} f_i \ (x - vt)$$

13. एक ही डोरी पर गमन करती दो ज्यावक्रीय तरंगें अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार संकलन अथवा निरसन द्वारा व्यतिकरण की परिघटना प्रदर्शित करती हैं । यदि समान आयाम y_m तथा समान आवृत्ति परंतु कला में कला-नियतांक ϕ के अंतर वाली दो तरंगें एक ही दिशा में गतिमान हैं तो उनका परिणामी एकल तरंग होती है जिसकी आवृत्ति भी समान होती है :

$$y'(x,t) = \left[2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right)$$

यदि $\phi = 0$ अथवा 2π रेडियन का पूर्णांक गुणज हो तो तरंगें एकदम समान कला में होती हैं तथा उनका व्यतिकरण पूर्णतः संपोषी होता है; यदि $\phi = \pi$ रेडियन, अथवा π रेडियन का विषम गुणज हो तो तरंगें एकदम विपरीत कलाओं में होती है तथा उनका व्यतिकरण पूर्णतः विनाशी होता है ।

14. किसी प्रगामी तरंग का किसी दृढ़ परिसीमा अथवा बंद सिरे पर परावर्तन कला-उत्क्रमण के साथ होता है, परंतु किसी खुली परिसीमा पर यह परावर्तन बिना किसी कला-परिवर्तन के होता है ।

किसी आपतित तरंग के लिए

$y_i\ (x,\ t) = y_m \sin\ (kx - \omega t)$

दृढ़ परिसीमा से परावर्तित तरंग के लिए

$y_r\ (x,\ t) = -\,y_m \sin\ (kx + \omega t)$

खुली परिसीमा से परावर्तित तरंग के लिए

$$y_r\ (x, t) = y_m \sin (kx + \omega t)$$

15. विपरीत दिशाओं में गतिशील दो सर्वसम तरंगों के व्यतिकरण से अप्रगामी तरंगें उत्पन्न होती हैं । दोनों सिरों पर परिबद्ध्‌ तानित डोरी में उत्पन्न अप्रगामी तरंगों को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$y'(x, t) = [2\, y_m \sin kx] \cos \omega t$$

अप्रगामी तरंगों का एक अभिलक्षण यह है कि इनमें शून्य विस्थापन की निश्चित अवस्थितियां जिन्हें निस्पंद कहते हैं तथा अधिकतम विस्थापन की निश्चित अवस्थितियां जिन्हें प्रस्पंद कहते हैं, होती हैं । दो क्रमागत निस्पंदों अथवा दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है ।

L लंबाई की तानित डोरी, जो दोनों सिरों पर परिबद्ध्‌ हो निम्नलिखित आवृत्तियों से कंपन करती है :

$$\nu = n\frac{v}{2L}\ , n = 1, 2, 3....$$

यहां v तरंग की डोरी पर गमन की चाल है । इस संबंध से प्राप्त आवृत्तियों को सेट निकाय के कंपन अथवा दोलन की प्रसामान्य विधाएं कहलाता है । निम्नतम आवृत्ति से दोलन की विधा 'मूल विधा' अथवा प्रथम गुणावृत्ति कहलाती है । $n = 2$ को दोलन विधा को द्‌वितीय गुणावृत्ति कहते है, और इसी प्रकार क्रम बढ़ता जाता है ।

L लंबाई का कोई निकाय जिसका एक सिरा बंद तथा दूसरा सिरा मुक्त हो, जैसे वायु-कॉलम, निम्नलिखित आवृत्तियों से कंपन करता है :

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{L}\ , n = 0, 1, 2, 3....$$

उपरोक्त संबंध द्‌वारा निरूपित आवृत्तियों का सेट इस प्रकार के निकाय के दोलन की प्रसामान्य विधाएं होती हैं । इस संबंध द्‌वारा $n = 0$ के लिए प्राप्त निम्नतम आवृत्ति $v/4L$ है, जो इस प्रकार के निकाय की मूल विधा अथवा प्रथम गुणावृत्ति होती है ।

16. दोनों सिरों से परिबद्ध्‌ L लंबाई की तानित डोरी अथवा एक सिरे से बंद तथा दूसरे सिरे पर मुक्त वायु-कॉलम जिन आवृत्तियों से कंपन करते हैं उन्हें इन निकायों की प्रसामान्य विधाएं कहते हैं । इनमें से प्रत्येक आवृत्ति निकाय की अनुनाद-आवृत्ति होती है ।

17. विस्पंद तब उत्पन्न होती है जब बहुत कम अंतर की दो आवृत्तियों ν_1 तथा ν_2 की तरंगें एक साथ संसूचित की जाती हैं । विस्पंद आवृत्ति इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$\nu_{beat} = \nu_1 \sim \nu_2$$

18. माध्यम के सापेक्ष ध्वनि स्रोत अथवा प्रेक्षक की गति के कारण किसी तरंग की प्रेक्षित आवृत्ति में परिवर्तन होना डॉप्लर प्रभाव कहलाता है । ध्वनि के लिए प्रेक्षित आवृत्ति को ध्वनि स्रोत की आवृत्ति ν_0 के पदों में व्यक्त किया जाता है

$$\nu = \nu_0\left[\frac{v \pm v_0}{v \pm v_s}\right]$$

यहां v माध्यम में ध्वनि की चाल, v_0 माध्यम के सापेक्ष प्रेक्षक की चाल तथा v_s माध्यम के सापेक्ष ध्वनि-स्रोत की चाल है । धन या ऋण चिह्‌न के चुनाव के लिए यह नियम अपनाया जाता है :

जब प्रेक्षक अथवा स्रोत की गति एक दूसरे की ओर हों तो इनकी चाल के चिह्‌न को आवृत्ति में उपरिमुखी विस्थापन देना चाहिए । जब प्रेक्षक अथवा स्रोत की गति एक दूसरे से परे हो, तब उसकी चाल के चिह्‌न को आवृत्ति में अधोमुखी विस्थापन देना चाहिए ।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएं	मात्रक	टिप्पणी
तरंगदैर्घ्य	λ	[L]	m	एक ही क्षण पर समान कला के दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी
संचरण नियतांक	k	[L^{-1}]	m^{-1}	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
तरंग चाल	v	[LT^{-1}]	m s^{-1}	$v = \nu\lambda$
विस्पंद आवृत्ति	ν_{beat}	[T^{-1}]	s^{-1}	दो निकट आवृत्तियों की अध्यारोपित तरंगों की आवृत्तियों का अंतर

विचारणीय विषय

1. तरंग किसी माध्यम में समूचे द्रव्य की गति नहीं है। पवन वायु में ध्वनि तरंग से भिन्न होती है । पवन में एक स्थान से दूसरे स्थान तक वायु की गति सम्मिलित होती है । ध्वनि तरंग में वायु की परतों का संपीडन तथा विरलन सम्मिलित होता है ।
2. तरंग में एक स्थान से दूसरे स्थान तक ऊर्जा स्थानांतरित होती है न कि द्रव्य ।
3. माध्यम के निकटतम दोलनी भागों के बीच आद्योपांत (शुरू से अंत तक) प्रत्यास्थ बलों के युग्मन के कारण ऊर्जा स्थानांतरण होता है ।
4. अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण केवल उन्हीं माध्यमों में हो सकता है जिनमें अपरूपण प्रत्यास्थता गुणांक हो, उदाहरणार्थ ठोस । अनुदैर्ध्य तरंगों को आयतन प्रत्यास्थता गुणांक की आवश्यकता होती है, अतः ये तरंगें सभी माध्यमों-ठोस, द्रव तथा गैस में संभव होती हैं ।
5. दी गई आवृत्ति की किसी सरल आवर्त प्रगामी तरंग में सभी कणों का आयाम समान होता है, परंतु किसी दिए गए नियत समय पर उनकी कलाएं भिन्न होती हैं । किसी अप्रगामी तरंग में किसी निश्चित क्षण पर सभी कणों की कलाएं समान होती हैं परंतु उनके आयाम भिन्न होते हैं ।
6. किसी माध्यम में विराम की स्थिति वाले प्रेक्षक के सापेक्ष उस माध्यम में किसी यांत्रिक तरंग की चाल (v) केवल माध्यम के प्रत्यास्थ तथा अन्य गुणों (जैसे द्रव्यमान घनत्व) पर निर्भर करती है । यह ध्वनि-स्रोत के वेग पर निर्भर नहीं करती ।
7. माध्यम के सापेक्ष v_0 वेग से गतिशील किसी प्रेक्षक के लिए प्रत्यक्ष रूप से तरंग की चाल v से भिन्न होती है तथा यह चाल $v \pm v_0$ होती है ।

अभ्यास

15.1 2.50 kg द्रव्यमान की 20 cm लंबी तानित डोरी पर 200 N बल का तनाव है । यदि इस डोरी के एक सिरे को अनुप्रस्थ झटका दिया जाए तो उत्पन्न विक्षोभ कितने समय में दूसरे सिरे तक पहुंचेगा ?

15.2 300 m ऊंची मीनार के शीर्ष से गिराया गया पत्थर मीनार के आधार पर बने तालाब के पानी से टकराता है । यदि वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} है तो पत्थर के टकराने की ध्वनि मीनार के शीर्ष पर पत्थर गिराने के कितनी देर बाद सुनाई देगी ? (g = 9.8 m s^{-2})

15.3 12.0 m लंबे स्टील के तार का द्रव्यमान 2.10 kg है । तार में तनाव कितना होना चाहिए ताकि उस तार पर किसी अनुप्रस्थ तरंग की चाल 20 °C पर शुष्क वायु में ध्वनि की चाल (343 m s^{-1}) के बराबर हो ।

15.4 सूत्र $v = \sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$ का उपयोग करके स्पष्ट कीजिए कि वायु में ध्वनि की चाल क्यों

(a) दाब पर निर्भर नहीं करती,

(b) ताप के साथ बढ़ जाती है, तथा

(c) आर्द्रता के साथ बढ़ जाती है ?

15.5 आपने यह सीखा है कि एक विमा में कोई प्रगामी तरंग फलन $y = f(x, t)$ द्वारा निरूपित की जाती है जिसमें x तथा t को $x - vt$ अथवा $x + vt$ अर्थात् $y = F(x \pm vt)$ संयोजन में प्रकट होना चाहिए । क्या इसका प्रतिलोम भी सत्य है ? नीचे दिए गए y के प्रत्येक फलन का परीक्षण करके यह बताइए कि वह किसी प्रगामी तरंग को निरूपित कर सकता है :

(i) $(x - vt)^2$

(ii) $\exp\{-[(x - vt)/x_0]^2\}$

(iii) $\exp\{-[(x - vt)/x_0]^2\}$

(iv) $1/(x + vt)$

15.6 कोई चमगादड़ वायु में 1000 k Hz आवृत्ति की पराश्रव्य ध्वनि उत्सर्जित करता है । यदि यह ध्वनि जल के पृष्ठ से टकराती है, तो (a) परावर्तित ध्वनि तथा (b) पारगमित ध्वनि की तरंगदैर्ध्य ज्ञात कीजिए । वायु तथा जल में ध्वनि की चाल क्रमशः 340 m s^{-1} तथा 1486 m s^{-1} है ।

15.7 किसी अस्पताल में ऊतकों में ट्यूमरों का पता लगाने के लिए पराश्रव्य स्कैनर का प्रयोग किया जाता है । उस ऊतक में ध्वनि में तरंगदैर्ध्य कितनी है जिसमें ध्वनि की चाल 1.7 k m s^{-1} है ? स्कैनर की प्रचालन आवृत्ति 4.2 MHz है ।

15.8 किसी डोरी पर कोई अनुप्रस्थ गुणावृत्ति तरंग का वर्णन

$$y(x, t) = 3.0 \sin(36\,t + 0.018\,x + \pi/4)$$

द्वारा किया जाता है । यहां x तथा y सेंटीमीटर में तथा t सेकंड में है । x की धनात्मक दिशा बाएं से दाएं है ।

(i) क्या यह प्रगामी तरंग है अथवा अप्रगामी ? यदि यह प्रगामी तरंग है तो इसकी चाल तथा संचरण की दिशा क्या है ?

(ii) इसका आयाम तथा आवृत्ति क्या है ?

(iii) उद्गम के समय इसकी आरंभिक कला क्या है ?

(iv) इस तरंग में दो क्रमागत शिखरों के बीच की न्यूनतम दूरी क्या है ?

15.9 प्रश्न 15.8 में वर्णित तरंग के लिए $x = 0$ cm, 2 cm तथा 4 cm के लिए विस्थापन (y) और समय (t) के बीच ग्राफ आलेखित कीजिए । इन ग्राफों की आकृति क्या है ? आयाम, आवृत्ति अथवा कला में से किन पहलुओं में प्रगामी तरंग में दोलनी गति एक बिंदु से दूसरे बिंदु पर भिन्न है ?

15.10 प्रगामी गुणावृत्ति तरंग

$$y(x, t) = 2.0 \cos 2\pi\,(10\,t - 0.0080\,x + 0.35)$$

जिसमें x तथा y को m में तथा t को s में लिया गया है, के लिए उन दो दोलनी बिंदुओं के बीच कलांतर कितना है जिनके बीच की दूरी है

(i) 4 m

(ii) 0.5 m

(iii) $\lambda/2$

(iv) $\dfrac{3\lambda}{4}$

15.11 दोनों सिरों पर परिबद्ध किसी तानित डोरी पर अनुप्रस्थ विस्थापन को इस प्रकार व्यक्त किया गया है

$$y(x, t) = 0.06 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \cos(120\,\pi\,t)$$

जिसमें x तथा y को m तथा t को s में लिया गया है । इसमें डोरी की लंबाई 1.5 m है जिसकी संहति 3.0×10^{-2} kg है । निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(a) यह फलन प्रगामी तरंग अथवा अप्रगामी तरंग में से किसे निरूपित करता है ?

(b) इसकी व्याख्या विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगों के अध्यारोपण के रूप में करते हुए प्रत्येक तरंग की तरंगदैर्ध्य, आवृत्ति तथा चाल ज्ञात कीजिए ।

(c) डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए ।

15.12 (a)प्रश्न 15.11 में वर्णित डोरी पर तरंग के लिए बताइए कि क्या डोरी के सभी बिंदु समान (a) आवृत्ति, (b) कला, (c) आयाम से कंपन करते हैं ? अपने उत्तरों को स्पष्ट कीजिए ।

(b)एक सिरे से 0.375 m दूर के बिंदु का आयाम कितना है ।

15.13 नीचे किसी प्रत्यास्थ तरंग (अनुप्रस्थ अथवा अनुदैर्ध्य) के विस्थापन को निरूपित करने वाले x तथा t के फलन दिए गए हैं । यह बताइए कि इनमें से कौन (a) प्रगामी तरंग को, (b) अप्रगामी तरंग को, (c) इनमें से किसी भी तरंग को नहीं निरूपित करता है

(a) $y = 2 \cos(3x) \sin 10\,t$

(b) $y = 2\sqrt{x - vt}$

(c) $y = 3 \sin(5x - 0.5\,t) + 4 \cos(5x - 0.5t)$

(d) $y = \cos x \sin t + \cos 2x \sin 2t$

15.14 दो दृढ़ टेकों के बीच तानित तार अपनी मूल विधा में 45 Hz आवृत्ति से कंपन करता है । इस तार का द्रव्यमान 3.5×10^{-2} kg तथा रैखिक द्रव्यमान घनत्व 4.0×10^{-2} kg m^{-1} है । (a) तार पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल क्या है, तथा (b) तार में तनाव कितना है ?

15.15 एक सिरे पर खुली तथा दूसरे सिरे पर चलायमान पिस्टन लगी 1 m लंबी नलिका, किसी नियत आवृत्ति के स्रोत (340 Hz आवृत्ति का स्वरित्र द्विभुज) के साथ, जब नलिका में वायु कॉलम 25.5 cm अथवा 79.3 cm होता है तब अनुनाद दर्शाती है। प्रयोगशाला के ताप पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए। कोर-प्रभाव को नगण्य मान सकते हैं।

15.16 100 cm लंबी स्टील-छड़ अपने मध्य बिंदु पर परिबद्ध है। इसके अनुदैर्ध्य कंपनों की मूल आवृत्ति 2.53 kHz है। स्टील में ध्वनि की चाल क्या है?

15.17 20 cm लंबाई के पाइप का एक सिरा बंद है। 430 Hz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौन-सी गुणावृत्ति विधा अनुनाद द्वारा उत्तेजित की जाती है? यदि इस पाइप के दोनों सिरे खुले हों तो भी क्या यह स्रोत इस पाइप के साथ अनुनाद करेगा? वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} है।

15.18 सितार की दो डोरियां A तथा B एक साथ 'गा' स्वर बजा रही हैं तथा थोड़ी-सी बेसुरी होने के कारण 6 Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही हैं। डोरी A का तनाव कुछ घटाने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3 Hz रह जाती है। यदि A की मूल आवृत्ति 324 Hz है तो B की आवृत्ति क्या है?

15.19 स्पष्ट कीजिए क्यों (अथवा कैसे) :

(a) किसी ध्वनि तरंग में विस्थापन निस्पंद दाब प्रस्पंद होता है और विस्थापन प्रस्पंद दाब निस्पंद होता है।

(b) आंख न होने पर भी चमगादड़ अवरोधकों की दूरी, दिशा, प्रकृति तथा आकार सुनिश्चित कर लेते है।

(c) वायलिन तथा सितार के स्वरों की आवृत्तियां समान होने पर भी हम दोनों से उत्पन्न स्वरों में भेद कर लेते हैं।

(d) ठोस अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की तरंगों का पोषण कर सकते हैं जबकि गैसों में केवल अनुदैर्ध्य तरंगें ही संचरित हो सकती हैं, तथा

(e) परिक्षेपी माध्यम में संचरण के समय स्पंद की आकृति विकृत हो जाती है।

15.20 रेलवे स्टेशन के बाह्य सिगनल पर खड़ी कोई रेलगाड़ी शांत वायु में 400 Hz आवृत्ति की सीटी बजाती है। (i) प्लेटफॉर्म पर खड़े प्रेक्षक के लिए सीटी की आवृत्ति क्या होगी जबकि रेलगाड़ी (a) 10 m s^{-1} चाल से प्लेटफॉर्म की ओर गतिशील है, तथा (b) 10 m s^{-1} चाल से प्लेटफॉर्म से दूर जा रही है? (ii) दोनों ही प्रकरणों में ध्वनि की चाल क्या है? शांत वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} लीजिए।

15.21 स्टेशन यार्ड में खड़ी कोई रेलगाड़ी शांत वायु में 400 Hz आवृत्ति की सीटी बजा रही है। तभी 10 m s^{-1} चाल से यार्ड से स्टेशन की ओर वायु बहने लगती है। स्टेशन के प्लेटफॉर्म पर खड़े किसी प्रेक्षक के लिए ध्वनि की आवृत्ति, तरंगदैर्ध्य तथा चाल क्या हैं? क्या यह स्थिति तथ्यत: उस स्थिति के समरूप है जिसमें वायु शांत हो तथा प्रेक्षक 10 m s^{-1} चाल से यार्ड की ओर दौड़ रहा हो? शांत वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} ले सकते हैं।

अतिरिक्त अभ्यास

15.22 किसी डोरी पर कोई प्रगामी गुणावृत्ति तरंग इस प्रकार व्यक्त की गई है

$$y(x, t) = 7.5 \sin(0.0050\, x + 12\, t + \pi/4)$$

(a) $x = 1$ cm तथा $t = 1$ s पर किसी बिंदु का विस्थापन तथा दोलन की चाल ज्ञात कीजिए। क्या यह चाल तरंग संचरण की चाल के बराबर है?

(b) डोरी के उन बिंदुओं की अवस्थिति ज्ञात कीजिए जिनका अनुप्रस्थ विस्थापन तथा चाल उतनी ही है जितनी $x = 1$ cm पर स्थित बिंदु की समय $t = 2$ s, 5 s तथा 11 s पर है।

15.23 ध्वनि का कोई सीमित स्पंद (उदाहरणार्थ सीटी की 'पिप') माध्यम में भेजा जाता है। (a) क्या इस स्पंद की कोई निश्चित (i) आवृत्ति, (ii) तरंगदैर्ध्य, (iii) संचरण की चाल है? (b) यदि स्पंद दर 1 स्पंद प्रति 20 सेकंड है अर्थात् सीटी प्रत्येक 20 s के पश्चात् सेकंड के कुछ अंश के लिए बजती है, तो सीटी द्वारा उत्पन्न स्वर की आवृत्ति (1/20) Hz अथवा 0.05 Hz है?

15.24 8.0×10^{-3} kg m^{-1} रैखिक द्रव्यमान घनत्व की किसी लंबी डोरी का एक सिरा 256 Hz आवृत्ति के विद्युत् चालित स्वरित्र द्विभुज से जुड़ा है। डोरी का दूसरा सिरा किसी स्थिर घिरनी के ऊपर गुजरता हुआ किसी तुला के पलड़े से बंधा है जिस पर 90 kg के बाट लटके हैं। घिरनी वाला सिरा सारी आवक ऊर्जा को अवशोषित कर लेता है जिसके कारण इस सिरे से परावर्तित तरंगों का आयाम नगण्य होता है। $t = 0$ पर डोरी के बाएं सिरे (द्विभुज वाले सिरे) $x = 0$ पर अनुप्रस्थ विस्थापन शून्य है ($y = 0$) तथा वह y की धनात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील है। तरंग का आयाम 5.0 cm है। डोरी पर इस तरंग का वर्णन करने वाले अनुप्रस्थ विस्थापन y को x तथा t के फलन के रूप में लिखिए।

15.25 किसी पनडुब्बी से आबद्ध कोई 'सोनार' निकाय 40.0 kHz आवृत्ति पर प्रचालन करता है। कोई शत्रु-पनडुब्बी 360 km h^{-1} चाल से इस सोनार की ओर गति करती है। पनडुब्बी से परावर्तित ध्वनि की आवृत्ति क्या है? जल में ध्वनि की चाल 1450 m s^{-1} लीजिए।

15.26 भूकंप पृथ्वी के भीतर तरंगें उत्पन्न करते हैं। गैसों के विपरीत, पृथ्वी अनुप्रस्थ (S) तथा अनुदैर्ध्य (P) दोनों प्रकार की तरंगों की अनुभूति कर सकती है। S तरंगों की प्रतिरूपी चाल लगभग 4.0 km s^{-1}, तथा P तरंगों की प्रतिरूपी चाल लगभग 8.0 km s^{-1} है। कोई भूकंप-लेखी किसी भूकंप की P तथा S तरंगों को रिकार्ड करता है। पहली P तरंग पहली S तरंग की तुलना में 4 मिनट पहले पहुंचती है। यह मानते हुए कि तरंगें सरल रेखा में गमन करती हैं यह ज्ञात कीजिए कि भूकंप घटित होने वाले स्थान की दूरी क्या है।

15.27 कोई चमगादड़ किसी गुफा में फड़फड़ाते हुए पराश्रव्य ध्वनि उत्पन्न करते हुए उड़ रहा है। मान लीजिए चमगादड़ द्वारा उत्पर्जित पराश्रव्य ध्वनि की आवृत्ति 40 kHz है। किसी दीवार की ओर सीधा तीव्र झपट्टा मारते समय चमगादड़ की चाल ध्वनि की चाल की 0.03 गुनी है। चमगादड़ द्वारा सुनी गई दीवार से परावर्तित ध्वनि की आवृत्ति क्या है ?

विज्ञान संबंधित मूल्य

जिज्ञासा, ज्ञान-पिपासा, वस्तुनिष्ठता, ईमानदारी व सच्चाई, प्रश्न करने का साहस, क्रमबद्ध तर्क, प्रमाण/सत्यापन के पश्चात् स्वीकृति, खुला दिमाग, पूर्णता प्राप्त करने की अभिलाषा तथा मिलजुल कर कार्य करने की भावना आदि विज्ञान संबंधी कुछ आधारभूत मूल्य हैं। इन मूल्यों द्वारा विज्ञान के उन प्रक्रमों को अभिलक्षणित किया जाता है, जो प्रकृति एवं उसकी अपघटनाओं से संबंधित सत्य के अन्वेषण में सहायता प्रदान करते हैं। विज्ञान का उद्देश्य विभिन्न वस्तुओं एवं अपघटनाओं की व्याख्या करना है। अतः विज्ञान सीखने एवं उसका अभ्यास करने के लिए –

- **अपने परिवेश की वस्तुओं तथा घटनाओं के प्रति जिज्ञासु बनें।**
- **प्रचलित विश्वासों एवं मान्यताओं पर प्रश्नचिह्न लगाने का साहस करें।**
- **"क्या", "कैसे" तथा "क्यों" में प्रश्न करें एवं सूक्ष्म प्रेक्षणों, प्रयोगों, परामर्शों, चर्चाओं व तर्कों द्वारा अपना उत्तर प्राप्त करें।**
- **प्रयोगशाला में अथवा उसके बाहर प्राप्त अपने प्रेक्षणों एवं प्रायोगिक परिणामों को सच्चाईपूर्वक लिखें।**
- **आवश्यकता पड़ने पर, प्रयोगों की पुनरावृत्ति सावधानीपूर्वक एवं क्रमबद्ध तरीके से करें, किन्तु किसी भी परिस्थिति में अपने परिणामों में हेरफेर न करें।**
- **तथ्यों, विचार-बुद्धि एवं तर्कों द्वारा अपना मार्गदर्शन करें, पूर्वाग्रहों से ग्रस्त न हों।**
- **अनवरत एवं समर्पित कार्य के द्वारा नई खोजों एवं नए आविष्कारों के लिए उत्कट अभिलाषा रखें।**

परिशिष्ट

परिशिष्ट A 1

ग्रीक वर्णमाला

एल्फा	A	α	न्यू	N	ν
बीटा	B	β	ज़ाई	Ξ	ξ
गामा	Γ	γ	ओमीक्रॉन	O	o
डेल्टा	Δ	δ	पाई	Π	π
एप्सिलॉन	E	ε	रहो	P	ρ
जीटा	Z	ζ	सिग्मा	Σ	σ
ईटा	H	η	टॉअ	T	τ
थीटा	Θ	θ	अपसिलॉन	Y	υ
आयोटा	I	ι	फाइ	Φ	ϕ, φ
कप्पा	K	κ	काइ	X	χ
लैम्डा	Λ	λ	साइ	Ψ	ψ
म्यू	M	μ	ओमेगा	Ω	ω

परिशिष्ट A 2

सामान्य SI पूर्व-लग्न तथा अपवर्त्यों और अपवर्तकों के प्रतीक

गुणज (अपवर्त्य)			अपवर्तक		
गुणक	पूर्वलग्न	प्रतीक	गुणक	पूर्वलग्न	प्रतीक
10^{18}	एक्जा	E	10^{-18}	एटो	a
10^{15}	पेटा	P	10^{-15}	फैम्टो	f
10^{12}	टेरा	T	10^{-12}	पीको	p
10^{9}	गीगा	G	10^{-9}	नैनो	n
10^{6}	मेगा	M	10^{-6}	माइक्रो	μ
10^{3}	किलो	k	10^{-3}	मिली	m
10^{2}	हेक्टो	h	10^{-2}	सेंटी	c
10^{1}	डेका	da	10^{-1}	डेसि	d

परिशिष्ट A 3

कुछ महत्त्वपूर्ण नियतांक

नाम	प्रतीक	मान
निर्वात में प्रकाश की चाल	c	2.9979×10^{8} m s^{-1}
इलेक्ट्रॉन का आवेश	e	1.602×10^{-19} C
गुरुत्वीय नियतांक	G	6.673×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}
प्लांक नियतांक	h	6.626×10^{-34} J s
बोल्ट्ज़मान नियतांक	k	1.381×10^{-23} J K^{-1}
आवोगाद्रो संख्या	N_A	6.022×10^{23} mol^{-1}
सार्वत्रिक गैस नियतांक	R	8.314 J mol^{-1} K^{-1}
इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान	m_e	9.110×10^{-31} kg
न्यूट्रॉन का द्रव्यमान	m_n	1.675×10^{-27} kg
प्रोटॉन का द्रव्यमान	m_p	1.673×10^{-27} kg
इलेक्ट्रॉन-आवेश व द्रव्यमान अनुपात	e/m_e	1.759×10^{11} C/kg
फैराडे नियतांक	F	9.648×10^{4} C/mol
रिडबर्ग नियतांक	R	1.097×10^{7} m^{-1}
बोहर त्रिज्या	a_0	5.292×10^{-11} m
स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियतांक	σ	5.670×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}
वीन नियतांक	b	2.898×10^{-3} m K
मुक्त आकाश का परावैद्युतांक	ε_0	8.854×10^{-12} C^{2} N^{-1} m^{-2}
	$1/4\pi \varepsilon_0$	8.987×10^{9} N m^{2} C^{-2}
मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T m A^{-1} $\cong 1.257 \times 10^{-6}$ Wb A^{-1} m^{-1}

अन्य उपयोगी नियतांक

नाम	प्रतीक	मान
ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक	J	4.186 J cal^{-1}
मानक वायुमंडलीय दाब	1 atm	1.013×10^{5} Pa
परम शून्य	0 K	−273.15 °C
इलेक्ट्रॉन वोल्ट	1 eV	1.602×10^{-19} J
परमाण्वीय द्रव्यमान मात्रक	1 u	1.661×10^{-27} kg
इलेक्ट्रॉन विराम ऊर्जा	mc^2	0.511 MeV
1u का ऊर्जा तुल्यांक	$u c^2$	931.5 MeV
आदर्श गैस का आयतन (0°C तथा 1 atm)	V	22.4 L mol^{-1}
गुरुत्वीय त्वरण (समुद्र तल, विषुवत वृत्त पर)	g	9.78049 m s^{-2}

परिशिष्ट A 4

रूपांतरण गुणक

सरलता के लिए रूपांतरण गुणकों को समीकरण के रूप में लिखा गया है।

लंबाई

1 km = 0.6215 mi

1mi = 1.609 km

1m = 1.0936 yd = 3.281 ft = 39.37 in

1 in = 2.54 cm

1 ft = 12 in = 30.48 cm

1 yd = 3ft = 91.44 cm

1 (light year) प्रकाश वर्ष = 1 ly = 9.461×10^{15}m

1 Å = 0.1nm

क्षेत्रफल

1 $m^2 = 10^4$ cm^2

1km^2 = 0.3861 mi^2 = 247.1 एकड़ (acres)

1 in^2 = 6.4516 cm^2

1ft^2 = $9.29 \times 10^{-2} m^2$

1 m^2 = 10.76 ft^2

1 एकड़ (acre) = 43,560 ft^2

1 mi^2 = 460 (acres) एकड़ = 2.590 km^2

आयतन

1m^3 = $10^6 cm^3$

1 L = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3

1 gal = 3.786 L

1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 in^3

1 in^3 = 16.39 cm^3

1ft^3 = 1728 in^3 = 28.32 L = 2.832×10^4 cm^3

चाल

1 km h^{-1} = 0.2778 m s^{-1} = 0.6215 mi h^{-1}

1mi h^{-1} = 0.4470 m s^{-1} = 1.609 km h^{-1}

1mi h^{-1} = 1.467 ft s^{-1}

चुंबकीय क्षेत्र

1 G = 10^{-4} T

1 T = 1 Wb m^{-2} = 10^4 G

कोण तथा कोणीय चाल

π rad = 180°

1 rad = 57.30°

1° = 1.745×10^{-2} rad

1 rev min^{-1} = 0.1047 rad s^{-1}

1 rad s^{-1} = 9.549 rev min^{-1}

द्रव्यमान

1 kg = 1000 g

1 tonne = 1000 kg = 1 Mg

1 u = 1.6606×10^{-27} kg

1 kg = 6.022×10^{26} u

1 slug = 14.59 kg

1 kg = 6.852×10^{-2} स्लग (slug)

1 u = 931.50 MeV/c^2

घनत्व

1 g cm^{-3} = 1000 kg m^{-3} = 1 kg L^{-1}

बल

1 N = 0.2248 lbf = 10^5 dyn

1 lbf = 4.4482 N

1 kgf = 2.2046 lbf

समय

1 h = 60 min = 3.6 ks

1 d = 24 h = 1440 min = 86.4 ks

1y = 365.24 d = 31.56 Ms

दाब

1 Pa = 1 N m^{-2}

1 bar = 100 kPa

1 atm = 101.325 kPa = 1.01325 bar

1atm = 14.7 lbf/in^2 = 760 mm Hg

= 29.9 in Hg = 33.8 ft H_2O

1 lbf in^{-2} = 6.895 kPa

1 torr = 1mm Hg = 133.32 Pa

ऊर्जा

1 kW h = 3.6 MJ

1 cal = 4.186 J

1ft lbf = 1.356 J = 1.286×10^{-3} Btu

1 L atm = 101.325 J

1 L atm = 24.217 cal

1 Btu = 778 ft lb = 252 cal = 1054.35 J

1 eV = 1.602×10^{-19}J

1 u c^2 = 931.50 MeV

1 erg = 10^{-7}J

शक्ति

1 अश्वशक्ति (horse power, hp) = 550 ft lbf/s
= 745.7 W

1 Btu min^{-1} = 17.58 W

1 W = 1.341×10^{-3} hp
= 0.7376 ft lbf/s

ऊष्मा चालकता

1 W m^{-1} K^{-1} = 6.938 Btu in/hft^2 °F

1 Btu in/hft^2 °F = 0.1441 W/m K

परिशिष्ट A 5
गणितीय सूत्र

ज्यामिति

r त्रिज्या का वृत्त : परिधि $= 2\pi r$; क्षेत्रफल $= \pi r^2$

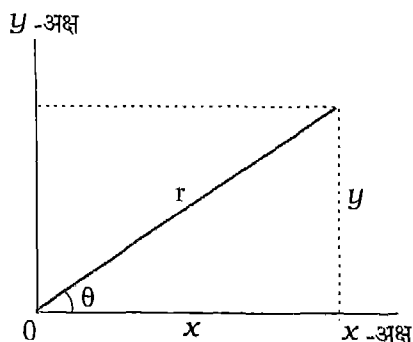
r त्रिज्या का गोला : क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$; आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

r त्रिज्या तथा h ऊंचाई का लंब वृत्तीय शंकु :
क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$; आयतन $= \pi r^2 h$

a आधार तथा h शीर्षलंब का त्रिभुज : क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} a h$

द्विघाती सूत्र

यदि $ax^2 + bx + c = 0$ है, तब $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

कोण θ के त्रिकोणमितीय फलन

चित्र A 5.1

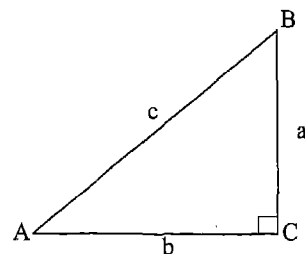
$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\cot\theta = \frac{x}{y}$

$\sec\theta = \frac{r}{x}$ $\csc\theta = \frac{r}{y}$

पाइथैगोरीय प्रमेय

इस समकोण त्रिभुज में,

$a^2 + b^2 = c^2$

चित्र A 5.2

त्रिभुज

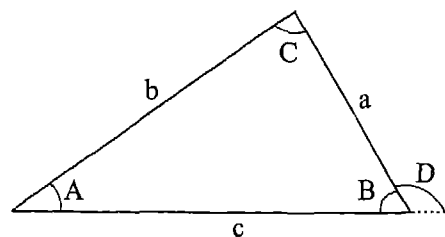
A, B, C कोण हैं,

a, b, c सम्मुख भुजाएं हैं,

कोण A + B + C = 180°

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

बहिष्कोण $D = A + C$

चित्र A 5.3

गणितीय चिह्न एवं प्रतीक

= बराबर

≅ सन्निकटत: बराबर

~ परिमाण की कोटि है

≠ बराबर नहीं है

≡ के सर्वसम है, इस प्रकार परिभाषित किया जाता है

> अधिक है (>> बहुत अधिक है)

< कम है (<< बहुत कम है)

≥ अधिक है अथवा बराबर है (अथवा, कम नहीं है)

≤ कम है अथवा बराबर है (अथवा, अधिक नहीं है)

± धन अथवा ऋण

∝ समानुपाती है

Σ का योग

x अथवा $<x>$ अथवा x_{av} x का औसत मान

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएं

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
$= 1 - 2\sin^2\theta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

द्विपद प्रमेय

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots\ldots (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \ldots\ldots (x^2 < 1)$$

चरघातांकी प्रसरण

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

लघुगणकीय प्रसरण

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots \quad (|x| < 1)$$

त्रिकोणमितीय प्रसरण

(θ रेडियनों में)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots$$
$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\ldots$$
$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} - \ldots\ldots$$

सदिशों का गुणनफल

मान लीजिए $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ x-, y- तथा z- दिशाओं में एकांक सदिश हैं, तो

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1,\ \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = 0,\ \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

कोई सदिश **a** जिसके x-, y- तथा z-अक्ष के अनुदिश घटक a_x, a_y तथा a_z हैं, उन्हें इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

मान लीजिए **a, b** तथा **c** स्वेच्छ सदिश हैं, जिनके परिमाण a, b तथा c हैं, तब

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

$(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (s कोई अदिश है)

मान लीजिए **a** तथा **b** के बीच के दो कोणों में θ लघुतर कोण है, तब

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab\sin\theta$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathbf{k}}$$

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c}$

परिशिष्ट A 6

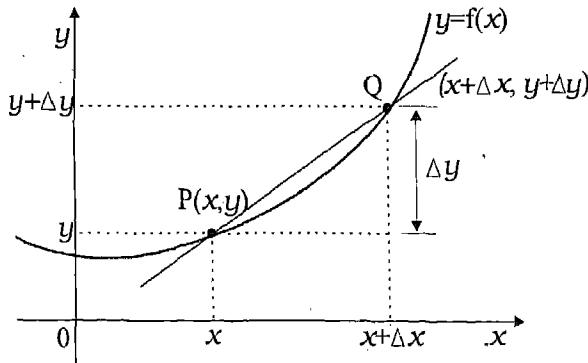
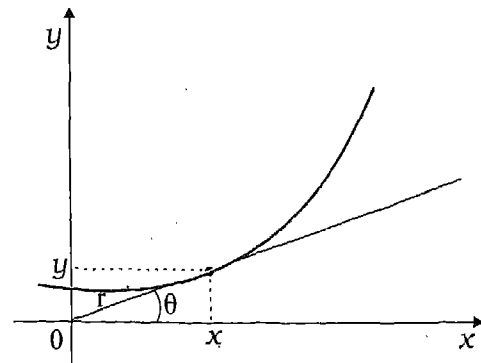
कलन के अवयव

अवकल गणित

'अवकल गुणांक' अथवा 'अवकलज' की संकल्पना का उपयोग करके हम आसानी से वेग तथा त्वरण को परिभाषित कर सकते हैं । यद्यपि आप अवकलजों के विषय में विस्तार से गणित में अध्ययन करेंगे, तथापि इस परिशिष्ट में हम संक्षेप में इस संकल्पना से आपको परिचित कराएंगे, ताकि आपको गति से संबद्ध भौतिक राशियों के वर्णन करने में सुविधा हो जाए ।

मान लीजिए हमारे पास कोई राशि y है जिसका मान किसी एकल चर x पर निर्भर करता है, तथा इस राशि को एक समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है जो y को x के किसी विशिष्ट फलन के रूप में परिभाषित करती है । इसे इस प्रकार निरूपित करते हैं :

$$y = f(x) \tag{1}$$

इस संबंध को फलन $y = f(x)$ का ग्राफ खींचकर चित्र A 6.1(a) में दर्शाए अनुसार y तथा x को कार्तीय निर्देशांक (Cartesian coordinates) मानते हुए स्पष्ट रूप से देख सकते हैं ।

चित्र A 6.1

वक्र $y = f(x)$ पर एक बिंदु P जिसके निर्देशांक (x, y) हैं तथा अन्य बिंदु जिसके निर्देशांक $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ हैं मान लीजिए । P तथा Q को मिलाने वाली सरल रेखा के ढाल को इस प्रकार दर्शाया जाता है,

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \tag{2}$$

अब अगर बिंदु Q को वक्र के अनुदिश बिंदु P की ओर लाया जाता है । इस प्रक्रिया में Δy तथा Δx घटते जाते हैं तथा शून्य की ओर अग्रसर होते जाते हैं, यद्यपि इनका अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ अनिवार्य रूप से लुप्त नहीं होगा । जब $\Delta y \to 0, \Delta x \to 0$ है, तब रेखा PQ का क्या होगा ? आप यह देख सकते हैं कि यह रेखा चित्र A 6.1(b) में दर्शाए अनुसार वक्र के बिंदु P पर स्पर्श रेखा बन जाती है । इसका यह अर्थ हुआ कि $\tan\theta$ बिंदु P पर स्पर्श रेखा के ढाल के सदृश होता जाता है । इसे m द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है,

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \tag{3}$$

अनुपात $\Delta y/\Delta x$ की सीमा, जैसे-जैसे Δx शून्य की ओर बढ़ता जाता है, x के सापेक्ष y का अवकलज कहलाता है तथा इसे dy/dx लिखते हैं । यह वक्र $y = f(x)$ के बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा के ढाल को निरूपित करता है ।

चूंकि $y = f(x)$ तथा $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, हम अवकलज की परिभाषा इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

नीचे फलनों के अवकलजों के लिए कुछ प्राथमिक सूत्र दिए गए हैं । इनमें $u(x)$ तथा $v(x)$, x के यादृच्छिक फलनों का निरूपण करते हैं तथा a और b नियत राशियों को निर्दिष्ट करते हैं, जो x पर निर्भर नहीं करतीं । कुल सामान्य फलनों के अवकलजों की सूची भी दी गई है ।

$$\frac{d(au)}{dx} = a\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v^2}\left[v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right]$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan) = \sec^2 x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \ \sec x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\text{cosec}^2 x) = -\cot x \ \text{cosec}\, x$$

$$\frac{d}{dx}(u)^n = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u}$$

$$\frac{d}{du}(e^u) = e^u$$

यहां x रेडियनों में है ।

अवकलनों के पदों में तात्क्षणिक वेग तथा त्वरण की परिभाषा इस प्रकार करते हैं–

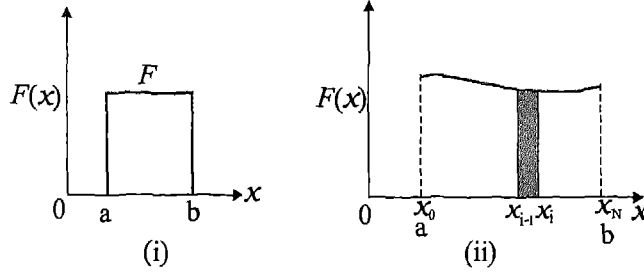
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

समाकलन-गणित

क्षेत्रफल की धारणा से आप भलीभांति परिचित हैं । कुछ सरल ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल के लिए सूत्र भी आपको ज्ञात हैं । उदाहरण के लिए, किसी आयत का क्षेत्रफल उसकी लंबाई और चौड़ाई का गुणनफल, तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार तथा शीर्षलंब के गुणनफल का आधा होता है । परंतु किसी अनियमित आकृति के क्षेत्रफल ज्ञात करने की समस्या पर कैसे विचार किया जाए ? ऐसी समस्याओं को हल करने के लिए समाकलन की गणितीय धारणा आवश्यक है ।

आइए, अब हम एक प्रत्यक्ष उदाहरण लेते हैं। मान लीजिए गति करते किसी कण पर x-अक्ष के अनुदिश $x = a$ से $x = b$ तक कोई चर बल $f(x)$ कार्य करता है । हमारी समस्या यह है कि इस बल द्वारा कण की गति की अवधि में किया गया कार्य (W) कैसे ज्ञात किया जाए । इस समस्या पर अध्याय 6 में विस्तार से चर्चा की गई है ।

चित्र A 6.2 में x के साथ $f(x)$ में परिवर्तन दर्शाया गया है । यदि बल अचर होता, तो किया गया कार्य चित्र A6.2(i) में दर्शाए अनुसार मात्र क्षेत्रफल $f(b\text{-}a)$ होगा । परंतु व्यापक प्रकरणों में, बल चर होता है ।

चित्र A 6.2

इस वक्र [चित्र A 6.2(ii)] के नीचे के क्षेत्रफल का परिकलन करने के लिए एक युक्ति करते हैं जो निम्नलिखित है। x-अक्ष पर a से b तक के अंतराल को संख्या में बहुत अधिक (N) लघु-अंतरालों में विभाजित कर लेते हैं, जो इस प्रकार हैं : $x_0 (=a)$ से x_1 तक, x_1 से x_2 तक, x_2 से x_3 तक,......x_{N-1} से $x_N (=b)$ तक । इस प्रकार वक्र के नीचे का कुल क्षेत्रफल N पट्टियों में विभाजित हो जाता है । प्रत्येक पट्टी सन्निकटतः आयताकार है, चूंकि किसी पट्टी पर $F(x)$ में परिवर्तन नगण्य है । चित्र A 6.2(ii) में दर्शायी गई iवीं पट्टी का सन्निकटतः क्षेत्रफल तब होगा,

$$\Delta A_i = F(x_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i)\Delta x$$

यहां Δx पट्टी की चौड़ाई है जो हमने सभी पट्टियों के लिए समान ली है । आप उलझन में पड़ सकते हैं कि इस व्यंजक में हमें $F(x_{i-1})$ लिखना चाहिए अथवा $F(x_i)$ तथा $F(x_{i-1})$ का माध्य लिखना चाहिए । यदि संख्या N को बहुत-बहुत बड़ी ($N \to \infty$) लें, तो फिर इसका कोई महत्त्व नहीं रहेगा । क्योंकि तब पट्टियां इतनी पतली होंगी कि $F(x_i)$ तथा $F(x_{i-1})$ के बीच का अंतर इतना कम होगा कि उसे नगण्य माना जा सकता है । तब वक्र के नीचे का कुल क्षेत्रफल,

$$A = \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\Delta x$$

इस योग की सीमा को, जब $N \to \infty$ हो, a से b तक $F(x)$ का x पर समाकलन कहते हैं । इसे एक विशेष प्रतीक दिया गया है जिसे नीचे दर्शाया गया है–

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

समाकलन-चिह्न ∫ विस्तारित S जैसा दिखाई देता है । यह हमें याद दिलाता है कि मूल रूप से यह असंख्य पदों के योग की सीमा है ।

एक अत्यंत महत्त्वपूर्ण गणितीय तथ्य यह है कि समाकलन, कुछ अर्थों में अवकलन का व्युत्क्रम है । मान लीजिए हमारे पास कोई फलन $g(x)$ है जिसका अवकलन $f(x)$ है, तब $f(x) = \dfrac{dg(x)}{dx}$

फलन $g(x)$ को $f(x)$ का **अनिश्चित समाकल** कहते हैं तथा इसे इस प्रकार निर्दिष्ट किया जाता है

$$g(x) = \int f(x)dx$$

कोई समाकल जिसकी निम्न सीमा तथा उच्च सीमा ज्ञात हो, **निश्चित समाकल** कहलाता है । यह कोई संख्या होती है । अनिश्चित समाकल की कोई सीमा नहीं होती । यह एक फलन होता है । उपरोक्त प्रकरण के लिए गणित की एक मूल प्रमेय बताती है कि

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(x)\Big|_a^b \equiv g(b) - g(a)$$

उदाहरण के लिए, मान लीजिए $f(x) = x^2$, तथा हम $x = 1$ से $x = 2$ तक इसके निश्चित समाकल का मान ज्ञात करना चाहते हैं। वह फलन $f(x)$ जिसका अवकलन x^2 होता है, $x^3/3$ है। अत:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

स्पष्ट है कि निश्चित समाकलों का मूल्यांकन करने के लिए हमें उसके तदनुरूपी अनिश्चित समाकलों को जानना आवश्यक है। कुछ सामान्य अनिश्चित समाकल इस प्रकार हैं–

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln x \qquad (x > 0)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

यहां x रेडियन में है ।

अवकल गणित तथा समाकलन-गणित का आरंभिक ज्ञान कठिन नहीं है तथा यहां आपको कलन की मूल धारणाओं से परिचित कराने का प्रयास किया गया है । इसके विषय में अधिक विस्तार में आप अपने गणित के पाठ्यक्रमों में पढ़ेंगे ।

परिशिष्ट A 7

भौतिक राशियों, रासायनिक तत्वों तथा न्यूक्लाइडों के प्रतीकों के उपयोग के लिए सामान्य मार्गदर्शन

- भौतिक राशियों को प्रतीक रूप में सामान्यत: अंग्रेजी वर्णमाला के किसी अक्षर से निरूपित करते हैं तथा इन्हें तिरछे (अथवा ढालू) टाइप में छपवाया जाता है । तथापि जिस राशि के लिए दो अक्षरीय प्रतीक आवश्यक हों तो उन्हें दो प्रतीकों के गुणनफल के रूप में दर्शाना होता है, पर इन प्रतीकों को पृथक् दर्शाने के लिए कुछ स्थान छोड़ना आवश्यक होता है ।
- नामों अथवा व्यंजकों के संक्षिप्त रूपों, जैसे–potential energy के लिए p.e. का उपयोग भौतिक समीकरणों में नहीं किया जाता । पाठ्य सामग्री में इन संक्षिप्त रूपों को साधारण रोमन (सीधे) टाइप में छपवाया जाता है ।
- सदिश राशियों को मोटे टाइप में तथा सीधे छपवाया जाता है । तथापि कक्षा में सदिश राशियों को प्रतीक के शीर्ष पर तीर द्वारा निर्दिष्ट किया जा सकता है ।
- दो भौतिक राशियों के गुणनफल को उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा जाता है । एक भौतिक राशि को दूसरी भौतिक राशि से विभाजित करना एक क्षैतिज दंड खींचकर अथवा सॉलिडस (अथवा तिरछी रेखा /) के साथ निर्दिष्ट किया जा सकता है; अथवा अंश तथा हर के प्रथम घात के व्युत्क्रम के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है (इस गुणनफल में अंश तथा हर में स्पष्ट पहचान के लिए उचित स्थानों पर कोष्ठकों का उपयोग किया जाता है) ।
- रासायनिक तत्वों के प्रतीकों को रोमन (सीधे) टाइप में लिखा जाता है । प्रतीक के अंत में विराम चिह्न अथवा बिंदु (.) नहीं लगाया जाता ।
  उदाहरण के लिए, Ca, C, H, He, U, आदि ।
- किसी न्यूक्लाइड से जुड़े अंकों का उल्लेख उन्हें बाएं अधोलिखित (परमाणु क्रमांक) तथा बाएं उपरिलिखित (द्रव्यमान संख्या) के रूप में लिखकर किया जाता है ।
  उदाहरण के लिए, U-235 न्यूक्लाइड को ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ लिखकर व्यक्त किया जाता है (यहां 235 द्रव्यमान संख्या तथा 92 परमाणु क्रमांक को व्यक्त करता है तथा U यूरेनियम का रासायनिक प्रतीक है) ।
- यदि आवश्यक हो, तो दाईं उपरिलिखित स्थिति का उपयोग आयनीकरण की अवस्था (आयनों के प्रकरण में) निर्दिष्ट करने के लिए किया जाता है ।
  उदाहरण के लिए, $\mathrm{Ca}^{2+}, \mathrm{PO}_4^{3-}$

परिशिष्ट A 8

SI मात्रकों, कुछ अन्य मात्रकों तथा SI पूर्वलग्नों के प्रतीकों के उपयोग के लिए सामान्य मार्गदर्शन

- भौतिक राशियों के मात्रकों के प्रतीकों को रोमन (सीधे टाइप) में छापा/लिखा जाता है।
- मात्रकों के मानक तथा अनुमोदित प्रतीकों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों से आरंभ करके रोमन (सीधे टाइप) में लिखा जाता है। मात्रकों के लघु उल्लेखों, जैसे kg, m, s, cd आदि को प्रतीकों के रूप में लिखा जाता है, संक्षिप्त रूप में नहीं। मात्रकों के नाम को कभी भी बड़े अक्षरों में नहीं लिखते। तथापि, मात्रक के प्रतीक को केवल तभी बड़े अक्षर में लिखा जाता है, जब मात्रक के प्रतीक को किसी वैज्ञानिक के नाम से व्युत्पन्न किया गया हो, ऐसी स्थिति में मात्रक का आरंभ बड़े रोमन अक्षर से किया जाता है।

  उदाहरण के लिए : मात्रक मीटर ('metre') के लिए 'm', "दिन" ("day") के लिए d, मात्रक वायुमंडलीय दाब ('atmospheric pressure') के लिए atm, मात्रक हर्ट्ज़ ('hertz') के लिए Hz, मात्रक वेबर ('weber') के लिए Wb, मात्रक जूल ('joule') के लिए J, मात्रक ऐम्पियर ('ampere') के लिए A, मात्रक वोल्ट ('volt') के लिए V, आदि का प्रयोग प्रतीकों के रूप में किया जाता है। इसका केवल एक ही अपवाद है L, जो कि मात्रक लीटर (litre) का प्रतीक है। ऐसा अरबी संख्यांक 1 तथा लोअर केस रोमन के अक्षर l को छापने अथवा लिखने में होने वाली भ्रांति से बचने के लिए किया गया है।
- मात्रकों के प्रतीकों को उनके लिए अनुमोदित अक्षरों में लिखने के पश्चात् उनके अंत में पूर्ण विराम नहीं लगाया जाता तथा मात्रकों के प्रतीकों को केवल एकवचन में ही लिखा जाता है बहुवचन में नहीं, अर्थात् किसी मात्रक का प्रतीक बहुवचन में अपरिवर्तित रहता है।

  उदाहरण के लिए : लंबाई 25 सेंटीमीटर (centimetres) के लिए मात्रक का प्रतीक 25 cm के रूप में लिखा जाता है, 25 cms अथवा 25 cm. अथवा 25 cms., आदि नहीं लिखा जाता।
- सॉलिडस (solidus) अर्थात् (/) के उपयोग का अनुमोदन केवल एक अक्षर के मात्रक प्रतीक के अन्य मात्रक प्रतीक द्वारा विभाजन का संकेतन करने के लिए किया गया है। एक से अधिक सॉलिडस का उपयोग नहीं किया जाता।

  उदाहरण के लिए, m/s^2 अथवा $m\ s^{-2}$ (m तथा s^{-2} के बीच कुछ स्थान छोड़ते हुए) लिख सकते हैं परंतु m/s/s नहीं;

  $1\ Pl = 1\ N\ s\ m^{-2} = 1\ N\ s/m^2 = 1\ kg/s\ m = 1\ kg\ m^{-1}s^{-1}$ परंतु 1 kg/m/s नहीं;

  J/K mol अथवा $J\ K^{-1}\ mol^{-1}$, परंतु J/K/mol नहीं; आदि।
- पूर्वलग्न के प्रतीकों को रोमन (सीधे) टाइप में छापा जाता है तथा पूर्वलग्न के प्रतीक तथा मात्रक के प्रतीक के बीच कोई स्थान नहीं छोड़ा जाता। इस प्रकार मात्रक प्रतीकों के बहुत निकट लिखी कुछ दशमलव भिन्न या गुणज, जब वे इतने छोटे हों या बड़े हों, कि उनका लिखना असुविधाजनक हो तो उनको लिखने के लिए कुछ मान्य पूर्वलग्नों का उपयोग किया जाता है।

  उदाहरण के लिए :

  मेगावाट ($1\ MW = 10^6 W$); नेनो सेकंड ($1\ ns = 10^{-9} s$);

  सेंटीमीटर ($1\ cm = 10^{-2} m$); पीकोफैराड ($1\ pF = 10^{-12} F$);

  किलोमीटर ($1\ km = 10^3 m$); माइक्रोसेकंड ($1\ \mu s = 10^{-6} s$);

  मिलीवोल्ट ($1\ mV = 10^{-3}\ V$); गीगा हर्ट्ज़ ($1\ GHz = 10^9\ Hz$);

  किलोवाट-घंटा ($1\ kWh) = 10^3\ Wh = 3.6\ MJ = 3.6 \times 10^6\ J$);

  माइक्रो ऐम्पियर ($1\ \mu A = 10^{-6} A$); माइक्रॉन ($1\ \mu m = 10^{-6} m$)

  एंगस्ट्रॉम ($1 Å = 0.1\ nm = 10^{-10}\ m$); आदि।

  मात्रक 'माइक्रॉन' जो कि 10^{-6} m अर्थात् 1 माइक्रो मीटर के बराबर है, मात्र एक नाम है जो मीटर के अपवर्तक को सुविधाजनक बनाने के लिए है। इसी प्रकार मात्रक फर्मी ('fermi') जो फेम्टोमीटर अथवा 10^{-15} m के बराबर है, का उपयोग नाभिकीय अध्ययनों में लंबाई के सुविधाजनक मात्रक की भांति किया जाता है। इसी प्रकार, एक अन्य मात्रक "बार्न" (barn) जो $10^{-28} m^2$ के बराबर है, का उपयोग अवपरामाण्विक कण संघट्टों में अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफलों की मापों के सुविधाजनक मात्रक के रूप में किया जाता है। तथापि 'माइक्रॉन' मात्रक को "micrometre" की तुलना में प्राथमिकता दी जाती है। इसका कारण 'micrometre' मात्रक तथा "micrometer" जो कि लंबाई मापने का यंत्र है,

के बीच भ्रांति से बचना है। SI मात्रकों मीटर तथा सेकंड के ये नए बने अपवर्त्य तथा अपवर्तक (cm, km, μm, μs, ns) इन मात्रकों के नए संयुक्त, अपृथक्करणीय प्रतीकों का निर्माण करते हैं।

- जब कोई पूर्वलग्न किसी मात्रक के प्रतीक से पहले लगाया जाता है, तो पूर्वलग्न तथा प्रतीक का संयोजन उस मात्रक का एक नया प्रतीक माना जाता है, जिस पर कोष्ठक का उपयोग किए बिना ही कोई धनात्मक अथवा ऋणात्मक घात लगाई जा सकती है। इन्हें अन्य मात्रकों के प्रतीकों के साथ संयोजित करके संयुक्त मात्रक बनाए जा सकते हैं। घातांकों के बंधन के नियम साधारण बीजगणित की भांति नहीं होते।

  उदाहरण के लिए:

  cm^3 का सदैव अर्थ $(cm)^3 = (0.01\ m)^3 = (10^{-2} m)^3 = 10^{-6} m^3$, परंतु $0.01\ m^3$ अथवा $10^{-2} m^3$ अथवा $1\ c\ m^3$ (यहां पूर्वलग्न c तथा m^3 के बीच स्थान अर्थहीन है, क्योंकि पूर्वलग्न को मात्रक के प्रतीक के साथ जोड़ा जाना है। किसी पूर्वलग्न का कोई भौतिक महत्त्व अथवा अपना स्वतंत्र अस्तित्व नहीं होता जब तक कि उसे किसी मात्रक के प्रतीक से जोड़ा न जाए)।

  इसी प्रकार, mA^2 का सदैव ही अर्थ है $(mA)^2 = (0.001\ A)^2 = (10^{-3} A)^2 = 10^{-6} A^2$, परंतु $0.001\ A^2$ अथवा mA^2 कभी नहीं।

  $1\ cm^{-1} = (10^{-2} m)^{-1} = 10^2\ m^{-1}$ परंतु $1\ cm^{-1}$ अथवा $10^{-2}\ m^{-1}$ कभी नहीं;

  $1\ \mu s^{-1}$ का सदैव अर्थ है $(10^{-6}\ s)^{-1} = 10^6\ s^{-1}$, परंतु $1 \times 10^{-6}\ s^{-1}$ नहीं;

  $1\ km^3$ का सदैव अर्थ है $(km)^2 = (10^3\ m)^2 = 10^6\ m^2$, परंतु $10^3\ m^2$ कभी नहीं;

  $1\ mm^2$ का सदैव अर्थ है $(mm)^2 = (10^{-3}\ m)^2 = 10^{-6}\ m^2$ परंतु $10^{-3}\ m^2$ कभी नहीं, आदि।

- किसी पूर्वलग्न का अकेले उपयोग नहीं होता। इसे सदैव ही किसी मात्रक के प्रतीक के साथ संलग्न किया जाता है तथा इसे मात्रक के प्रतीक से पहले (पूर्व-लग्न) लिखा अथवा लगाया जाता है।

  उदाहरण के लिए :

  $10^3/m^3$ का अर्थ $1000/m^3$ अथवा $1000\ m^{-3}$ परंतु k/m^3 अथवा $k\ m^{-3}$ नहीं;

  $10^6/m^3$ का अर्थ है $10,00,000/m^3$ अथवा $10,00,000\ m^{-3}$ परंतु M/m^3 अथवा $M\ m^{-3}$ नहीं

- पूर्वलग्न के प्रतीक को मात्रक के प्रतीक के साथ बीच में बिना कोई स्थान छोड़े लिखा जाता है, जबकि मात्रकों को आपस में गुणा करते समय मात्रकों के प्रतीकों को पृथक्-पृथक् उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा जाता है।

  उदाहरण के लिए :

  $m\ s^{-1}$ (प्रतीक m तथा s^{-1} लोअर केस में, छोटे अक्षर m तथा s पृथक् तथा स्वतंत्र मात्रक-प्रतीक हैं जिनमें m मीटर के लिए तथा s सेकंड के लिए है तथा उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा गया है) का अर्थ है मीटर प्रति सेकंड परंतु "मिली प्रति सेकंड" नहीं।

  इसी प्रकार, ms^{-1} [प्रतीक m तथा s एक दूसरे के बहुत पास-पास सटाकर लिखे गए हैं, जिनमें पूर्वलग्न-प्रतीक m (पूर्वलग्न 'मिली' के लिए) तथा लोअर केस में छोटे अक्षर के साथ मात्रक प्रतीक s (मात्रक 'सेकंड' के लिए) बीच में बिना कोई स्थान छोड़े ms को एक नया संयुक्त मात्रक बनाकर] का अर्थ है "प्रति मिली सेकंड" परंतु "मीटर प्रति सेकंड" कभी नहीं।

  mS^{-1} [प्रतीक m तथा S एक दूसरे के बहुत पास सटाकर लिखे गए हैं, जिनमें पूर्वलग्न-प्रतीक m (पूर्वलग्न 'मिली' के लिए) तथा मात्रक-प्रतीक S बड़े रोमन अक्षर S (मात्रक साइमेंस (siemens) के लिए) बीच में बिना कोई स्थान छोड़े mS को एक नया संयुक्त मात्रक बनाकर] का अर्थ 'प्रति मिली-साइमेंस' है, परंतु 'प्रति मिली सेकंड' कदापि नहीं है।

  C m [प्रतीक C तथा m पृथक्-पृथक् लिखे गए हैं, जो मात्रक प्रतीकों C (मात्रक कूलॉम के लिए) तथा m (मात्रक मीटर के लिए) को उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर निरूपित करते हैं।] का अर्थ "कूलॉम मीटर" है, परंतु सेंटीमीटर कदापि नहीं, आदि।

- जब तक एक पूर्वलग्न उपलब्ध है, दुहरे पूर्वलग्नों का उपयोग वर्जित है।

  उदाहरण के लिए :

  $10^{-9}\ m = 1\ nm$ (नैनोमीटर) है, परंतु $1\ m\mu m$ (मिलीमाइक्रोमीटर) नहीं है।

  $10^{-6}\ m = 1\ \mu m$ (माइक्रॉन) है, परंतु 1 mmm (मिलीमिलीमीटर) नहीं है।

  $10^{-12}\ F = 1\ pF$ (पीको फैराड) है, परंतु $1\ \mu\mu F$ (माइक्रोमाइक्रो फैराड) नहीं है।

  $10^9\ W = 1\ GW$ (गीगावाट) है, परंतु 1 kMW (किलोमेगावाट) नहीं है, आदि।

- जब कोई भौतिक राशि दो या अधिक मात्रकों के संयोजन द्वारा व्यक्त की जाती है, तब मात्रक तथा मात्रकों के प्रतीकों के किसी संयोजन के उपयोग को वर्जित माना जाता है।

उदाहरण के लिए :

जूल प्रति मोल केल्विन को J/mol K अथवा J mol^{-1} K^{-1} के रूप में लिखा जाता है, परंतु joule/mole K अथवा J/mol kelvin अथवा J/mole K, आदि नहीं लिखते।

जूल प्रति टेसला को J/T अथवा JT^{-1} के रूप में लिखा जाता है, परंतु joule/T अथवा J per tesla अथवा J/tesla, आदि **नहीं** लिखते।

न्यूटन मीटर सेकंड को N m s के रूप में लिखा जाता है, परंतु newton m second अथवा N m second अथवा N metre s अथवा newton metre s नहीं लिखते।

जूल प्रति किलोग्राम केल्विन को J/kg K अथवा J kg^{-1} K^{-1} के रूप में लिखा जाता है, परंतु J/kilog K अथवा joule/kg K अथवा J/kg kelvin अथवा J/kilogram K आदि नहीं लिखते।

- परिकलन की सुविधा के लिए, पूर्वलग्न के प्रतीक को मात्रक के प्रतीक के साथ अंश में लगाया जाता है हर में नहीं।

  उदाहरण के लिए :

  10^6 N/m^2 को 1 N/mm^2 लिखने की अपेक्षा MN/m^2 के रूप में लिखा जाना अधिक सुविधाजनक है।

  उन संख्याओं जिनमें अपवर्त्यों अथवा अपवर्तकों जिनमें 1000 के गुणक सम्मिलित हों, वहां इन संख्याओं को $10^{\pm 3n}$ (जहां n पूर्णांक है) के रूप में लिखने को प्राथमिकता दी जाती है।

- उन प्रकरणों में अत्यंत सावधानी की आवश्यकता होती है जिनमें भौतिक राशियों तथा भौतिक राशियों के मात्रकों के प्रतीक समान होते हैं।

  उदाहरण के लिए :

  भौतिक राशि भार (W) को द्रव्यमान (m) तथा गुरुत्वीय त्वरण (g) के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है। इसे प्रतीकों के पदों में तिरछे टाइप में $W = m\,g$ के रूप में छापा जाता है तथा लिखते समय m तथा g के बीच कुछ स्थान छोड़ देते हैं। इसे मात्रकों watt (W), metre (m), तथा gram (g) के मात्रक प्रतीकों के साथ भ्रम में नहीं पड़ना चाहिए। तथापि, समीकरण $W = mg$ में, प्रतीक W भार को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक J है; m द्रव्यमान को व्यक्त करता है जिसका मात्रक प्रतीक kg है तथा g गुरुत्वीय त्वरण को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक m s^{-2} है। इसी प्रकार, समीकरण $F = m\,a$ में प्रतीक F बल को व्यक्त करता है जिसका मात्रक प्रतीक N है, m द्रव्यमान को व्यक्त करता है जिसका मात्रक प्रतीक kg है तथा a त्वरण को व्यक्त करता है जिसका मात्रक प्रतीक m s^{-2} है। भौतिक राशियों के इन प्रतीकों को मात्रकों "farad" (F), metre (m) तथा "are" (a) के साथ भ्रमित नहीं होना चाहिए।

  प्रतीकों h [पूर्वलग्न हेक्टो (hecto) तथा मात्रक घंटा (hour)], c [पूर्वलग्न सेंटी (centi) तथा मात्रक कैरट ("carat")], d [पूर्वलग्न डेसी (deci) तथा मात्रक दिन (day)], T (पूर्वलग्न टेरा (tera) तथा मात्रक टेसला (tesla), a [पूर्वलग्न एट्टो (atto) तथा मात्रक ऑर (are)], da [पूर्वलग्न डेका (deca) तथा मात्रक डेसिऑर (deciare)] आदि का उपयोग करते समय यथोचित भिन्नता दर्शानी चाहिए।

- मात्रकों की SI प्रणाली का द्रव्यमान का मूल मात्रक "किलोग्राम" मात्रकों की CGS प्रणाली के द्रव्यमान के मूल मात्रक 'ग्राम' के साथ SI पूर्वलग्न 'किलो' (एक गुणज जो 10^3 के बराबर है) को जोड़कर बनता है, जो देखने में असामान्य-सा प्रतीत होता है। इस प्रकार, जबकि हम लंबाई के मात्रक (मीटर अथवा metre) के एक हज़ारवें भाग को मिलीमीटर (mm) लिखते हैं, द्रव्यमान के मात्रक (किलोग्राम अथवा kilogram अथवा kg) के एक हजारवें भाग को मिलीकिलोग्राम **नहीं** लिखते, वरन् केवल ग्राम लिखते हैं। ऐसी विषम परिस्थिति उत्पन्न होने का कारण यह है कि हम द्रव्यमान के मात्रक 'किलोग्राम' के स्थान पर अन्य कोई उपयुक्त मात्रक प्रतिस्थापित नहीं कर सके। अत: एक अपवाद के रूप में द्रव्यमान के मात्रक के साथ अपवर्त्य तथा अपवर्तकों के नाम 'ग्राम' के साथ पूर्वलग्न लगाकर बनाए जाते हैं 'किलोग्राम' के साथ नहीं।

  उदाहरण के लिए :

  10^3 kg = 1 मेगाग्राम (1 Mg), परंतु 1 किलो किलोग्राम (1 kkg) नहीं;

  10^{-6} kg = 1 मिलीग्राम (1 mg), परंतु 1 माइक्रोकिलोग्राम (1 μkg) नहीं;

  10^{-3} kg = 1 ग्राम (1 g), परंतु 1 मिलीकिलोग्राम (1 mkg) नहीं; आदि।

  हम यहां फिर एक बार बता देना चाहते हैं कि आपको केवल अंतर्राष्ट्रीय मान्यताप्राप्त एवं अनुमोदित प्रतीकों का ही उपयोग करना है। यदि आप अपने सामान्य व्यवहार में मात्रकों के प्रतीकों का सामान्य नियमों एवं मार्गदर्शनों के अनुसार निरंतर उपयोग करेंगे, तो आप SI मात्रकों, पूर्वलग्नों तथा भौतिक राशियों और उनसे संबद्ध प्रतीकों के उचित परिप्रेक्ष्य में उपयोग करने में प्रवीण हो जाएंगे।

परिशिष्ट A 9

भौतिक राशियों के विमीय सूत्र

क्रम संख्या	भौतिक राशि	अन्य भौतिक राशियों से संबंध	विमाएं	विमीय सूत्र
1.	क्षेत्रफल	लंबाई × चौड़ाई	$[L^2]$	$[M^0 L^2 T^0]$
2.	आयतन	लंबाई × चौड़ाई × ऊंचाई	$[L^3]$	$[M^0 L^3 T^0]$
3.	द्रव्यमान घनत्व	द्रव्यमान/आयतन	$[M]/[L^3]$ या $[M L^{-3}]$	$[M L^{-3} T^0]$
4.	आवृत्ति	1/आवर्तकाल	$1/[T]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
5.	वेग, चाल	विस्थापन/समय	$[L]/[T]$	$[M^0 L T^{-1}]$
6.	त्वरण	वेग/समय	$[L T^{-1}]/[T]$	$[M^0 L T^{-2}]$
7.	बल	द्रव्यमान × त्वरण	$[M][L T^{-2}]$	$[M L T^{-2}]$
8.	आवेग	बल × समय	$[M L T^{-2}][T]$	$[M L T^{-1}]$
9.	कार्य, ऊर्जा	बल × दूरी	$[M L T^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
10.	शक्ति	कार्य/समय	$[M L^2 T^{-2}]/[T]$	$[M L^2 T^{-3}]$
11.	संवेग	द्रव्यमान × वेग	$[M][L T^{-1}]$	$[M L T^{-1}]$
12.	दाब, प्रतिबल	बल/क्षेत्रफल	$[M L T^{-2}]/[L^2]$	$[M L^{-1} T^{-2}]$
13.	विकृति	विमा में परिवर्तन/मूल विमा	$[L]/[L]$ या $[L^3]/[L^3]$	$[M^0 L^0 T^0]$
14.	प्रत्यास्थता गुणांक	प्रतिबल/विकृति	$\frac{[M L^{-1} T^{-2}]}{[M^0 L^0 T^0]}$	$[M L^{-1} T^{-2}]$
15.	पृष्ठ तनाव	बल/लंबाई	$[M L T^{-2}]/[L]$	$[M L^0 T^{-2}]$
16.	पृष्ठ ऊर्जा	ऊर्जा/क्षेत्रफल	$[M L^2 T^{-2}]/[L^2]$	$[M L^0 T^{-2}]$
17.	वेग प्रवणता	वेग/दूरी	$[L T^{-1}]/[L]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
18.	दाब प्रवणता	दाब/दूरी	$[M L^{-1} T^{-2}]/[L]$	$[M L^{-2} T^{-2}]$
19.	दाब ऊर्जा	दाब × आयतन	$[M L^{-1} T^{-2}][L^3]$	$[M L^2 T^{-2}]$
20.	श्यानता गुणांक	बल/(क्षेत्रफल × वेग प्रवणता)	$\frac{[M L T^{-2}]}{[L^2][L T^{-1}/L]}$	$[M L^{-1} T^{-1}]$
21.	कोण, कोणीय विस्थापन	चाप/त्रिज्या	$[L]/[L]$	$[M^0 L^0 T^0]$
22.	त्रिकोणमितीय अनुपात (sin θ, cos θ, tan θ आदि)	लंबाई/लंबाई	$[L]/[L]$	$[M^0 L^0 T^0]$
23.	कोणीय वेग	कोण/समय	$[L^0]/[T]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
24.	कोणीय त्वरण	कोणीय वेग/समय	$[L^0]/[T^2]$	$[M^0 L^0 T^{-2}]$
25.	परिभ्रमण त्रिज्या	दूरी	$[L]$	$[M^0 L T^0]$
26.	जड़त्व आघूर्ण	द्रव्यमान × (परिभ्रमण त्रिज्या)^2	$[M][L^2]$	$[M L^2 T^0]$
27.	कोणीय संवेग	जड़त्व आघूर्ण × कोणीय वेग	$[M L^2][T^{-1}]$	$[M L^2 T^{-1}]$
28.	बल-आघूर्ण, बलयुग्म का आघूर्ण	बल × दूरी	$[M L T^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$

29.	बल-आघूर्ण (ऐंठन)	कोणीय संवेग/समय अथवा बल × दूरी	$[ML^2 T^{-1}]/[T]$ अथवा $[M L T^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
30.	कोणीय आवृत्ति	2π × आवृत्ति	$[T^{-1}]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
31.	तरंगदैर्ध्य	दूरी	$[L]$	$[M^0 L T^0]$
32.	हबल नियतांक	पश्च सरण चाल/दूरी	$[L T^{-1}]/[L]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
33.	तरंग की तीव्रता	(ऊर्जा/समय)/क्षेत्रफल	$[ML^2 T^{-2}/T]/[L^2]$	$[M L^0 T^{-3}]$
34.	विकिरण दाब	तरंग की तीव्रता/प्रकाश की चाल	$[MT^{-3}]/[LT^{-1}]$	$[M L^{-1} T^{-2}]$
35.	ऊर्जा घनत्व	ऊर्जा/आयतन	$[M L^2 T^{-2}]/[L^3]$	$[M L^{-1} T^{-2}]$
36.	क्रांतिक वेग	$\frac{\text{रेनॉल्ड संख्या} \times \text{श्यानता गुणांक}}{\text{द्रव्यमान घनत्व} \times \text{त्रिज्या}}$	$\frac{[M^0 L^0 T^0][ML^{-1}T^{-1}]}{[ML^{-3}][L]}$	$[M^0 L T^{-1}]$
37.	पलायन वेग	(2 × गुरुत्वीय त्वरण × पृथ्वी की त्रिज्या)	$[LT^{-2}]^{½} \times [L]^{½}$	$[M^0 L T^{-1}]$
38.	ऊष्मीय ऊर्जा, आंतरिक ऊर्जा	कार्य	$[M L T^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
39.	गतिज ऊर्जा	½ × द्रव्यमान × (वेग)²	$[M][LT^{-1}]^2$	$[M L^2 T^{-2}]$
40.	स्थितिज ऊर्जा	द्रव्यमान × गुरुत्वीय त्वरण × ऊंचाई	$[M][LT^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
41.	घूर्णनी गतिज ऊर्जा	½ × जड़त्व आघूर्ण × (कोणीय वेग)²	$[M^0L^0T^0][ML^2] \times [T^{-1}]^2$	$[M L^2 T^{-2}]$
42.	दक्षता	$\frac{\text{निर्गत कार्य अथवा ऊर्जा}}{\text{निवेश कार्य अथवा ऊर्जा}}$	$\frac{[ML^2T^{-2}]}{[ML^2T^{-2}]}$	$[M^0 L^0 T^0]$
43.	कोणीय आवेग	बल आघूर्ण × समय	$[ML^2T^{-2}][T]$	$[M L^2 T^{-1}]$
44.	गुरुत्वीय नियतांक	$\frac{\text{बल} \times (\text{दूरी})^2}{\text{द्रव्यमान} \times \text{द्रव्यमान}}$	$\frac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M][M]}$	$[M^{-1} L^3 T^{-2}]$
45.	प्लांक नियतांक	ऊर्जा/आवृत्ति	$[ML^2T^{-2}]/[T^{-1}]$	$[M L^2 T^{-1}]$
46.	ऊष्मा धारिता, एंट्रॉपी	ऊष्मीय ऊर्जा/ताप	$[ML^2T^{-2}]/[K]$	$[M L^2 T^{-2} K^{-1}]$
47.	विशिष्ट ऊष्मा धारिता	$\frac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान} \times \text{ताप}}$	$[ML^2T^{-2}]/[M]\ [K]$	$[M^0 L^2 T^{-2} K^{-1}]$
48.	गुप्त ऊष्मा	$\frac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान}}$	$[ML^2T^{-2}]/[M]$	$[M^0 L^2 T^{-2}]$
49.	तापीय प्रसार गुणांक अथवा ऊष्मा प्रसरणीयता	$\frac{\text{विमा में परिवर्तन}}{\text{मूल विमा} \times \text{ताप}}$	$[L]/[L][K]$	$[M^0 L^0 K^{-1}]$
50.	ऊष्मा चालकता	$\frac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा} \times \text{मोटाई}}{\text{क्षेत्रफल} \times \text{ताप} \times \text{समय}}$	$\frac{[ML^2T^{-2}]\ [L]}{[L^2]\ [K]\ [T]}$	$[M L T^{-3} K^{-1}]$
51.	आयतन प्रत्यास्थता गुणांक अथवा (संपीड्यता)⁻¹	$\frac{\text{आयतन} \times \text{दाब में परिवर्तन}}{\text{आयतन में परिवर्तन}}$	$\frac{[L^3][ML^{-1}T^{-2}]}{[L^3]}$	$[M^{-1}\ T^{-2}]$
52.	अभिकेंद्री त्वरण	(वेग)²/त्रिज्या	$[LT^{-1}]^2/[L]$	$[M^0 L T^{-2}]$

क्र.	राशि	सूत्र	विमा	विमीय सूत्र
53.	स्टेफॉन नियतांक	$\frac{(\text{ऊर्जा/क्षेत्रफल} \times \text{समय})}{(\text{ताप})^4}$	$\frac{[ML^2T^{-2}]}{[L^2][T][K]^4}$	$[M L^0 T^{-3} K^{-4}]$
54.	वीन नियतांक	तरंगदैर्ध्य × ताप	$[L][K]$	$[M^0 L T^0 K]$
55.	बोल्ट्ज़मान नियतांक	ऊर्जा/समय	$[ML^2T^{-2}]/[K]$	$[M L^2 T^{-2} K^{-1}]$
56.	सार्वत्रिक गैस नियतांक	$\frac{\text{दाब} \times \text{आयतन}}{\text{मोल} \times \text{ताप}}$	$\frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^3]}{[mol][K]}$	$[M L^2 T^{-2} K^{-1} mol^{-1}]$
57.	आवेश	विद्युत् धारा × समय	$[A][T]$	$[M^0 L^0 T A]$
58.	धारा घनत्व	विद्युत् धारा/क्षेत्रफल	$[A]/[L^2]$	$[M^0 L^{-2} T^0 A]$
59.	वोल्टता, विद्युत् विभव, विद्युत् वाहक बल	कार्य/आवेश	$[ML^2T^{-2}]/[AT]$	$[M L^2 T^{-3} A^{-1}]$
60.	प्रतिरोध	$\frac{\text{विभवान्तर}}{\text{विद्युत् धारा}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}{[A]}$	$[M L^2 T^{-3} A^{-2}]$
61.	धारिता	$\frac{\text{आवेश}}{\text{विभवांतर}}$	$\frac{[AT]}{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}$	$[M^{-1} L^{-2} T^4 A^2]$
62.	वैद्युत प्रतिरोधकता अथवा (वैद्युत चालकता)$^{-1}$	$\frac{\text{प्रतिरोध} \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}}$	$[ML^2T^{-3}A^{-2}][L^2]/[L]$	$[M L^3 T^{-3} A^{-2}]$
63.	विद्युत् क्षेत्र	वैद्युत बल/आवेश	$[MLT^{-2}]/[AT]$	$[M L T^{-3} A^{-1}]$
64.	वैद्युत अभिवाह	विद्युत् क्षेत्र × क्षेत्रफल	$[MLT^{-3}A^{-1}][L^2]$	$[M L^3 T^{-3} A^{-1}]$
65.	वैद्युत द्विध्रुव-आघूर्ण	बल आघूर्ण/विद्युत् क्षेत्र	$\frac{[ML^2T^{-2}]}{[MLT^{-3}A^{-1}]}$	$[M^0 L T A]$
66.	विद्युत् क्षेत्र तीव्रता अथवा वैद्युत तीव्रता	$\frac{\text{विभवान्तर}}{\text{दूरी}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}{[L]}$	$[M L T^{-3} A^{-1}]$
67.	चुंबकीय क्षेत्र, चुंबकीय अभिवाह घनत्व, चुंबकीय प्रेरण	$\frac{\text{बल}}{\text{विद्युत् धारा} \times \text{लंबाई}}$	$[MLT^{-2}]/[A][L]$	$[M L^0 T^{-2} A^{-1}]$
68.	चुंबकीय अभिवाह (magnetic flux)	चुंबकीय क्षेत्र × क्षेत्रफल	$[MT^{-2}A^{-1}][L^2]$	$[M L^2 T^{-2} A^{-1}]$
69.	प्रेरकत्व	$\frac{\text{चुंबकीय अभिवाह}}{\text{विद्युत् धारा}}$	$\frac{[ML^2T^{-2}A^{-1}]}{[A]}$	$[M L^2 T^{-2} A^{-2}]$
70.	चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण	बल आघूर्ण/चुंबकीय क्षेत्र अथवा विद्युत धारा × क्षेत्रफल	$[ML^2T^{-2}]/[MT^{-2}A^{-1}]$ अथवा $[A][L^2]$	$[M^0 L^2 T^0 A]$
71.	चुंबकीय क्षेत्र प्रबलता, चुंबकीय तीव्रता अथवा चुंबकीय आघूर्ण घनत्व	$\frac{\text{चुंबकीय आघूर्ण}}{\text{आयतन}}$	$\frac{[L^2A]}{[L^3]}$	$[M^0 L^{-1} T^0 A]$
72.	विद्युतृशीलता (परावैद्युतांक) नियतांक (मुक्त आकाश का)	$\frac{\text{आवेश} \times \text{आवेश}}{4\pi \times \text{वैद्युत बल} \times (\text{दूरी})^2}$	$\frac{[AT][AT]}{[MLT^{-2}][L]^2}$	$[M^{-1} L^{-3} T^4 A^2]$
73.	पारगम्यता नियतांक (मुक्त आकाश का)	$\frac{2\pi \times \text{बल} \times \text{दूरी}}{(\text{विद्युत् धारा}) \times (\text{विद्युत् धारा}) \times \text{लंबाई}}$	$\frac{[M^0 L^0 T^0][MLT^{-2}][L]}{[A][A][L]}$	$[M L T^{-2} A^{-2}]$

74. अपवर्तनांक	निर्वात में प्रकाश की चाल / माध्यम में प्रकाश की चाल	$[LT^{-1}]/[LT^{1}]$	$[M^0 L^0 T^0]$
75. फैराडे नियतांक	आवोगाद्रो नियतांक × मूल आवेश	$[AT]/[mol]$	$[M^0 L^0 TA\, mol^{-1}]$
76. तरंग संख्या	2 π/तरंगदैर्ध्य	$[M^0L^0T^0]/[L]$	$[M^0 L^{-1} T^0]$
77. विकिरण अभिवाह, विकिरण शक्ति	उत्सर्जित ऊर्जा/समय	$[ML^2T^{-2}]/[T]$	$[M L^2 T^{-3}]$
78. विकिरण अभिवाह की ज्योति अथवा विकिरण तीव्रता	स्रोत का विकिरण अभिवाह अथवा विकिरण शक्ति / घन कोण	$[ML^2T^{-3}]/[M^0 L^0 T^0]$	$[ML^2 T^{-3}]$
79. दीप्त शक्ति अथवा स्रोत का ज्योति फ्लक्स	उत्सर्जित ज्योति ऊर्जा / समय	$[ML^2T^{-2}]/[T]$	$[M L^2 T^{-3}]$
80. ज्योति तीव्रता अथवा स्रोत की प्रदीपन क्षमता	ज्योति फ्लक्स / घन कोण	$\frac{[M L^2 T^{-3}]}{[M^0 L^0 T^0]}$	$[M L^2 T^{-3}]$
81. प्रदीपन की तीव्रता अथवा ज्योतिर्मयता	ज्योति तीव्रता / $(दूरी)^2$	$[ML^2T^{-3}]/[L^2]$	$[ML^0 T^{-3}]$
82. आपेक्षिक ज्योति	दी गई तरंगदैर्ध्य के किसी स्रोत का ज्योति फ्लक्स / उसी क्षमता के स्रोत का चरम सुग्राहिता तरंगदैर्ध्य (555 n m) का ज्योति फ्लक्स	$\frac{[ML^2T^{-3}]}{[M L^2 T^{-3}]}$	$[M^0 L^0 T^0]$
83. ज्योति दक्षता	कुल ज्योति फ्लक्स / कुल विकिरण फ्लक्स	$[ML^2T^{-3}]/[ML^2T^{-3}]$	$[M^0 L^0 T^0]$
84. प्रदीप्ति घनत्व अथवा प्रदीप्ति	आपतित ज्योति फ्लक्स / क्षेत्रफल	$[ML^2T^{-3}]/[L^2]$	$[M L^0 T^{-3}]$
85. द्रव्यमान क्षति	[न्यूक्लियॉनों (नाभिक कणों) के द्रव्यमानों का योग] – (नाभिक का द्रव्यमान)	$[M]$	$[M L^0 T^0]$
86. नाभिक की बंधन ऊर्जा	द्रव्यमान क्षति × (निर्वात में प्रकाश की चाल)²	$[M][LT^{-1}]^2$	$[M L^2 T^{-2}]$
87. क्षय-नियतांक	0.693/अर्ध आयु	$[T^{-1}]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
88. अनुनाद आवृत्ति	(प्रेरकत्व × धारिता)$^{-1/2}$	$[ML^2T^{-2}A^{-2}]^{-1/2} \times [M^{-1}L^{-2}T^4A^2]^{-1/2}$	$[M^0 L^0 A^0 T^{-1}]$
89. गुणता कारक अथवा कुंडली का Q - कारक	अनुनाद आवृत्ति × प्रेरकत्व / प्रतिरोध	$\frac{[T^{-1}][ML^2T^{-2}A^{-2}]}{[M L^2 T^{-3}A^{-2}]}$	$[M^0 L^0 T^0]$
90. लेंस की क्षमता	(फोकस दूरी)$^{-1}$	$[L^{-1}]$	$[M^0 L^{-1} T^0]$
91. आवर्धन	प्रतिबिंब–दूरी / वस्तु–दूरी	$[L]/[L]$	$[M^0 L^0 T^0]$
92. तरल प्रवाह दर	π/8 × (दाब) × (त्रिज्या)⁴ / (श्यानता गुणांक) × (लंबाई)	$\frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^4]}{[ML^{-1}T^{-1}][L]}$	$[M^0 L^3 T^{-1}]$
93. धारिता-प्रतिघात	(कोणीय आवृत्ति × धारिता)$^{-1}$	$[T^{-1}]^{-1}[M^{-1}L^{-2}T^4A^2]^{-1}$	$[M L^2 T^{-3} A^{-2}]$
94. प्रेरणिक प्रतिघात	(कोणीय आवृत्ति × प्रेरकत्व)	$[T^{-1}][ML^2T^{-2}A^{-2}]$	$[M L^2 T^{-3} A^{-2}]$

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर

अध्याय 8

8.1 (a) किसी दी गई दूरी के लिए गुरुत्वाकर्षण बल की तुलना में विद्युत् बल अधिक प्रबल होते हैं। परंतु विद्युत् बल आकर्षी भी हो सकते हैं तथा प्रतिकर्षी भी जबकि गुरुत्वाकर्षण बल सदैव आकर्षी बल ही होते हैं। इसके फलस्वरूप भारी उदासीन पिंडों के बीच लगने वाला बलों में सर्वाधिक प्रभुत्व गुरुत्वाकर्षण बल का ही होता है। प्रबल नाभिकीय बलों का प्रभुत्व केवल 10^{-14}m से 10^{-15}m कोटि की दूरी के परिसर में ही होता है।

(b) संपर्क बलों का मूल कारण वैद्युत-चुंबकीय है।

(c) नहीं

(d) हां, यदि अंतरिक्ष यान का आकार उसके लिए इतना अधिक हो कि वह g के परिवर्तन का संसूचण कर सके।

(e) ज्वारीय प्रभाव दूरी के घन के व्युत्क्रमानुपाती होता है और इस अर्थ में यह उन बलों से भिन्न है जो दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं।

8.2 (i) घटता है (ii) घटता है (iii) विषुवत् रेखा (iv) पिंड का द्रव्यमान (v) अधिक

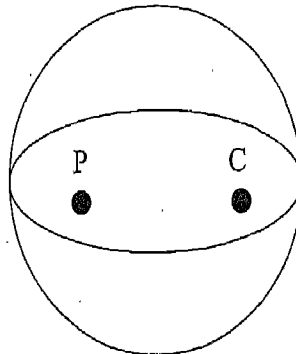
8.3 (i) ऋणात्मक; (ii) गुरुत्वीय, वैद्युत-चुंबकीय, प्रबल नाभिकीय; (iii) गतिज ऊर्जा (iv) कम

8.4 पलायन वेग पिंड के द्रव्यमान तथा प्रक्षेपण की दिशा पर निर्भर नहीं करता। यह उस बिंदु के गुरुत्वीय विभव पर निर्भर करता है जिससे पिंड का प्रक्षेपण किया गया है। चूंकि यह विभव (अल्पत:) उस बिंदु के अक्षांश तथा ऊंचाई पर निर्भर करता है अत: पलायन वेग भी (अल्पत:) इन्हीं कारकों पर निर्भर करता है।

8.5 घूमते हुए पिंड की कक्षा में कोणीय संवेग तथा कुल ऊर्जा को छोड़कर शेष सभी राशियों में परिवर्तन होता है।

8.6 (c) तथा (g) को छोड़कर शेष सभी।

8.7 (b), (c) तथा (d)

8.8 तथा **8.9** इन दोनों प्रश्नों के लिए रचनाएं करिए। अर्धगोले को पूरा करके गोला बनाइए।

P तथा C दोनों पर, विभव नियत है, तथा इसलिए तीव्रता = 0। अत: (c) और (e) सही हैं।

8.10 2.6×10^8 m

8.11 2.0×10^{30} kg

8.12 1.43×10^{12} m

8.13 28N

8.14 125N

8.15 पृथ्वी के केंद्र से 8.0×10^6 m दूरी पर

8.16 $31.7\,\text{km s}^{-1}$

8.17 5.9×10^9 J

8.18 $2.6 \times 10^6\,\text{m s}^{-1}$

8.19 $0, 2.7 \times 10^{-8}\,\text{J kg}^{-1}$; माध्य बिंदु पर रखा कोई पिंड किसी अस्थायी संतुलन में है।

8.20 $-9.4 \times 10^6\,\text{J kg}^{-1}$

8.21 द्वितीय चरण

8.22 25 'ग्रह वर्ष'

8.23 5059 s

8.24 $g_{\text{ध्रुव}} - g_{\text{विषुवत् वृत्त}} = 3.37 \times 10^{-2}\,\text{m s}^{-2}$

8.25 $\frac{GM}{R^2} = 2.3 \times 10^2\,\text{m s}^{-2}, \omega^2 R = 1.1 \times 10^6\,\text{m s}^{-2}$; यहां ω घूर्णन की कोणीय चाल है। इस प्रकार तारे के घूर्णी फ्रेम में, इसके विषुवत् वृत्त पर बहिर्मुखी अपकेंद्री बल की तुलना में अंतर्मुखी बल कहीं अधिक है। अत: पिंड चिपका रहेगा (तथा अपकेंद्र बल के कारण उड़ेगा नहीं)। ध्यान दीजिए, यदि घूर्णन की कोणीय चाल 2000 गुनी बढ़ जाती है, तो पिंड उड़ जाएगा।

8.26 3×10^{11} J

8.27 495km

8.28 $0.33\,\pi R\rho_0, 2.0\,\pi GR\rho_0, 0.40\,\pi GR\rho_0, 0.11\,\pi GR\rho_0$

8.29 $h\nu' = h\nu - \frac{GM}{R}\frac{h\nu}{c^2}$

अर्थात् $\nu' = \nu\left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right)$

यहां ν' विस्थापित आवृत्ति है, अथवा

$\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{GM}{Rc^2}\right)$ यदि $\frac{GM}{Rc^2} << 1$

$\lambda' - \lambda = \lambda\, GM/Rc^2 = 0.371\,\text{Å}$

अध्याय 9

9.1 स्थिर अनुपात का नियम

9.2 गुणित अनुपात का नियम

9.3 12.04; आंकड़ों से आनुभविक सूत्र CH_2 प्राप्त होता है; अत: रासायनिक सूत्र CH_2, C_2H_4, C_3H_6 आदि हो सकते हैं।

9.4 गे-लुसाक का नियम : जब दो गैसें रासायनिक संयोग करके कोई अन्य गैस बनाती हैं और सभी गैसें समान ताप और दाब पर हों तो इन गैसों के आयतनों में छोटे पूर्णांकों का अनुपात होता है।

9.6 8.4×10^{-9} m, इस उत्तर को अत्यधिक अक्षरशः नहीं लेना है क्योंकि यहां यह अनुमान प्रयोग में लाया गया है कि तेल की फिल्म की मोटाई 1 अणु के बराबर है जो कि एक अपरिष्कृत अनुमान है।

9.7 1.8

9.8 (a) दिए गए ग्राफ के अनुसार 150×10^6 N m^{-2} प्रतिबल के लिए विकृति 0.002 है। अतः पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $= 7.5 \times 10^{10}$ Nm^{-2}

(b) पदार्थ की सन्निकट पराभव सामर्थ्य $= 3 \times 10^8$ Nm^{-2}

9.9 (a) पदार्थ A

(b) पदार्थ A अधिक तन्य पदार्थ है क्योंकि इसमें प्रत्यास्थता सीमा तथा विभंजन बिंदु के मध्य अप्रत्यास्थ विरूपण पदार्थ B की अपेक्षा अधिक है।

(c) कोई पदार्थ भंगुर पदार्थ कहा जाता है यदि उसमें प्रत्यास्थता सीमा तथा विभंजन बिंदु के मध्य अप्रत्यास्थ क्षेत्र कम होता है। अतः पदार्थ A की तुलना में पदार्थ B अधिक भंगुर है।

(d) किसी पदार्थ की सामर्थ्य का निर्धारण उसको तोड़ने के लिए आवश्यक प्रतिबल के परिमाण द्वारा किया जाता है : अतः पदार्थ A की सामर्थ्य पदार्थ B से अधिक है।

9.10 (a) यहां ग्राफों में दर्शाए अनुसार कम प्रतिबलों के लिए भी हुक के नियम का पालन नहीं हो रहा है; अधिक प्रतिबलों के लिए भी स्थायी विकृति नहीं होती; प्रत्यास्थता क्षेत्र अधिक परंतु भार हटाए जाने की अवधि में पदार्थ वापस अपने उसी वक्र से नहीं लौटता। दोनों ही पदार्थ प्रत्यास्थता हिस्टेरेसिस दर्शाते हैं।

(b) हिस्टेरेसिस लूप का क्षेत्रफल पदार्थ द्वारा उस पर भार चढ़ाए अथवा उतारे जाने की अवधि में ऊष्मा के रूप में होने वाले ऊर्जा-क्षय के अनुक्रमानुपाती होता है। वह पदार्थ जिसके लिए हिस्टेरेसिस लूप का क्षेत्रफल अधिक होता है दोलनों के समय अधिक ऊर्जा अवशोषित करता है। अतः दोलनों के अवशोषण के लिए रबड़ B को प्राथमिकता दी जाएगी।

(c) कार के टायरों को अत्यधिक गर्म होने से बचाने के लिए उनके निर्माण में रबड़ A का उपयोग किया जाएगा।

9.11 (a) गलत

(b) सत्य

(c) सत्य

(d) गलत : प्रत्यास्थता हिस्टेरेसिस असंरक्षी बलों को दर्शाता है।

(e) गलत : प्रत्यास्थ-बलों को तब तक संरक्षी बल माना जाता है जब तक उनके भार चढ़ाने तथा भार हटाने के वक्र समरूप रहते हैं, भले ही ये वक्र अरैखिक हों।

9.12 1.5×10^{-4} m (स्टील); 1.3×10^{-4} m (पीतल)

संकेत : स्टील के लिए भार 4.0 kg + 6.0 kg है जबकि पीतल के लिए भार केवल 6.0 kg है

9.13 अवरूपण गुणांक 4×10^{-7} m

9.14 सारणी 9.1 के अनुसार कांच की चरम सामर्थ्य $= 50 \times 10^6$ N m^{-2} अतः कांच की छड़ से लटकाया जा सकने वाला अधिकतम द्रव्यमान

$$= \left[\left(50 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2}\right) \times \frac{\pi \, d^2}{g}\right] \text{kg}$$

$$= 392.5 \text{ kg}$$

9.15 2.026×10^9 Pa

9.16 1.034×10^3 kg m^{-3}

9.17 135.84406

9.19 $1u = (1/N_A) \times 10^{-3} kg = 1.660565 \times 10^{-27} kg$

9.20 (c) प्रतिकर्षी, आकर्षी, शून्य

9.21 57.2 J

9.22 अधिक, प्रायोगिक मान 1.06 Å है ।

9.24 4.4 eV से कम

9.26 (i) 0.56 eV; (ii) 0.42 eV; (iii) हां

9.27 (c) द्रव क्रिस्टल

9.28 2.8×10^{-6}

9.29 निहाई के शिखर पर दाब = 2.5×10^{11} Pa

9.30 1.8×10^{2} N

अध्याय 10

10.3 (i) घटता है, (ii) बढ़ती, घटती, (iii) अवरूपण विकृति, अवरूपण विकृति की दर (iv) द्रव्यमान संरक्षण नियम, बर्नूली के समीकरण से (v) अधिक

10.5 6.2×10^{6} Pa

10.6 10.5 m

10.7 समुद्र में उस गहराई पर दाब लगभग 3×10^{7} Pa है । यह संरचना उपयुक्त है क्योंकि यह इससे कहीं अधिक प्रतिबल/दाब को संभाल सकती है ।

10.8 6.92×10^{5} Pa

10.9 0.800

10.10 स्पिरिट वाली भुजा में पारे का स्तर ऊपर उठेगा; पारे के स्तरों में अंतर = 0.221 cm

10.11 नहीं, बर्नूली का नियम केवल धारारेखीय प्रवाहों पर ही लागू होता है ।

10.12 नहीं, जिन दो बिंदुओं पर बर्नूली के समीकरण का अनुप्रयोग करना है उनके बीच वायुमंडलीय दाबों में सार्थक अंतर होना चाहिए ।

10.13 9.8×10^{2} Pa (रेनॉल्ड अंक लगभग 0.3 है, अत: प्रवाह स्तरीय है ।)

10.14 1.5×10^{3} N

10.15 चित्र (a) सही नहीं है [कारण : संकीर्णन पर (जहां नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल कम है) द्रव्यमान संरक्षण नियम के कारण प्रवाह की चाल अधिक है । परिणामस्वरूप, बर्नूली के सिद्धांत के अनुसार वहां पर दाब कम है । हमने यह परिकल्पना की है कि तरल असंपीड्य है ।]

10.16 0.64 m s^{-1}

10.17 $2.5 \times 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$

10.18 (b) तथा (c) के लिए 4.5×10^{-2} N अर्थात् ठीक उतना ही जितना (a) में है ।

10.19 दाब-आधिक्य = 310 Pa, कुल दाब = 1.031×10^{5} Pa । तथापि, चूंकि प्रश्न में दिया गया आंकड़ा तीन अंकों तक यथार्थ है, हमें बूंद के भीतर कुल दाब को 1.01×10^{5} Pa लिखना चाहिए ।

10.20 साबुन के बुलबुले के भीतर दाब-आधिक्य = 20.0 Pa ; साबुन के विलयन में डूबे वायु के बुलबुले के भीतर दाब-आधिक्य = 10.0 Pa । वायु के बुलबुले के लिए बाहर का दाब = $1.01 \times 10^5 + 0.4 \times 10^3 \times 9.8 \times 1.2 = 1.06 \times 10^5$ Pa । दाब आधिक्य इतना कम है कि तीन सार्थक अंकों तक वायु के बुलबुले के भीतर कुल दाब = 1.06×10^5 Pa ।

10.21 55 N (ध्यान दीजिए, आधार का क्षेत्रफल उत्तर को प्रभावित नहीं करता) ।

10.22 (i) (a) के लिए, निरपेक्ष दाब = 96 cm (Hg) ; प्रमापी दाब = 20 cm (Hg)
(b) के लिए, निरपेक्ष दाब = 58 cm (Hg); प्रमापी दाब = –18 cm (Hg) ।
(ii) बाईं भुजा में पारा ऊपर चढ़ेगा ताकि दोनों भुजाओं के पारद तलों में अंतर 19 cm हो जाए ।

10.23 (i) 11.5 kg, (ii) 10.5 kg

10.24 दो समान क्षेत्रफलों वाले आधारों पर दाब (और इसीलिए बल) समान हैं । परंतु जल द्वारा बर्तन की दीवारों पर भी बल आरोपित किया जाता है, यदि बर्तन की दीवारें आधार के पूर्णत: अभिलंबवत नहीं हैं, तो इस बात का शून्येतर ऊर्ध्वाधर घटक होता है । जल द्वारा बर्तन की दीवारों पर आरोपित बलों का नेट ऊर्ध्वाधर घटक पहले बर्तन के लिए दूसरे बर्तन की तुलना में अधिक होता है । अत: दोनों प्रकरणों में आधारों पर समान बल आरोपित होने पर भी बर्तनों के भार भिन्न-भिन्न होते हैं ।

10.25 0.2 m

10.26 (a) दाब ह्रास अधिक है; (b) तरल प्रवाह का वेग बढ़ने पर क्षयकारी बल अधिक महत्त्वपूर्ण हो जाते हैं ।

10.27 (a) 0.98 m s^{-1} ; (b) $1.24 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{s}^{-1}$

10.28 4393 kg

10.29 5.8 cm s^{-1}, 3.9×10^{-10} N

10.30 5.34 mm

10.31 पहली नली के लिए दाबांतर (अवतल तथा उत्तल पार्श्वों के बीच) $= 2 \times 7.3 \times \frac{10^{-2}}{3} \times 10^{-3} = 48.7$ Pa । इसी प्रकार दूसरी नली के लिए दाबांतर = 97.3 Pa फलस्वरूप, दोनों नलियों में भरे जल के स्तरों में अंतर $= \frac{48.7}{10^3 \times 9.8}$ m = 5.0 mm । पतली नली में जल का स्तर अपेक्षाकृत ऊंचा है (ध्यान दीजिए शून्य स्पर्श कोण के लिए नवचंद्रक (meniscus) की त्रिज्या नली की त्रिज्या के समान होती है । दोनों नलियों में पृष्ठ का अवतल पार्श्व 1 वायुमंडल दाब पर है ।

10.32 8 km । यदि हम ऊचाई के साथ g के मान में परिवर्तन को विचार में लाएं तो ऊंचाई कुछ अधिक होगी – लगभग 8.2 km ।

अध्याय 11

11.1 4×10^{-4}

11.2 (i) बिंदुकित आरेख 'आदर्श' गैस व्यवहार के तदनुरूपी है । (ii) $T_1 > T_2$ (iii) 0.26 J K^{-1} ; (iv) नहीं, 6.3×10^{-5} kg H_2 से समान मान प्राप्त होगा ।

11.4 0.14 kg

11.5 $5.3 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

11.6 6.10×10^{26}

11.7 (i) 6.2×10^{-21} J ; (ii) 1.24×10^{-19} J ; (iii) 2.1×10^{-16} J

11.8 हां, आवोगाद्रो नियम के अनुसार । नहीं, तीनों गैसों में सबसे हल्की गैस के लिए v_{rms} सर्वाधिक है; निऑन ।

11.9 2.52×10^3 K

11.10 माध्य मुक्त पथ के लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करिए

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}$$

यहां d अणु का व्यास है । दिए गए ताप तथा दाब के लिए $N/V = 5.10^{25}\,m^{-3}$ तथा $\mu l = 1.0 \times 10^{-7}\,m$; $v_{rms} = 5.1 \times 10^2\,m\,s^{-1}$

संघट्ट आवृत्ति $= \frac{v_{rms}}{\bar{l}} = 5.1 \times 10^9\,s^{-1}$ । संघट्ट द्वारा लिया गया समय $= \frac{d}{v_{rms}} = 4 \times 10^{13}\,s$ । क्रमागत संघट्टों के बीच लिया गया समय $= \frac{\lambda}{v_{rms}} = 2 \times 10^{-10}\,s$ । इस प्रकार, क्रमागत संघट्टों के बीच का समय 1 संघट्ट में लगे समय का 500 गुना है । इस प्रकार किसी गैस का कोई अणु अवश्य ही अधिकांश समय मुक्त गति करता है ।

11.11 लगभग 24 cm पारा बाहर निकल जाता है तथा शेष पारे का 52 cm ऊंचा स्तंभ तथा 48 cm वायु का स्तंभ इसमें जुड़कर बाह्य वायुमंडलीय दाब के साथ साम्य (संतुलन) में रहते हैं । (यहां हम यह मानते हैं कि प्रयोग की समस्त अवधि में ताप में कोई अंतर नहीं होता)

11.12 $1.1 \times 10^{-7}\,m\,s^{-1}$; कण का द्रव्यमान इतना अधिक होता है कि उसकी गति प्रेक्षणीय नहीं होती । उत्तर में कोई परिवर्तन नहीं होगा चूंकि वर्गमाध्य मूल चाल केवल ताप तथा कण के द्रव्यमान पर निर्भर करता है ।

11.13 विषय वस्तु देखिए

11.14 $1.56 \times 10^{-23}\,J\,K^{-1}$; अधिक यथार्थ मान $1.38 \times 10^{-23}\,J\,K^{-1}$ है ।

11.15 परमाण्वीय द्रव्यमान 55.85 है ; $FeCl_3$

11.16 ऑक्सीजन

11.17 (a) 10^{-6} m

(b) विभिन्न दिशाओं में टकरा रहे अणुओं की औसत संख्या से उच्चावचन (घटाव-बढ़ाव) के कारण नेट संघात शून्येतर है ।

(c) 'भारी' गैस द्रव के साथ तापीय साम्य में है, अत: इसका ताप भी T है ।

11.20 6.2×10^{23} ; अधिक यथार्थ मान 6.02×10^{23} है ।

11.21 कार्बन [1.29Å]; सोना [1.59Å] ; द्रवित नाइट्रोजन [1.77Å] ; लिथियम [1.73Å] ; द्रवित फ्लुओरीन [1.88Å] ।

अध्याय 12

12.1 नियॉन : −248.58 °C = −415.44 °F

CO_2 : −56.60 °C = −69.88 °F [$t_F = \frac{9}{5} t_C + 32$] उपयोग कीजिए ।

12.2 195 K = −78 °C

12.3 $T_A = \left(\frac{4}{7}\right) T_B$

12.4 384.8 K

12.5 (a) त्रिक बिंदु एक अद्‌वितीय तापांक होता है; गलन बिंदु तथा क्वथन बिंदु के तापांक दाब पर निर्भर करते हैं; (b) एक अन्य नियत तापांक स्वयं निरपेक्ष शून्य होता है; (c) त्रिक बिंदु 0.01 °C है 0 °C नहीं है; (d) 491.69

12.6 (a) $T_A = 392.69$ K, $T_B = 391.98$ K ; (b) यह विसंगति इसलिए उत्पन्न होती है क्योंकि गैसें पूर्णत: आदर्श गैसें नहीं होतीं । इस विसंगति को कम करने के लिए पाठ्यांक कम से कम दाबों पर लेने चाहिए और मापे गए तापों तथा गैस के त्रिक

बिंदु पर परम दाब के बीच खीचें गए आरेख को जबकि दाब शून्य की ओर अग्रसित होता है तो अन्य तापों को प्राप्त करने के लिए बहिर्वेशित (extrapolate) करना चाहिए । इन परिस्थितियों में गैसें आदर्श गैस जैसा व्यवहार करने लग जाती हैं ।

12.7 छड़ की 45.0 °C पर वास्तविक लंबाई = 63.0 + 0.0136 = 63.0136 cm (तथापि हमें यह कहना चाहिए कि तीन सार्थक अंकों पर लंबाई में अंतर 0.0136 cm है, परंतु कुल लंबाई तीन सार्थक अंकों तक 63.0 cm ही है । इसी छड़ की 27.0 °C पर लंबाई = 63.0 cm

12.8 व्यास में वृद्धि का परिमाण = 1.44×10^{-2} cm

12.9 3.8×10^{2} N

12.10 चूंकि संयोजित छड़ के सिरे शिंकजे में जकड़े नहीं हैं अत: दोनों में मुक्त रूप से प्रसार होगा ।

$\Delta l_{पीतल} = 0.21$ cm ; $\Delta l_{स्टील} = 0.126$ cm = 0.13 cm

लंबाई में कुल परिवर्तन = 0.34 cm । चूंकि छड़ें प्रसार के लिए स्वतंत्र हैं, उनमें कोई तापीय प्रतिबल उत्पन्न नहीं होता ।

12.11 0.0147 = 1.5×10^{-2}

12.12 103 °C

12.13 1.5 kg

12.14 0.43 J g^{-1} K^{-1} ; कमतर

12.15 16 g/min

12.16 एक परमाणुक गैसों के परमाणु द्रव्यमान तथा विशिष्ट ऊष्मा का गुणनफल (मोलर विशिष्ट ऊष्मा) गैसों के अणुगति सिद्धांत की प्रागुक्ति के अनुसार (3/2)R के लगभग बराबर होता है । (अध्याय 11 देखिए)

12.17 गैसें द्विपरमाणुक हैं, तथा स्थानांतरण की स्वातंत्र्य कोटि के अतिरिक्त उनकी अन्य स्वातंत्र्य कोटि (अर्थात् गति की अन्य विधाएं) भी संभव हैं । गैस के ताप में कुछ वृद्धि के लिए सभी विधाओं की माध्य ऊर्जा में वृद्धि करने के लिए ऊष्मा की आपूर्ति करनी होती है । फलस्वरूप, एक परमाणुक गैसों की तुलना में द्विपरमाणुक गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा अधिक होती है । यह दर्शाया जा सकता है कि यदि हम केवल गति की घूर्णी विधा पर ही विचार करें तो द्विपरमाणुक गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा (5/2)R होती है जो केवल क्लोरीन को छोड़कर सारणी में दिए गए सभी गैसों के प्रेक्षणों के लिए सत्य है । क्लोरीन की मोलर विशिष्ट ऊष्मा का अधिक मान यह दर्शाता है कि क्लोरीन के अणु में कमरे के ताप पर घूर्णी विधा के अतिरिक्त कंपन विधा भी उपस्थित है । (अध्याय 11 देखिए)

12.18 एक दिए गए ताप परिसर में द्विपरमाणुक H_2 में स्थानांतरित तथा घूर्णी गति की दोनों विधाएं होती हैं । ताप घटने पर घूर्णी विधा समाप्त हो जाती है तथा केवल स्थानांतरित विधा ही बचती है जिसके कारण एकपरमाणुक गैसों की भांति H_2 की मोलर विशिष्ट ऊष्मा (3/2)R ही होती है । उच्च तापों पर कंपन विधा भी दृष्टिगोचर होने लगती है फलस्वरूप मोलर विशिष्ट ऊष्मा बढ़कर (7/2)R हो जाती है । विभिन्न ताप परिसरों में कोई निश्चित विधा क्यों दृष्टिगोचर हो जाती है और क्यों लुप्त हो जाती है इसका मूल कारण इन विधाओं के लिए ऊर्जा के क्वान्टीकरण से प्राप्त हो सकता है जिसका आप अपने उच्च कोर्सों में अध्ययन करेंगे ।

12.19 934 J

12.20 (i) त्रिक बिंदु पर ताप = – 56.6 °C तथा दाब = 5.11 atm

(ii) दाब घटने पर CO_2 का क्वथनांक तथा गलनांक दोनों घट जाते हैं ।

(iii) CO_2 के क्रांतिक ताप एवं दाब क्रमश: 31.1 °C तथा 73.0 atm हैं । इससे उच्च ताप पर CO_2 द्रवित नहीं होगी, चाहे उस पर कितना भी अधिक दाब आरोपित किया जाए ।

(iv) (a) वाष्प; (b) ठोस; (c) द्रव

12.21 (i) नहीं, वाष्प सीधे ही ठोस में संघनित हो जाती है ।

(ii) यह द्रव प्रावस्था में परिवर्तित हुए बिना ही सीधे ठोस में संघनित हो जाती है ।

(iii) यह पहले द्रव प्रावस्था में और फिर वाष्प प्रावस्था में परिवर्तित होता है । गलनांक तथा क्वथनांक वे बिंदु हैं जहां 10 atm के नियत दाब पर *P-T* आरेख को क्षैतिज रेखा गलन तथा वाष्पन वक्रों को प्रतिच्छेदित करती हैं ।

(iv) यह द्रव प्रावस्था के किसी स्पष्ट संक्रमण को नहीं दर्शाएगा । परंतु जैसे-जैसे इसका दाब बढ़ेगा यह अपने आदर्श गैस व्यवहार से अधिकाधिक हटता जाएगा ।

12.22 उसे मिठाई खाने से पूर्णत: बचना चाहिए तथा अपने दैनिक आहार में 30 g मक्खन की कटौती करनी चाहिए । उसे अपने उस भोजन में कटौती नहीं करनी चाहिए जो उसे अन्य आवश्यक पौष्टिक तत्व प्रदान करते हैं ।

12.23 4.3 g/min

12.24 77%

12.25 (a) नहीं; जब आयतन घटता है, तो दिए गए ताप पर वही दाब बनाए रखने के लिए कुछ वाष्प द्रव में संघनित हो जाती है ।

(b) अतितप्त जल : किसी दिए गए दाब पर जल के क्वथनांक से अधिक ताप पर जल का द्रव प्रावस्था में होना; अतिशीतित वाष्प : किसी दिए गए दाब पर जल के क्वथनांक से नीचे ताप पर जल का वाष्प रूप में होना । नहीं, ये अवस्थाएं साम्यावस्थाएं नही हैं । ये अस्थायी अवस्थाएं हैं तथा जल के *P-V-T* पृष्ठ पर स्थित नहीं होतीं। अनुप्रयोग : उच्च चाल से गतिमान आवेशित नाभिकीय कणों के संसूचण के लिए बूंद-बूंद कोष्ठ (Bubble Chamber) तथा अभ्र कोष्ठ (Cloud Chamber) में ।

12.27 $(2)^{7/5} = 2.64$

12.28 16.9 J

12.29 (a) 0.5 atm (b) शून्य (c) शून्य (गैस को आदर्श मानते हुए) (d) नहीं, चूंकि प्रक्रिया (जिसे मुक्त प्रसार कहते हैं) तीव्र है तथा नियंत्रित नहीं की जा सकती । अंतर अवस्थाएं साम्य अवस्थाएं नहीं होतीं तथा गैस समीकरण का पालन नहीं करतीं। कुछ समय के पश्चात् गैस साम्यावस्था में लौट आती है जो उसके *P-V-T* पृष्ठ पर स्थित होती है ।

अध्याय 13

13.1 3.7 kg

13.2 238 °C

13.3 5.8×10^3 K; कम; क्योंकि सूर्य एक आदर्श कृष्णिका नहीं है, तथा साथ ही सौर विकिरणों का कुछ भाग वायुमंडल अवशोषित कर लेता है ।

13.5 10 मिनट

अध्याय 14

14.1 (ii), (iii)

14.2 (ii) तथा (iii) सरल आवर्त गति; (i) तथा (iv) आवर्ती गति को निरूपित करते हैं परंतु सरल आवर्त गति का निरूपण नहीं करते [किसी बहुपरमाणुक अणु की कई प्राकृतिक आवृत्तियां होती हैं; अत: व्यापक रूप में, इसका कंपन विभिन्न आवृत्तियों की कई सरल आवर्त गतियों का अध्यारोपण होता है । यह अध्यारोपण आवर्ती तो होता है, परंतु सरल आवर्त गति नहीं होता] ।

14.3 (b) तथा (d) आवर्ती हैं जिनमें प्रत्येक का आवर्तकाल 2 s है; (a) तथा (c) आवर्ती नहीं हैं [ध्यान दीजिए, किसी गति के आवर्ती होने के लिए केवल किसी एक स्थिति की पुनरावृत्ति होना ही पर्याप्त नही होता; एक आवर्तकाल की समस्त गति की क्रमागत पुनरावृत्ति होनी चाहिए] ।

14.4 (i) सरल आवर्त गति, $T = 2\pi/\omega$; (ii) आवर्ती, $T = 2\pi/\omega$ परंतु सरल आवर्त गति नहीं; (iii) सरल आवर्त गति, $T = \pi/\omega$; (iv) आवर्ती, $T = 2\pi/\omega$ परंतु सरल आवर्त गति नहीं; (v) अनावर्ती; (vi) अनावर्ती (प्राकृतिक नियमों के अनुसार स्वीकार करने योग्य नहीं क्योंकि जैसे ही $t \to \infty$, फलन $\to \infty$)

14.5 (i) 0, +, + ; (ii) 0, –, – ; (iii) –, 0, 0 ; (iv) –, –, – ; (v) +, +, + ; (vi) –, –, –

14.6 (iii) सरल आवर्त गति का निरूपण करता है ।

14.7 $A = \sqrt{2}$ cm, $\phi = 3\pi/4$; $B = \sqrt{2}$ cm, $\alpha = 5\pi/4$

14.8 219 N

14.9 आवृत्ति = 3.2 s^{-1}; द्रव्यमान का अधिकतम त्वरण = 8.0 m s^{-2}; द्रव्यमान की अधिकतम चाल = 0.4 m s^{-1}

14.10 (i) $x = 2 \sin 20t$ (ii) $x = 2 \cos 20t$

(iii) $x = -2 \cos 20t$

यहां x cm में है । इन फलनों के न तो आयाम में कोई अंतर है, और न ही आवृत्ति में कोई अंतर है । इनकी प्रारंभिक कलाओं में अंतर है ।

14.11 (a) $x = -3 \sin \pi t$, यहां x को cm में मापा गया है ।

(b) $x = -2 \cos \pi/2\, t$, यहां x को cm में मापा गया है ।

14.13 (i) (a) तथा (b) दोनों के लिए F/k

(ii) (a) के लिए $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ तथा (b) के लिए $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

14.14 (a) संकेत : यदि खिंचाव बल F के प्रभाव में प्रत्येक कमानी की लंबाई में वृद्धि x है, तब $k_1x + k_2x = F$, अर्थात् प्रभावी कमानी-स्थिरांक $k = (k_1 + k_2)$ अतः $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$

(b) $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$

(c) इस प्रकरण में, खिंचाव बल F के प्रभाव में, $F = k_1x$; $F = k_2x$ । अतः प्रभावी कमानी-स्थिरांक $k = F/x = F/(x_1 + x_2)$

अथवा $\dfrac{1}{k} = \dfrac{x_1}{F} + \dfrac{x_2}{F} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$, परिणामस्वरूप $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ यहां $k = \dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$ ।

(d) जैसा (c) में है उसी के समान ।

14.15 1.1×10^2 N m^{-1}; 36 kg

14.16 100 मीटर/मिनट

14.17 8.4 s

14.18 (a) सरल लोलक के लिए k स्वयं m के अनुक्रमानुपाती है, इसलिए m निरस्त हो जाता है।

(b) $\sin\theta < \theta$; यदि प्रत्यानयन बल $mg \sin\theta$ का प्रतिस्थापन $mg\theta$ से कर दें, तब इसका अर्थ यह होगा कि बड़े कोणों के लिए g के परिमाण में प्रभावी कमी, तथा इस प्रकार सूत्र $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ से प्राप्त आवर्तकाल के परिमाण में वृद्धि, जहां यह कल्पना की गई है कि $\sin\theta = \theta$ (जो सभी छोटे कोणीय विस्थापनों के लिए लगभग सत्य होता है ।)

(c) हां, क्योंकि कलाई घड़ी में आवर्तकाल (गति) कमानी-क्रिया पर निर्भर करता है, जिसका गुरुत्वीय त्वरण से कोई संबंध नहीं होता ।

(d) स्वतंत्रतापूर्वक गिरते हुए मनुष्य के लिए गुरुत्वीय त्वरण g का प्रभावी मान शून्य हो जाता है, अतः आवृत्ति शून्य है ।

14.19 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{g^2 + v^4/R^2}}}$; संकेत: क्षैतिज तल में कार्यरत त्रिज्य (अरीय) त्वरण के $\dfrac{v^2}{R}$ के कारण प्रभावी गुरुत्वीय त्वरण घट जाएगा।

14.20 साम्यावस्था में, कार्क का भार उत्प्लावन बल के बराबर होता है। जब कार्क को x दूरी तक नीचे दबाया जाता है, तब उस पर नेट उत्प्लावन बल $Ax\rho_l g$ कार्य करता है। अत: बल स्थिरांक $k = A\rho_l g$। अब $m = A\,h\rho$ तथा $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ का उपयोग करके हम आवश्यक सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

14.21 (a) 0.31 s; (b) 1.0 m s^{-1}; (c) 1.5 J

14.22 जब दोनों सिरे वायुमंडल की ओर खुले हैं तथा दोनों भुजाओं में भरे द्रवों के तलों में अंतर h है, तब द्रव-स्तंभ पर आरोपित नेट बल $Ah\rho g$ है, यहां A नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल तथा ρ नली में भरे द्रव का घनत्व है। चूंकि प्रत्यानयन बल h के अनुक्रमानुपाती है, अत: गति सरल आवर्त है।

14.23 $T = 2\pi\sqrt{Vm/Ba^2}$ यहां B वायु का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक है। समतापी परिवर्तन के लिए $B = \rho$।

14.24 (a) 5×10^4 N m^{-1}; (b) 1344.6 kg s^{-1}

14.25 22 mm

14.26 संकेत : माध्य गतिज ऊर्जा $= \dfrac{1}{T}\int_0^T \dfrac{1}{2} mv^2 dt$

माध्य स्थितिज ऊर्जा $= \dfrac{1}{T}\int_0^T \dfrac{1}{2} kx^2 dt$

14.27 संकेत : किसी मरोड़ी लोलक के लिए आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{I/\alpha}$, यहां I घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण है। हमारे प्रकरण में $I = \dfrac{1}{2}MR^2$, यहां M चक्रिका का द्रव्यमान तथा R उसकी त्रिज्या है। दी गई राशियों के मान रखने पर, $\alpha = 2.0$ N m rad^{-1}।

अध्याय 15

15.1 0.5 s

15.2 8.7 s

15.3 2.06×10^4 N

15.4 आदर्श गैस नियम मान लीजिए : $P = \dfrac{\rho RT}{M}$

यहां ρ गैस का घनत्व M आण्विक द्रव्यमान तथा T ताप है।

इससे हमें $v = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$ प्राप्त होता है।

इससे यह प्रदर्शित होता है कि तरंग की चाल v

(a) दाब पर निर्भर नहीं करती,

(b) ताप के साथ $\sqrt{T}$ के अनुसार बढ़ती है।

(c) जल की आण्विक द्रव्यमान (18), N_2 के आण्विक द्रव्यमान (28) तथा ऑक्सीजन के आण्विक द्रव्यमान (32) से कम है, अत: आर्द्रता में वृद्धि हाने पर वायु का आण्विक द्रव्यमान घट जाता है, फलस्वरूप चाल v बढ़ जाती है।

15.5 इसका विलोम सत्य नहीं है। किसी प्रगामी तरंग के स्वीकार करने योग्य फलन के लिए एक प्रत्यक्ष आवश्यकता यह है कि यह हर समय तथा हर स्थान पर परिमित होनी चाहिए। दिए गए फलनों में से केवल फलन (iii) ही इस शर्त को संतुष्ट करता है। शेष फलन संभवतया किसी प्रगामी तरंग को निरूपित नहीं कर सकते।

15.6 (a) 3.4×10^{-4} m (b) 1.49×10^{-3} m

15.7 4.1×10^{-4} m

15.8 (i) यह प्रगामी तरंग है, जो 20 m s^{-2} चाल से दाएं से बाएं गतिशील है।

(ii) 3.0 cm, 5.7 s^{-1}

(iii) $\pi/4$

(iv) 3.5 m

15.9 सभी ग्राफ ज्यावक्रीय हैं। इन सभी के आयाम तथा आवृत्तियां समान हैं, परंतु प्रारंभिक कलाएं भिन्न हैं।

15.10 (i) $6.4\,\pi$ rad

(ii) $0.8\,\pi$ rad

(iii) π rad

(iv) $(\pi/2)$ rad

15.11 (a) अप्रगामी तरंगें

(b) सभी तरंगों के लिए $\lambda = 3$ m, $\nu = 60$ Hz तथा $v = 180$ m s^{-1}

(c) 648 N

15.12 (i) निस्पंदों को छोड़कर डोरी के अन्य सभी बिंदुओं की आवृत्ति तथा कला समान हैं, परंतु आयाम समान नहीं हैं।

(ii) 0.042 m

15.13 (a) यह फलन अप्रगामी तरंग को निरूपित करता है।

(b) किसी भी तरंग के लिए स्वीकार करने योग्य फलन नहीं।

(c) प्रगामी गुणावृत्ति तरंग।

(d) दो अप्रगामी तरंगों का अध्यारोपण।

15.14 (a) 79 m s^{-1}

(b) 248 N

15.15 347 m s^{-1}

संकेत : $\nu_n = \dfrac{(2n-1)v}{4l}$; किसी एक सिरे से बंद पाइप के लिए $n = 1, 2, 3, \ldots$

15.16 5.06 km s^{-1}

15.17 प्रथम गुणावृत्ति (मूल स्वरक), नहीं

15.18 318 Hz

15.20 (i) (a) 412 Hz (b) 389 Hz; (ii) प्रत्येक प्रकरण में 340 m s^{-1}

15.21 400 Hz, 0.875 m, 350 m s^{-1}। नहीं, क्योंकि इस प्रकरण में माध्यम के सापेक्ष प्रेक्षक तथा स्रोत दोनों गतिशील हैं।

15.22 (a) 1.666 cm, 87.75 cm s^{-1}। नहीं, तरंग प्रसारण का वेग -24 m s^{-1}।

(b) वे सभी बिंदु जिनकी दूरियां $n\lambda$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$) है, यहां $\lambda = 12.6$ m (बिंदु $x = 1$ cm से)।

15.23 (a) किसी स्पंद की कोई निश्चित आवृत्ति अथवा तरंगदैर्ध्य नहीं होती। परंतु उसकी (किसी अक्षेपणी माध्यम में) प्रसारण की एक निश्चित चाल होती है।

(b) नहीं

15.24 $y = 0.05 \sin(\omega t - kx)$; यहां $\omega = 1.61 \times 10^3$ s^{-1}, $k = 4.84$ m^{-1}; x तथा y को मीटर में मापा गया है।

15.25 45.9 kHz

15.26 480 km

15.27 42.47 kHz

पारिभाषिक शब्दावली

ढाँचा	Framework	प्रेक्षण	Observation
यांत्रिकी	Mechanics	गुणात्मक	Qualitative
परमाण्विक	Atomic	मात्रात्मक	Quantitative
आण्विक	Molecular	पूर्वानुमान	Prediction
प्रकाश वैद्युत प्रभाव	Photo electric effect	प्रतिरूपण	Modelling
क्वांटम	Quantum	सत्यापन	Verification
प्रतिकण	Antiparticle	परिकल्पना	Speculation
विषय	Discipline	अटकलबाजी	Conjecture
प्रति-इलेक्ट्रॉन	Anti-electron	यथार्थता	Accuracy
एकीकरण	Unification	परिशुद्धता	Precision
न्यूनीकरण	Reduction	दीर्घवृत्तीय	Elliptical
अवयव	Constituent	सूर्य-केंद्रीय	Heliocentric
स्थूल	Macroscopic	ग्रहीय	Planetary
धारणा, संकल्पना	Concept	कक्षा	Orbit
सार्वत्रिक	Universal	प्रकीर्णन	Scattering
प्रभावक्षेत्र	Domain	पारस्परिक क्रिया	Interplay
गुरुत्वाकर्षण	Gravitation	खगोलीय	Astronomical
वैद्युत चुंबक	Electromagnet	विघटनाभिक, रेडियोऐक्टिव	Radioactive
अणुगति सिद्धांत	Kinetic theory	नाभिक	Nucleus
सांख्यिकीय यांत्रिकी	Statistical mechanics	नाभिकीय संलयन	Nuclear fusion
ताप	Temperature	नाभिकीय विखंडन	Nuclear fission
औसत	Average	शृंखला अभिक्रिया	Chain reaction
माध्य	Mean	बंधन ऊर्जा	Binding energy
पार्थिव	Terrestrial	विलोपन	Annihilation
आकाशीय पिंड	Celestial Object	चिरसम्मत भौतिकी	Classical Physics
ग्रहण	Eclipse	संतुलन, साम्यावस्था	Equilibrium
ज्वारभाटा	Tide	वैद्युतगतिकी, विद्युत्-गतिकी	Electrodynamics
ज्वालामुखी	Volcano	प्रकाशिकी	Optics
इन्द्रधनुष	Rainbow	ऊष्मागतिकी	Thermodynamics
परिघटना	Phenomena	चुंबकीय क्षेत्र	Magnetic field
अन्योन्य क्रिया	Interaction	निकाय	System
प्रौद्योगिकी	Technology	आयनमंडल	Ionosphere

दक्षता	Efficiency
परास	Range
दृढ़ पिंड	Rigid body
विद्युत्वाही चालक	Current carrying conductor
मूल कण	Elementary particles
वायु प्रतिरोध	Air resistance
निर्वातित	Evacuated
मुक्त पतन	Free fall
आकाशगंगा	Galaxy
विश्व	Universe
भौतिक राशि	Physical quantity
अनुप्रयुक्त भौतिकी	Applied Physics
मापन	Measurement
सन्निकटन	Approximation
त्वरण	Acceleration
गुरुत्वीय त्वरण	Acceleration due to gravity
प्रतिरोध	Resistance
संचार	Communication
अनुप्रयोग	Applications
आण्विक शस्त्र	Nuclear Weapon
आण्विक शक्ति रिएक्टर	Nuclear power reactor
न्यूट्रॉन-प्रेरित विखंडन	Neutron induced fission
वैकल्पिक ऊर्जा स्रोत	Alternative energy source
जीवाश्मी ईंधन	Fossil fuel
सौर ऊर्जा	Solar energy
भूतापीय ऊर्जा	Geothermal energy
आनुवंशिक अभियांत्रिकी	Genetic engineering
आघात	Impact
चक्रदोला (गोल चक्र)	Merry go round
पेशीय बल	Muscular force
स्पर्शीय बल	Contact force
घर्षण	Friction
कमानी	spring
तनाव	tension
उत्प्लावकता	buoyancy
श्यानता	Viscous force
पृष्ठ तनाव	Surface tension
सूक्ष्म प्रभाव क्षेत्र	Microscopic domain
अंतराण्विक	Intermolecular
अंतरपरमाण्विक	Interatomic
मूल बल	Fundamental force
प्रत्यास्थ बल	Elastic force
व्युत्पन्न बल	Derived force
आनुभविक नियम	Empirical law
अनुक्रमानुपाती	Directly proportional
व्युत्क्रमानुपाती	Inversely proportional
कृत्रिम उपग्रह	artificial satellites
मंदाकिनीय गुच्छे	Galactic cluster
विजातीय आवेश	Unlike charges
सजातीय आवेश	Like charges
प्रतिकर्षण बल	Repulsive force
आवेशयुक्त संघटन	Charged constituents
तात्क्षणिक	Instantaneous
अभिलंबवत्	Normally
ऊर्ध्वाधर	Vertical
लंबवत्	Perpendicularly
क्षैतिज	Horizontal
माध्यम	Medium
गतिकी	Dynamics
तरंग सिद्धांत	Wave theory
विकिरण	Radiation
ब्राउनी गति	Brownian motion
आपेक्षिकता का विशिष्ट सिद्धांत	Special theory of relativity
भौतिकविद्	Physicist
द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता	Mass-energy equivalence
आपेक्षिकता का व्यापक सिद्धांत	General theory of relativity
उद्दीपित उत्सर्जन	Stimulated emission
कृष्णिका	Black body
ब्रह्मांडिकी	Cosmology
स्थूल बोसॉन	Massive boson
क्रांतिक	Critical
उदासीन	Neutral
निरस्त	Cancel
आंतरिक	Intrinsic
उत्सर्जित, निर्गत	Emitted
बोस-आइंस्टाइन सांख्यिकी	Bose-Einstein Statistics
फर्मी-डिरॉक सांख्यिकी	Fermi-Dirac Statistics
मैक्सवैल-बोल्ट्ज़मान सांख्यिकी	Maxwell-Boltzamann Statistics
पाउली अपवर्जन सिद्धांत	Pauli exclusion principle
प्रचक्रण	Spin
अर्धपूर्णांक	Half integer
उच्च ऊर्जा संघट्ट	High energy collision
नाभिकीय प्रक्रिया	Nuclear process

क्षय	Decay
विनिमय	Exchange
संवेग	Momentum
आवेग	Impulse
संरक्षण	Conservation
प्रतिक्षेप	Recoil
अनंत	Infinity
यांत्रिक ऊर्जा	Mechanical energy
गतिज ऊर्जा	Kinetic energy
स्थितिज ऊर्जा	Potential energy
वियुक्त निकाय	Isolated system
ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम	First law of thermodynamics
रूपांतरण	transformation
अभिकारक	Reactant
उत्पाद्	Product
अविनाशी	Indestructible
पुनर्व्यवस्था	Rearrangement
ऊष्माक्षेपी	Exothermic
ऊष्माशोषी	Endothermic
द्रव्यमान-क्षति	Mass defect
आंकिक रूप से	Numerically
अदिश	Scalar
सदिश	Vector
रैखिक	Linear
कोणीय	Angular
समता	Parity
विचित्रता	Strangeness
अस्तित्व	Existence
सममिति	Symmetry
समरूप	Identical
स्थानांतरीय	Translational
विस्थापन	Displacement
दिक्काल	Space and time
समदैशिकता	Isotropy
अमूर्त	Abstract
मूर्त	Concrete
मूल मात्रक	Fundamental unit
व्युत्पन्न मात्रक	Derived unit
गुणज (अपवर्त्य)	Multiples
अपवर्तक	Submultiples
पूर्वलग्न	Prefix

ऊष्मागतिक ताप	Thermodynamic temperature
स्वेच्छगृहीत	Arbitraily chosen
लंबन, पैरेलैक्स	Parallax
कोणीय व्यास	Angular diameter
अंतर्ग्रह	Inferior planets
प्रसर कोण	Elongation
खगोलीय मात्रक	Astronomical unit
संसूचक	Detector
संग्रहण	Reception
प्रतिध्वनि	Echo
बाह्य ग्रह	Exterior planets
अर्धदीर्घ अक्ष	Semi major axis
कक्षीय अवधि	Orbital period
विभेदन	Resolution
पुंज	Beam
सुरंगन सूक्ष्मदर्शिका	Tunnelling microscopy
एकीकृत परामाण्वीय द्रव्यमान (संहति) मात्रक	Unified atomic mass unit
जड़त्वीय द्रव्यमान	Inertial mass
गुरुत्वीय द्रव्यमान	Gravitational mass
सार्थक अंक	Significant figures
विमीय सूत्र	Dimensional formulae
विमीय समीकरण	Dimensional equation
यादृच्छिक त्रुटियां	Random errors
अल्पत्मांक त्रुटियां	Least count error
सुबाह्य	Portable
परिक्रमा, परिक्रमण	Revolution
पथ लंबाई	Path length
संपाती	Coincide
मूल बिंदु	Origin
परिमाण	Magnitude
दिशा	Direction
सरल रेखीय गति	Rectilinear motion
एक-विमीय गति	One dimensional motion
पश्चगामी	Backward
अग्रवर्ती	Forward
ऊर्ध्वगामी, उपरिमुखी	Upward
अधोगामी, अधोमुखी	Downward
तद्नुरूप	Corresponding
औसत वेग	Average velocity
औसत चाल	Average speed

मानक अंकन	Standard notation
प्रवणता	Slope
तात्क्षणिक वेग	Instanteneous velocity
अनंतः सूक्ष्म	Infinitesimally small
संबद्ध	Connecting
अवकल गणित	Differential calculus
अवकल गुणांक	Differential coefficient
स्पर्श रेखा	Tangent
सीमांत प्रक्रिया	Limiting process
आंकड़े	Data
यथार्थ व्यंजक	Exact expression
समय का फलन	Function of time
नत समतल	Inclined plane
तात्क्षणिक त्वरण	Instantaneous acceleration
औसत त्वरण	Average Acceleration
रोचक लक्षण	Interesting feature
निष्कोण	Smooth
अंकीय औसत	Arithmetic average
विषम अंक	Odd number
क्रमिक अंतराल	Successive interval of time
रोधन दूरी	Stopping distance
ब्रेकिंग दूरियां	Braking distances
प्रतिक्रिया काल	Reaction time
उभयनिष्ठ	Common point
परवलय	Parabola
बीजगणित	Algebra
दहन उत्पाद	Products of combustion
नियत दिशा	Constant direction
स्थिर लिफ्ट	Stationary lift
प्रेक्षक	Observer
शुद्ध गतिक	Kinematic
शुद्ध गतिकी	Kinematics
घूर्णन	Rotation
आलेखी विधि	Graphical Method
विश्लेषणात्मक विधि	Analytical method
अदिश गुणनफल	Scalar Product or dot product
सदिश गुणनफल	Vector-product or cross product
प्रक्षेप्य	Projectile
एकसमान वृत्तीय गति	Uniform circular motion
दिशात्मक दृष्टिकोण	Directional aspect
दिक्स्थान	Space
समतल	plane
परिमाप	Perimeter
परम मान	Absolute value
सदिशों का योग संबंधी-त्रिभुज का नियम	Triangle law of vector-addition
सदिशों का योग संबंधी-चतुर्भुज का नियम	Parallelogram law of vector-addition
"शीर्ष एवं पुच्छ" नियम	"Head and Tail" rule
स्थिति सदिश	Position vector
विस्थापन सदिश	Displacement vector
वेग सदिश	Velocity vector
त्वरण सदिश	Acceleration vector
एकांक सदिश	Unit vectors
सदिशों के जोड़ का-साहचर्य नियम	Associative law of vector-addition
क्रम-विनिमेय नियम	Commutative law
वितरण का नियम	Distributive law
संपाती	Coincide
समतुल्यता	Equality
शून्येतर	Non-zero
दक्षिणावर्ती नियम	Right hand rule
त्रिकोणमिति	Trigonometry
निर्देशांक	Co-ordinates
उन्नयन कोण	Angle of elevation
अवनमन कोण	Angle of declination
व्यंजक	Expression
ज्या-नियम	Law of sine
कोज्या-नियम	Law of cosine
त्रिज्यीय	Radial
निर्देश-तंत्र	Frame of reference
फलन	Function
समकालिक	Simultaneous
उड्डयन काल	Time of flight
चट्टान	Cliff
अभिकेंद्र बल	Centripetal force
अभिकेंद्र त्वरण	Centripetal acceleration
आवर्त काल	Time period
आवृत्ति	Frequency
कोणीय चाल	Angular speed
खांचा	Groove
अध्यारोपण	Superposition
गुरुत्वीय विभव	Gravitational potential

भ्रामकता	Fallacy	गतिक घर्षण	Dynamic friction
संवेग संरक्षण	Conservation of momentum	सर्पी घर्षण	Sliding friction
साम्यावस्था	Equilibrium	सीमांत मान	Limiting value
जड़त्वीय फ्रेम	Inertial frame	लोटनिक घर्षण	Rolling friction
छद्म बल	Pseduo-force	बॉल-बेयरिंग	Ball-bearing
परिवर्ती	Variable	स्नेहक	Lubricant
आनत तल	Inclined plane	स्नेहन	Lubrication
अरस्तू	Aristotle	त्वरित फ्रेम	Accelerated frame
युगांतरीय	Epochal	कोरिऑलिस बल	Coriolis force
सार्वभौमिक	Universal	निरपेक्ष विराम	Absolute rest
नेट	Net	तुल्यता	Equivalence
संघट्ट, टक्कर	Collision	प्रणोद	Thrust
जड़त्व	Inertia	दहनशील गैस	Combustion gas
आघूर्ण	Moment	निष्कासित गैस	Ejected gas
आंतरिक बल	Internal force	बल निर्देशक आरेख	Free body diagram
सौर परिवार	Solar system	व्यापकीकरण	Generalisation
उपग्रह	Satellite	संकुचन	Contraction
विरूपण	Deformation	आंतरिक ऊर्जा	Internal energy
युग्म	Pair	असंरक्षी	Non-conservative
अंतरातारकीय	Interstellar space	प्रक्षेप पथ	Trajectory
क्षणिक, क्षण	Instant	संरूपण	Configuration
प्रत्यास्थ	Elastic	मंदक	Moderator
अप्रत्यास्थ	Inelastic	प्रतिक्षेपहीन उत्सर्जन	Recoilless emission
गतिक प्रतिक्रिया	Kinetic reaction	जालक (लैटिस)	Lattice
गतिज घर्षण	Kinetic friction	कोणीय संवेग	Angular momentum
विल्ग, वियुक्त, पृथक	Isolated	वामावर्त	Anticlockwise
बहुभुज	Polygon	कोणीय त्वरण	Angular acceleration
प्रतिक्षेप, प्रतिक्षिप्त	Recoil	क्षेत्रीय वेग	Areal velocity
कुंडलित कमानी	Coiled Spring	सममित अक्ष	Axis of symmetry
उत्प्लावन, उत्प्लावकता	Buoyancy	द्विअंगी निकाय	Binary system
उत्प्लावन बल	Buoyant force	दक्षिणावर्त	Clockwise
संपीडन	Compression	बलयुग्म	Couple
प्रत्यानयन बल	Restoring force	केंद्रक	Centroid
प्रसर कोण दैर्ध्यवृद्धि	Elongation	आलंब	Fulcrum
श्यान बल	Viscous force	गतिपालक चक्र	Fly wheel
कमानी बल	Spring force	पटल	Lamina
विन्यास, संरूपण	Configuration	उत्तोलक-भुजा	Lever arm
अवितान्य	Inextensible	संपर्क रेखा	Line of contact
सूक्ष्म, सूक्ष्मदर्शनीय, सूक्ष्मदर्शीय	Microscopic	जड़त्वाघूर्ण	Moment of inertia
		अभिविन्यास	Orientation
स्थैतिक घर्षण	Static friction	दृढ़ वस्तु	Rigid body
समुपस्थित गति	Impending motion	परिभ्रमण त्रिज्या	Radius of gyration

घूर्णीय गतिज ऊर्जा	Rotational kinetic energy	भार	Weight
बल आघूर्ण	Torque	आंतरिक संरचना	Internal structure
प्रमेय	Theorem	अभिलाक्षणिक गुण	Characteristic properties
तनाव	Tension	इमारती खंड	Building blocks
स्पर्श रेखीय	Tangential	पृथकन	Separation
अक्षीय घूर्णन	Axial rotation	अतिव्यापन	Overlapping
ऊंचाई	Altitude	घातांक	Power
कृत्रिम	Artificial	असार्थक	Inaccurate
शिलाखंड, खंडाश्य	Boulder	तरल यांत्रिकी	Machanics of fluids
कृष्ण विवर	Black hole	वृहदणु	Macromolecule
कृष्णिका	Black body	अंतर्परिक्षिप्त	Inter-dispersed
रसभरी	Berry	अक्रिस्टलीय (कांचाभ)	Amorphous
बंधन ऊर्जा	Binding energy	क्रिस्टलाणु	Crystallite
तारामंडल	Constellations	अंश क्रिस्टलीय ठोस	Semi-crystalline solid
निर्देशांक निकाय	Coordinate system	विकृति (अपरूपण)	Strain
केन्द्राभिमुखी	Centripetal	उभयनिष्ठ	Common to two
संप्रेषण	Communication	सर्वनिष्ठ	Common to all
आंकड़े	Data base	चित्रांकन	Picturisation
अधिचक्र	Epicycle	परीक्षण निदर्श (प्रादर्श)	Experimental sample
दीर्घवृत्त	Ellipse	भंगुर	Brittle
भूमध्यवर्ती उभार	Equational bulge	पराभव बिंदु	Yield point
पलायन चाल	Escape speed	पराभव सामर्थ्य	Yield strength
लिफ्ट	Elevator	चरम सामर्थ्य	Ultimate strength
नाभि	Foci	तनन सामर्थ्य	Tensile strength
भूकेंद्री	Geocentric	आघातवर्ध्य	Ductile
भूस्थैतिक	Geostationary	सुघट्य क्षेत्र	Plastic region
भूसमकालिक	Geosynchronous	प्रत्यास्थ शैथिल्य	Elastic hysteresis
अर्धगोलीय	Hemisphere	क्रियात्मक	Operational
अतिपरिवलय	Hyperbola	व्यावर्तन (ऐंठन)	Twist
तादम्य	Identity	चल द्रवीय	Hydraulic
व्युत्क्रम	Inverse	मिश्रित	Composite
बृहस्पति	Jupiter	वायुमंडलीय	Atmospheric
अक्षांश	Latitude	वायुगतिकी	Aerodynamics
मंगल	Mars	बहिःस्राव	Efflux
बुध	Mercury	तुल्यांक	Equivalent
कक्षा	Orbit	बुलबुला	Bubble
आवर्तिता	Periodicity	तरल	Fluid
प्लूटो	Pluto	तरलगतिकी	Fluid Dynamics
अध्यारोपण	Superposition	प्लवन	Floatation
सार्वत्रिक नियम	Universal law	अंशांकित	Calibrated
शुक्र	Venus	संपीड्य	Compressible
भारहीनता	Weightlessness	केशिका	Capillary

युक्ति	Device
गेज दाब	Gauge pressure
अघूर्णी	Irrotational
धारारेखी प्रवाह	Streamline flow
पृष्ठ तनाव	Surface tension
पृष्ठ ऊर्जा	Surface energy
प्रक्षोभ	Turbulence
अंतिम वेग	Terminal velocity
संरचना	Constitution
विसरण	Diffusion
स्वातंत्र्य-कोटि	Degree of freedom
द्वि-परमाणुक	Diatomic
समविभाजन	Equipartition
परिकल्पना	Hypothesis
अणुक	Molar
एक-परमाणुक	Monatomic
औसतमुक्त पथ	Mean free path
सूक्ष्मदर्शी	Microscope
आविर्भाव	Manifestation
प्रावस्था संक्रमण	Phase transition
बहु-परमाणुक	Polyatomic
पराग कण	Pollen grain
वर्ग-माध्यमूल चाल	Root mean square speed
दृढ़-घूर्णी	Rigid rotator
विशिष्ट ऊष्मा	Specific heat
दूरबीन, दूरदर्शी	Telescope
कंपनीय ऊर्जा	Vibrational energy
टेढ़ा-मेढ़ा	Zig zag
ऊष्मीय	Thermal
ऊष्मा	Heat
परम ताप मापक्रम	Absolute scale of temperature
परम शून्य	Absolute zero
आदर्श गैस	Ideal gas
रेखीय प्रसार गुणांक	Coefficient of linear expansion
आयतन प्रसार गुणांक	Coefficient of volume expansion
प्रतिवेश	Surroundings (of the system)
ऊर्जा के समविभाजन का नियम	Law of equipartition of energy
समतापीय	Isothermal
रुद्धोष्म	Adiabatic
प्रावस्थाएं	Phases (solid, liquid, gas)
अनंत सूक्ष्म	Infinitesimal
साम्य रेखा	Equilibrium line
यांत्रिक साम्यता	Mechanical equilibrium
ऊष्मीय साम्यता	Thermal equilibrium
सह-अस्तित्व	Co-existance
ऊष्माशय	Reservoir (of heat)
अभिगम	Sink (of heat)
प्रशीतक	Refrigerator
निष्पादन गुणांक	Coefficient of performance
आदर्शीकृत उत्क्रमणीय प्रक्रम	Idealized reversible process
असममिति	Asymmetry
अर्ध स्थिर	Semi-static
अक्षयकारी बल	Conservative force
कार्नो इंजन	Carnot engine
कार्नो चक्र	Carnot cycle
क्षयकारी बल	Dissipative force
सूक्ष्म संघटक	Microscopic constituent
ऊष्माधारिता	Thermal capacity, Heat capacity
ग्राम-अणुक आयतन	Molar volume (22.4 L at STP)
अवशोषित	Absorbed
क्वथनांक	Boiling point
गलनांक	Melting point
ऊष्मारोधी	Heat Insulator
रुद्धोष्म भित्ति (दीवार)	Adiabatic wall
तापमिति	Thermometry
तापयुग्म	Thermocouple
ऊष्मीय प्रसार	Thermal expansion
स्थिर आयतन तापमापी	Constant volume thermometer
असंपीड्यता	Incompressibility
संघनित	Condensed
यंग गुणांक/यंग प्रत्यास्थता गुणांक	Young's Modulus
सन्निकटन	Approximation
ऊष्मीय प्रतिबल	Thermal stress
संपीडन विकृति	Compressive strain
अनुप्रस्थ काट	Cross section
ऊष्मामापी, कैलोरीमीटर	Calorimeter
मोलीय विशिष्ट ऊष्मा	Molar specific heat

तापस्थायी	Thermostat	वैद्युत चुंबकीय तरंगें	Electromagnetic wave
सुस्पष्ट	Distinct	द्रव्य तरंगें	Matter wave
समताप रेखा	Isotherm	चर	Variable
स्थैतिककल्प	Quasi-static	संदर्भ (कण)	Reference (particle)
केल्विन मापक्रम	Kelvin scale	प्रक्षेप	Projection
समआयतनिक	Isochoric	त्रिज्य (घटक)	Radial (component)
संचरण	Conduction	लय, ताल	Rythm
संवहन	Convection	विस्पंद	Beats
विकिरण	Radiation	स्वातंत्र्य कोटि	Degree of freedom
ऊष्मा संचरण	Thermal conduction	विधा	Mode
ऊष्मा संवहन, संवहन	Thermal convection	माडुलन	Modulation
ऊष्मा विकिरण	Thermal Radiation	कर्षण	Drag
अनुप्रस्थ काट	Cross section	ऐंठन कोण	Angle of twist
ऊष्मीय संपर्क	Thermal contact	(फूरिये) विश्लेषण	(Fourier) Analysis
स्थायी अवस्था	Stationary state	अनुप्रस्थ तरंग	Transverse wave
ऊष्मा चालकता	Thermal conductivity	अनुदैर्ध्य तरंग	Longitudinal wave
ताप प्रवणता	Temperature gradient	प्रगामी तरंग	Progressive wave
उत्सर्जन	Emission	व्यतिकरण	Interference
अवशोषण	Absorption	दोलन	Oscillation
परावर्तन	Reflection	विक्षोभ	Disturbance
पारगमन	Transmission	वाक्-तंतु	Vocal cords
अवशोषकता	Absorptivity	अंतर-तारकीय आकाश	Inter-stellar space
उत्सर्जकता	Emissivity	सूक्ष्म तरंगें	Microwaves
परावर्तकता	Reflectivity	पराबैंगनी प्रकाश	Ultraviolet light
किरखोफ का नियम	Kirchhoff's law	क्वांटम यांत्रिकीय	Quantum mechanical
बोल्ट्ज़मान-स्टेफॉन का नियम	Boltzmann-Stefan's law	आवर्ती दोलन	Harmonic oscillation
वीन-विस्थापन नियम	Wein's displacement law	स्पंद	Pulse
शीतलन	Cooling	ज्यावक्रीय फलन	Sinusoidal function
दीप कज्जल	Lamp black	कोज्या वक्र	Cosine curve
उत्तापमापी	Pyrometer	अप्रगामी तरंग	Stationary wave
सौर ऊष्मांक	Solar constant	अपरूपण विकृति	Shearing strain
प्रकीरण	Scattered	केशिकात्वीय तरंगें	Capillary waves
आवर्ती गति	Periodic motion	गुरुत्व तरंगें	Gravity waves
सरल आवर्त गति	Simple Harmonic motion	कोणीय तरंग संख्या	Angular wave number
अवमंदित गति	Damped motion	कोणीय आवृत्ति	Angular frequency
प्रणोदित दोलन	Forced oscillations	कला-कोण	Phase angle
युग्मित दोलक	Coupled oscillator	तरंग फलन	Wave function
गोलक	Bob	तरंगदैर्ध्य	Wavelength
कोणांक	Argument	गर्त	Trough
कंपन	Vibration	शीर्ष, शिखर	Crest
काल	Period	तानित डोरी	Stretched string
भूकंपी तरंगें	Seismic wave	आयतन प्रत्यास्थता गुणांक	Bulk modulus

संपोषी व्यतिकरण	Constructive interference	प्रथम गुणावृत्ति	First harmonic
विनाशी व्यतिकरण	Destructive interference	द्वितीय गुणावृत्ति	Second harmonic
निस्पंद	Nodes	गुणावृत्ति श्रेणी	Harmonic series
प्रस्पंद	Antinodes	गुणावृत्ति संख्या	Harmonic number
मूल विधा	Fundamental mode	अनुनाद	Resonance

ग्रंथ सूची

पाठ्यपुस्तकें

इस पुस्तक में जिन विषयों को सम्मिलित किया गया है, उन विषयों के अतिरिक्त अध्ययन के लिए आप निम्नलिखित पुस्तकों में से एक या अधिक पुस्तकें पढ़ना चाहेंगे । यद्यपि इन पुस्तकों में से कुछ उच्च स्तर की हैं और उनमें ऐसे अनेक विषय दिए गये हैं जो इस पुस्तक में नहीं हैं ।

1. **'Ordinary Level Physics'**, A.F. Abbott, Arnold-Heinemann (1984).
2. **Advanced Level Physics,** M. Nelkon and P. Parker, 6th Edition, Arnold-Heinemann (1987).
3. **Advanced Physics,** Tom Duncan, John Murray (2000).
4. **Fundamentals of Physics,** David Halliday, Robert Resnick and Jearl Walker, John Wiley (1997).
5. **University Physics,** H.D. Young, M.W. Zemansky and F.W. Sears, Narosa Pub. House (1982).
6. **Problems in Elementary Physics,** B. Bukhovtsa, V. Krivchenkov, G. Myakishev and V. Shalnov, MIR Publishers, (1971).
7. **Lectures on Physics,** (3 volumes), R.P. Feynman, Addision — Wesley (1965).
8. **Berkeley Physics Course** (5 volumes) McGraw Hill (1965).
   a. Vol. 1 - Mechanics : (Kittel, Knight & Ruderman)
   b. Vol. 2 - Electricity and Magnetism (E.M. Purcell)
   c. Vol. 3 - Waves and Oscillations (Frank S. Craw-ford)
   d. Vol. 4 - Quantum Physics (Wichmann)
   e. Vol. 5 - Statistical Physical (F. Reif)
9. **Fundamental University Physics,** M. Alonso & E.J. Finn, Addison —Wesley (1967).
10. **College Physics,** R.L. Weber, K.V. Manning, M.W. White and G.A. Weygand, Tata McGraw Hill (1977).
11. **Physics : Foundations and Frontiers,** G. Gamow and J.M. Cleveland, Tata McGraw Hill (1978).
12. **Physics for the Inquiring Mind,** E.M. Rogers, Princeton University Press (1960).
13. **PSSC Physics Course:** DC Heath and Co. (1965) Indian Edition, NCERT (1967).
14. **Physics Advanced Level,** Jim Breithampt, Stanley Thornes Publishers (2000).
15. **Physics,** Patrick Fullick, Heinemann (2000).
16. **Conceptual Physics,** Paul G. Hewitt, Addision - Wesley (1998).
17. **College Physics,** Raymond A. Serway and Jerry S. Faughn, Harcourt Brace and Co. (1999).
18. **University Physics,** Harris Benson, John Wiley (1996).
19. **University Physics,** P. Crummet and Arthur B. Western, Wm. C. Brown (1994).
20. **General Physics,** Morton M. Sternheim and Joseph W. Kane, John Wiley (1986).

21. Ph
22. **Advanced Physics,** Keith Gibbs, Cambridge University Press (1996).
23. **Understanding Basic Mechanics,** F. Reif, John Wiley (1995).
24. **College Physics,** Jerry D. Wilson and Anthony, J. Buffa, Prentice-Hall (1997).
25. **Senior Physics, Part - I,** I.K. Kikoin and A.K. Kikoin, Mir Publishers (1987).
26. **Senior Physics, Part - II,** B. Bekhovtsev, Mir Publishers (1988).

सामान्य पुस्तकें

विज्ञान के अनुदेशित तथा मनोरंजक सामान्य अध्ययन के लिए आप निम्नलिखित पुस्तकों में से कुछ पुस्तकें पढ़ना चाहेंगे । तथापि ध्यान रखिए, इनमें से कुछ पुस्तकों को लिखने का स्तर आपकी प्रस्तुत पुस्तक के स्तर से काफी उच्च रखा गया है ।

1. **Mr. Tompkins** in paperback, G. Gamow, Cambridge University Press (1967).
2. **The Universe and Dr. Einstein,** C. Barnett Time Inc. New York (1962).
3. **Thirty years that shook physics,** G. Gamow, Double Day, New York (1966).
4. **Surely You're joking, Mr. Feynman,** R.P. Feynman, Bantam books (1986).
5. **One, Two,Three....Infinity,** G. Gamow, Viking Inc. (1961).
6. **The Meaning of Relativity,** A. Einstein, (Indian Edition) Oxford and IBH Publ. Co. (1965).
7. **Atomic theory and the Description of Nature,** Niels Bohr, Cambridge (1934).
8. **The Physical Principles of Quantum Theory,** W. Heisenberg, University of Chicago Press (1930).
9. **The Physics - Astronomy Frontier,** F. Hoyle and J.V. Narlikar, W.H. Freeman (1980).
10. **The Flying Circus of Physics with Answer,** J. Walker, John Wiley and Sons (1977).
11. **Physics for Everyone** (series), L.D. Landau and A.I. Kitaigorodski, MIR Publishers (1978).
    Book 1: Physical Bodies
    Book 2: Molecules
    Book 3: Electrons
    Book 4: Photons and Nuclei.
12. **Physics can be Fun,** Y. Perelman, MIR Publishers (1986).
13. **Power of Ten,** Philip Morrison and Eames, W.H. Freeman (1985).
14. **Physics in your kitchen lab.,** I.K. Kikoin, MIR Publishers (1985).